

形状依存追従力を受ける膜構造物のための等張力曲面形状に関する研究

A study on isotonic surface for membrane structure under the follower force depending on its own shape

帯屋洋之*, 井嶋克志**, 井口真一***

Hiroyuki Obiya, Katsushi Ijima, Shin-ich Iguchi

*博 (工学), 佐賀大学助教授, 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

** 工博, 佐賀大学教授, 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

***博 (工学), フォーラムエイト宮崎支社 (〒889-2155 宮崎市学園木花台西2-1-1)

An incremental technique, named 'the simultaneous control', is applied to a computational program based on the tangent stiffness method. The present study shows form analyses for membrane structures, which have high-rise and large volume for their floor space. Furthermore, the study verifies that the program has commensurability to follower forces depending on the deformation of the structure. The method is a clear and strict analytical theory to be able to solve the problems with large deformational behavior. Therefore, it makes possible to find initial shapes for the pneumatic structures as the precise equilibrium solutions. Moreover, the tangent stiffness method has a so strong system to seek convergent solutions. Therefore, the method allows follower forces as the input value, and has so much flexibility for its loading conditions. Results are presented as some computational examples in which the behavior of soap film structures under water pressure becomes evident.

Key Words: form-analysis, simultaneous control, high-rise pneumatic structure, follower force, the tangent stiffness method

キーワード: 形態解析, サイマルコントロール法, 高ライズ空気膜構造, 追従力
接線剛性法

1. まえがき

張力のみ抵抗する膜面を空気圧によって支持する空気膜構造は, その優れた経済性, 機能性により, 恒久大空間構造の新しい構造形式として 20 世紀後半より注目を集め, 特に 1970 年代から 1980 年代にかけて北米を中心に多く建設された¹⁾. わが国においても東京ドームを始めとしていくつかの実績を残している. また, これらの空気膜構造の原型曲面として用いるため, 与えられた条件に対して面積最小曲面を形成し, かつ曲面全体にわたって張力が一定となる等張力曲面 (= 石鹸膜曲面) に関する数値解析手法が数多く提案された^{2)~7)}.

たとえば, Ishii⁴⁾ は等張力の基礎式を有限要素法に適用し, 力学的なアプローチによって多面体近似解を得る手法に関しての先駆的な研究を行っており, 以降, 非線形の支配方程式を如何に効率的に解くかという一般の大変形問題と共通な課題や, 形状依存の追従力 (Follower force) となる内圧荷重の取り扱いなどに関する議論が多くなされた. また一方で, 大森⁶⁾や鈴木⁷⁾は内包体積を入力条件とすることにより面積最小曲面を求める幾何学的なア

プローチによる方法 (極小曲面法) を提案している. それぞれ支配方程式へのアプローチに違いがあるものの, この時期の精力的な研究により, 恒久大空間構造として現実的な範囲の低ライズ曲面に関しては, 合理的な曲面形状を高い精度で得ることができるようになったと言える.

しかし, 空気膜構造は, 恒久的な使用のためには内圧をかけ続けなければならないという「*running* 性」の問題¹⁾があることや, 欧米において風や雪による事故が多発したことなどにより, 1990 年代以降, 恒久大空間屋根構造としてはサスペンション構造系が主流を為すようになった. また, これと同時に, 空気膜構造を対象とする等張力曲面解析に関する研究も, いくつかの課題を残しながら, 進捗を見なくなったように思える.

本論文では, この残された課題のうち,

- ① 内包体積が非常に大きくなるまでの石鹸膜曲面の物理的な膨張挙動の追跡問題.
- ② 空気圧だけでなく, 水圧, 土圧などが作用する場合の等張力曲面解析.

の 2 点に着目している. ①に関しては既に著者らの文献⁸⁾において, サイマルコントロール法を接線剛性法⁹⁾に適用

することにより、高精度な解が得られているが、本論文では、これ加えて、曲面法線方向外力の設定を行うことにより②の問題にも対応している。これにより、追従力としての非常に厳しい荷重条件となる場合を含むさまざまな環境下での等張力曲面解析が可能となり、本手法によって得られる曲面形状が、大空間屋根構造だけでなく、水中、地中構造、さらには宇宙構造物などに膜構造物を利用する際の原型曲面として応用できる可能性を示す。

2. 本論文で用いる形態解析手法の概要

石鹸膜曲面の内圧－内包体積曲線 (P-V 曲線) を追跡するとき、内包体積が小さい間は体積の増大に伴って内圧も増加するが、ある極大点を越えると体積の増大に対して内圧が減じ始める。すなわち、石鹸膜形態解析により P-V 曲線を求めることは、いわゆるエラスティカにおける座屈後の不安定釣合解の経路追跡と等価な問題になる。さらには、前述のように内圧荷重は形状依存の追従力となるため、数値解析上、離散化された節点力に関しては、非保存系の外力としての取扱いが必要となる。よって、たとえ弧長法などの反復概念を用いたとしても、通常の力学的アプローチによる経路追跡の手続きが不能になる。

著者らは、この大容積・高ライズの等張力曲面を求めるための増分制御法として、サイマルコントロール法⁸⁾を提案し、これを高精度な大変形解析理論である接線剛性法⁹⁾に適用することにより、高ライズ曲面の形態解析を行っている。サイマルコントロール法は、曲面上の任意の一節点に対して強制変位を与え、その時に発生する不釣合形状より算出される平均換算内圧を逐次更新しながら載荷する制御法である。本制御法では、平均換算内圧の強度が反復段階ごとの曲面形状に依存して変化するという、非常に厳しい条件の追従力を用いることになる。しかしながら、接線剛性法特有の強いロバスト性 (解を得ることができる頑強さ) により、荷重の変分に起因する剛性項や修正項は一切不要となり、通常の荷重・変位制御と共通の接線剛性が使用できる。この強いロバスト性は、接線剛性法の反復過程において、節点変位－要素端変形間の適合条件を厳密に取り扱うことによって担保されている⁹⁾。よって、全節点の不均衡力とコントロールポイントの拘束方向支点反力が収束すれば、完全な釣合条件を満たした高ライズ曲面が得られることになる。

もちろん、文献⁸⁾や本論文において求めているような高ライズ曲面を空気膜屋根構造に適用するには、耐風安定性などの問題があるため、恒久構造としての実用性には難があると考えられる。しかし、仮設構造物を想定した場合には、狭い敷地に対して高いライズが要求されることも少なくないし、さらには、宇宙構造物に目を向けるならば、超高ライズ大空間構造に適用できるという期待もある。

また、膜構造物の用途は屋根構造に限定されるものではなく、たとえば、これまでも水中、地中構造として多く用いられてきている。しかし、これらを対象とした形態解析の例は非常に少なく、Ishii¹⁰⁾による海中オイルタンクの

解析や、萩原ら¹¹⁾によるラバーダム (ゴム堰) の解析などを挙げることができる程度である。さらには、何れの研究も軸対称問題や二次元問題に限定されており、境界形状や荷重設定に関する任意性を許容するものではない。

本論文では、水圧が作用する条件下で、三次元空間内における任意の境界形状に対する多面体近似解としての等張力曲面を求めている。特に、内部空気圧によって膨張した石鹸膜曲面に対して外部より水圧が作用するような場合には、力学的アプローチによる高精度な手法を用いる必要があり、かつ、理論的な明快さと強いロバスト性が要求される。(もちろん、この場合には、前述の幾何学的アプローチによる手法^{6) 7)}の適用は難しいと考えられる。) この意味においても、サイマルコントロール法と接線剛性法の組み合わせによる本手法は非常に有効であるといえる。

3. 三角形膜要素の接線幾何剛性

接線剛性法では、要素端節点に離散化された互いに独立な要素端力の組み合わせを要素端力ベクトルとして定義し、これと基準座標系における節点力との間の平衡条件の非線形性を厳密に評価することができる。したがって、材料剛性を全く持たない石鹸膜要素を用いる場合も、実膜要素 (材料剛性あり) を用いる場合と共通の幾何剛性マトリックスを使用することができる。いま、要素端力ベクトル $\mathbf{S}$ とし、これと三次元空間に固定された基準座標系との間の平衡条件マトリックスを $\mathbf{J}$ とすれば、基準座標系表示の外力としての節点力ベクトル $\mathbf{U}$ は、

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{S} \quad (1)$$

と表示できる。この釣合条件式の変分をとると、以下のよう接線剛性方程式を得ることができる。

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{J}\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{K}_0$ は要素座標系内における要素挙動に起因する剛性であり、 $\mathbf{K}_G$ は要素の剛体変位に起因する接線幾何剛性である。また、 $\mathbf{u}$ は基準座標系表示された節点変位ベクトルである。

三角形膜要素に対して、図-1 のような辺に沿う方向の力の組み合わせを要素端力ベクトルとして採用した場合、式(2)における接線幾何剛性 $\mathbf{K}_G$ は、三角形トラサブロックの場合と同じになり、

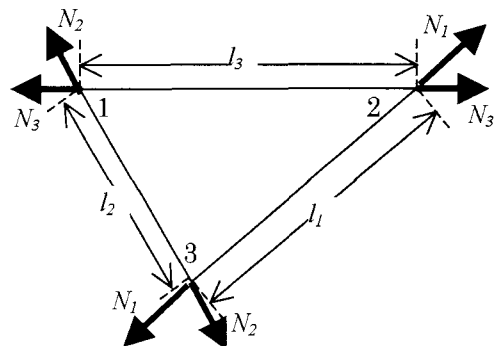


図-1 三角形膜要素と辺に沿う要素端力

$$K_G = \begin{bmatrix} k_{G2} + k_{G3} & -k_{G3} & -k_{G2} \\ -k_{G3} & k_{G3} + k_{G1} & -k_{G1} \\ -k_{G2} & -k_{G1} & k_{G1} + k_{G2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$k_{Gi} = \frac{N_i}{l_i} (e - \alpha_i \alpha_i^T) \quad (i=1,2,3) \quad (4)$$

のように表示できる。ここで、 e は 3×3 の単位マトリックス、 α_i は辺 i の方向余弦ベクトルである。

4. 等張力曲面解析のための石鹼膜三角形要素

4.1 要素ポテンシャルによる石鹼膜要素力の定義

石鹼膜要素のように実剛性を持たない要素を用いて形態解析を行う場合、要素ポテンシャルを定義し、これを独立な要素寸法で1階微分したものを要素力式として用いるのが便利である。この要素ポテンシャルは、要素長、面積などの要素に関する幾何学量の関数として定義されるものであり、実剛性を持つ要素の場合におけるひずみエネルギーに相当するものと考えれば理解しやすい。著者らは、石鹼膜要素のほかにも、線長比例軸力線要素¹²⁾などをこの要素ポテンシャルより導き、形態解析に応用している。

いま、三角形要素の面積を A 、単位幅膜張力を σt （＝一定）として、要素ポテンシャルが面積 A に比例するものと定義すれば、

$$P = \sigma t A \quad (5)$$

のようになる。これに対して、図-1に示したように、独立な要素寸法の組を三角形要素の三つの辺長とした場合、独立な要素端力は、

$$N_i = \frac{\partial P}{\partial l_i} = \frac{1}{2} \sigma t d_i \quad (i=1,2,3) \quad (6)$$

のように各辺に沿う方向の力となり、要素端力ベクトル

$$S = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]^T \quad (7)$$

を構成する。なお、式(6)における d_i は辺 i から三角形の垂心までの距離である。

以上により、接線剛性法による石鹼膜形態解析においては、一定空気圧や分布水圧などの、与えられた荷重条件より計算された節点外力ベクトルを式(2)に代入し、以降、式(2)→式(6)→式(1)→式(2)のようなNewton Raphson法と等価な反復過程により、不平衡力が0に収束すれば、完全な釣合形状を得ることになる。

なお、本論文においても文献5)および13)における考察に倣い、石鹼膜要素の要素力剛性 K_0 は接線幾何剛性 K_G に比べて非常に小さいものと考え、式(2)に $K_0=0$ を代入して計算を行うことにする。

また、本論文における等張力曲面解析では、1節点1自由度系への低次元化処理⁷⁾¹³⁾を施しており、節点の移動方向を定める方向余弦については、文献¹³⁾と同様に常に曲面の法線方向を選択するように設定している。

4.2 計算例 ー静水圧が作用する等張力曲面の解析ー

ここでは、静水圧が作用する場合の等張力曲面の解析を行う。図-2に示すような、水平面に対して 60° の傾きを持つ矩形境界に張られた石鹼膜に、境界上端を水面位置とする水荷重を増分载荷ではなく一時に载荷した。なお、ここで用いた四辺形要素は、4枚の三角形石鹼膜要素を張り合わせた四面体とし、単位幅膜張力と作用水圧を1/2としたものを使用している。水圧は反復段階ごとに要素位置より算出し、各節点に離散化して载荷する。

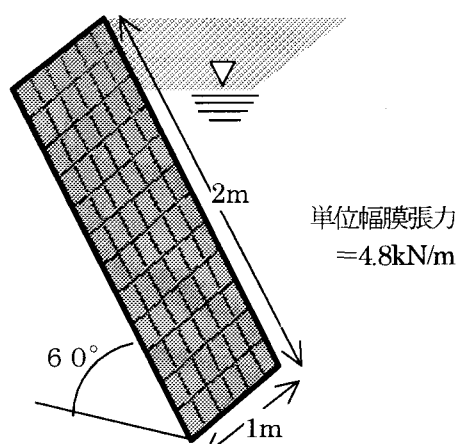


図-2 矩形境界の形状と要素分割および設定水面

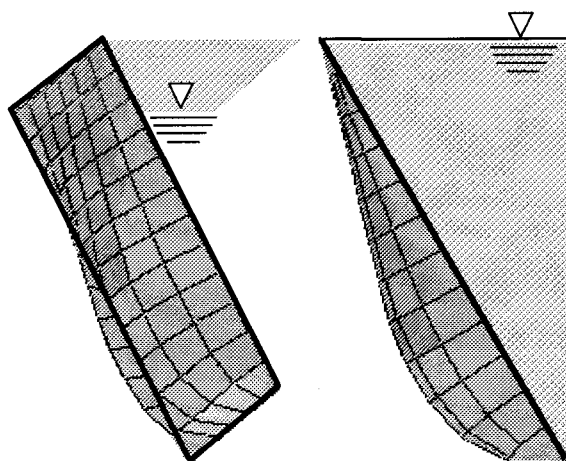


図-3 最終釣合形状ー鳥瞰図(左)と側面図(右)ー

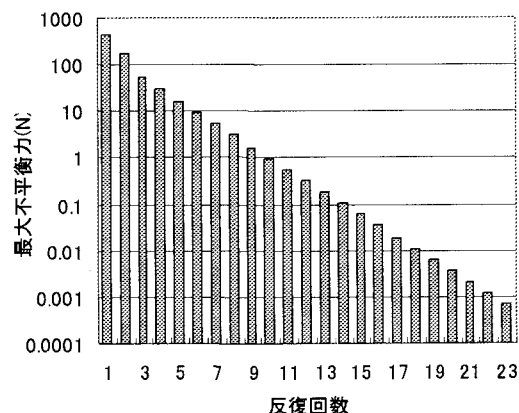


図-4 最大不平衡力の収束過程

図-3は最終釣合形状であり、図-4は、最大不平衡力の反復回数ごとの推移を示している。本計算例では、節点荷重が要素の面積と剛体回転さらに水深の変化に依存するという厳しい荷重条件となるため、図-4からも判るように、一定空気圧を受ける場合¹³⁾ほどの高収束性は認められない。しかし、特別な剛性項や修正項を用いることなく、通常の対称マトリックスで表現される接線剛性により、着実な収束過程のもと、釣合形状を得ることができる。これは、各反復段階において節点変位から変形後要素寸法を計算する際の、適合条件の厳密性によるものである。

5. サイマルコントロール法による膨張曲面解析

5.1 荷重－変位同時制御

空間内に設定された任意の閉じた境界に張られた石鹸膜に対して、内部空気圧（＝内圧）が作用する等張力膨張曲面を求めることを考える。このとき、内包体積の増加とともに内圧および曲率が増大する加圧膨張過程の解は得られても、内圧が極大値をとった後の減圧膨張過程の解を得ることはできない。また、内圧荷重下において、全ての節点を拘束して変位制御解析を行うこともできない。しかしながら、任意の一節点の座標値を強制的に与えたときに、その点を含む解曲面が物理的に存在するのであれば、求めるべき解曲面に対して釣合するような内圧を求めればよいことになる。本手法では、強制変位と、各反復段階における不平衡釣合形状より算出される平均換算内圧を同時に与えることにより、全自由節点の不平衡力と変位制御点の反力がゼロに収束すれば、変位制御点を含む解としての曲面形状とそのときの内圧が同時に得られることになる。

5.2 平均換算内圧の載荷

図-5に示すように節点 i に m 個の要素が繋がっているとする。要素 j の外積ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とした場合、節点 i が内圧荷重の $1/3$ を負担すると考えれば、これに対応する各要素の外積ベクトルは、次式となる。

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{a}_j / 3 \quad (8)$$

また、節点 i における曲面の法線方向余弦ベクトルは、

$$\mathbf{H}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij}}{\left| \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \right|} \quad (9)$$

と表せる。一方、要素 j の i 端における要素端力を $\mathbf{S}_{ij}$ とすれば、これの基準座標系への変換は、要素 j に関する平衡条件マトリックス $\mathbf{J}_{ij}$ により次式のように表せる。

$$\mathbf{U}_{Sij} = \mathbf{J}_{ij} \mathbf{S}_{ij} \quad (10)$$

よって、 i 点における要素端力の合力は次式となる。

$$\mathbf{U}_{Si} = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_{Sij} \quad (11)$$

石鹸膜曲面は曲面の法線方向にしか剛性を持たないので、要素端力の合力の法線方向成分を取り出せば、

$$\bar{\mathbf{U}}_{Si} = \mathbf{H}_i^T \mathbf{U}_{Si} \quad (12)$$

ようになる。また、内部空気圧以外の水圧、土圧、風圧などの外部圧力が作用する場合、これらの圧力を節点 i に離散化した節点力ベクトルを $\mathbf{F}_i$ とすれば、これの曲面法線方向成分は、式(12)と同様に、

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{H}_i^T \mathbf{F}_i \quad (13)$$

となる。節点 i において、これら二つの法線方向力の合力と釣合すべき内部空気圧を「節点 i における換算内圧」と呼ぶことにすれば、換算内圧は以下のように表示できる。

$$p_{Ci} = \frac{\bar{\mathbf{U}}_{Si} + \bar{\mathbf{F}}_i}{\left| \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \right|} \quad (14)$$

変位制御点および曲面上の全自由節点の総数を n とすれば、平均換算内圧は、次式のようにになる。

$$p_{AV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{Ci} \quad (15)$$

サイマルコントロール法においては、反復段階ごとにこの平均換算内圧を計算し、これを全節点に再配分することになり、通常の内圧載荷の場合に比べ、非常に厳しい条件の追従力荷重となる。しかし、極端に大きな変位制御増分を与えた場合や、物理的に存在し得ないような外部圧力を設定した場合などを除けば、着実に収束解を得ることが可能となる。収束時には各点の換算内圧 p_{Ci} ($i=1, 2, \dots, n$) は、平均換算内圧 p_{AV} と等しくなり、結果として、一定の内圧を受ける釣合曲面が得られることになる。

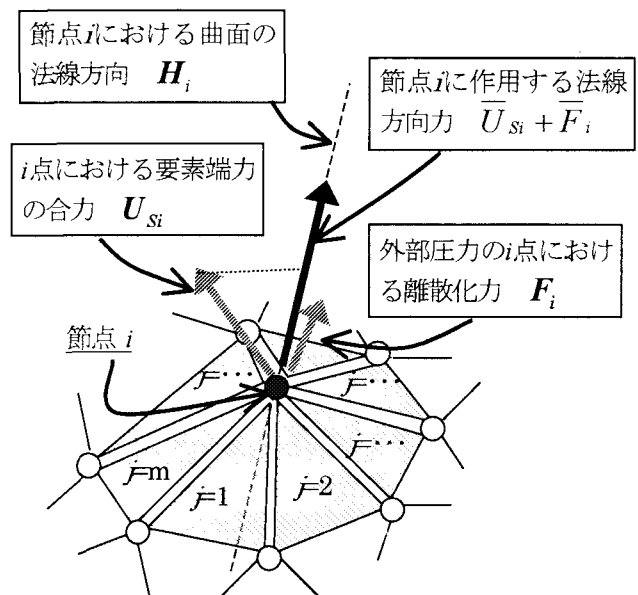


図-5 節点 i に繋がる要素と法線方向力

5.3 計算例 —内圧-内包体積曲線の追跡と解の検証—

図-6のような一辺6mの正六角形境界を持つ石鹸膜曲面について、文献⁸⁾の手順に倣ってサイマルコントロール法による内圧-内包体積曲線(P-V曲線)の追跡を行い、本論文ではさらに、得られた曲面形状の合理性を照査するために、P-V曲線上の解に対して石鹸膜要素を実膜要素(ヤング率×膜厚=170.0kN/m, ポアソン比=0.4, の弾性膜要素, 付録参照)に置換することにより、応力変形解析を行った。図-6における①~⑤は応力・変形解析において、応力状態を照査するための着目要素である。図-7に示したshape Aからshape Dまでの4つの釣合形状に関して、実膜置換→自重載荷の手順で解析を行い、要素内の平均主応力、主応力差について考察した。

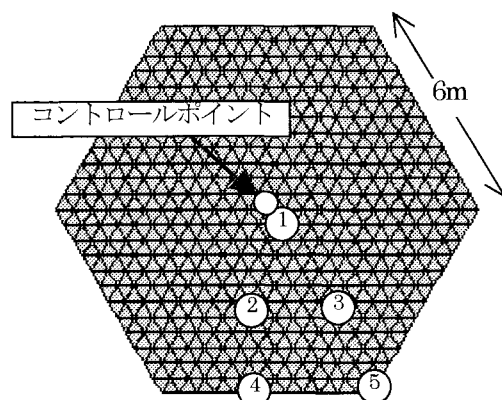


図-6 正六角形初期平面と着目要素

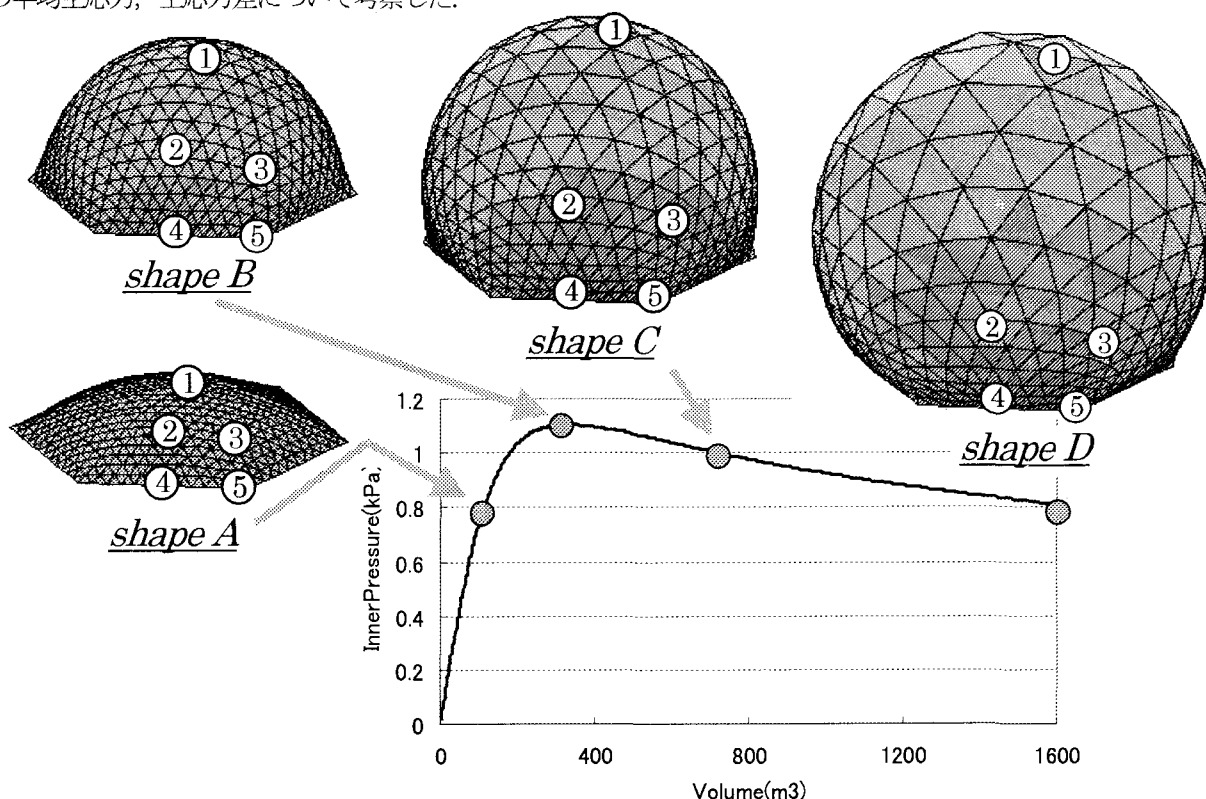


図-7 内圧-内包体積曲線 (P-V 曲線) と解の形状

図-7によれば、極大点付近の「shape B」の解では境界近傍の要素が直立し、曲面の平均曲率も最も大きくなっている。また、極大点を越えると内包体積の増大に伴い、平均曲率、内圧ともに減少している様子が良くわかる。本解析では、体積が1600m³を超えたあたりで、収束解を得ることが出来なくなるが、これは頂点付近要素と境界付近要素の面積の不均一さが拡大しすぎたことによるものであり、その時点でメッシュの再配分を行えば、さらに経路追跡を継続できるものと考えられる。

石鹸膜要素は面内方向に剛性を持たないために、一節点に三自由度を与えて等張力曲面解析を行った場合には、法線方向の不均衡力は完全に収束するが、面内方向には不均衡力が残留する。本論文における等張力曲面解析では、面外方向一自由度に低次元化して計算しているが、この場合も面内方向の釣合が保証されるものではない。したがって、

形状決定後に石鹸膜要素を実膜要素に置換して、一節点三自由度による応力・変形解析を行った場合には、この残留不均衡力は実膜要素の弾性変形によって相殺されるため、たとえ無重力の条件下であっても完全な等張力状態とはならず、僅かに応力のばらつきが出ることになる。ただし、比較的低いライズの曲面では実用上問題ないことが確認されている⁹⁾。ここでは、サイマルコントロール法によって、得られた高ライズ曲面についても実膜要素置換後の応力状態を調べることで、その実用性について考察する。

図-8は、図-7のP-V曲線上の4つの解において、着目要素①~⑤内部の平均主応力に対する主応力差の比 σ_1/σ_2 を比較したものであり、左図は要素置換により面内残留不均衡力を実膜要素が吸収した後の無重力実膜構造におけるもの、右図はさらに15N/m²の自重を作用させたときのものである。

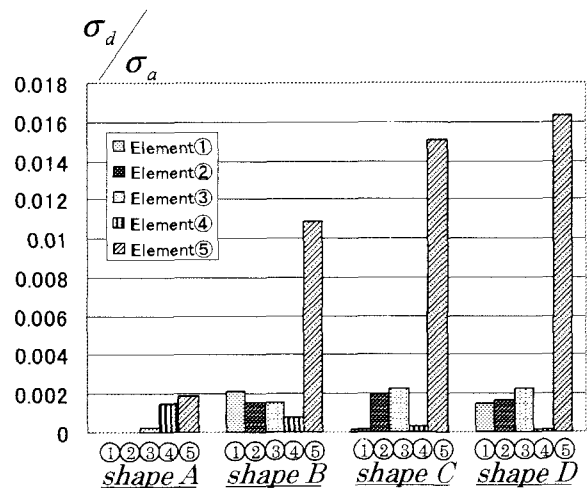
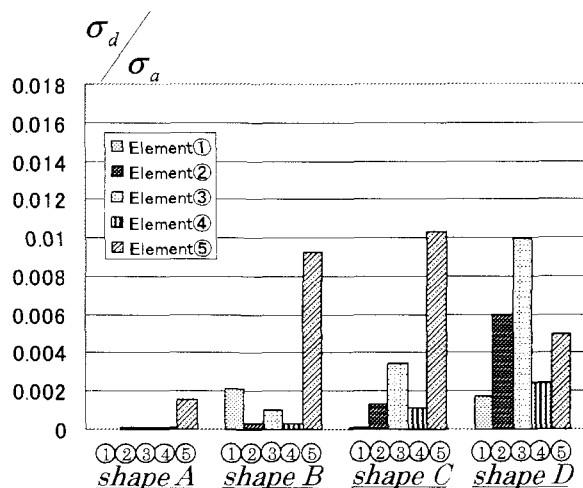


図-8 着目要素①～⑤における平均主応力 σ_a に対する主応力差 σ_d の比

表-1 shape D 自重载荷後の平均主応力の度数分布

平均主応力 (kN/m ²)	要素数 (全 840 要素中)
～2.94	0
2.94～2.96	4
2.96～2.98	6
2.98～3.00	10
3.00～3.02	28
3.02～3.04	804
3.04～3.06	8
3.06～	0

これによれば、低ライズの shape A では、もちろん無応力状態、自重载荷状態共に、ほとんど主応力差がなく等張力状態に近いことが判るが、ライズが最も高い shape D においても、境界隅角部付近の要素⑤で高々 $\sigma_d/\sigma_a=1.6\%$ となる程度である。また、表-1 はこの shape D における自重载荷状態での平均主応力のバラつきを示す度数分布表であり、全 840 要素のうち、ほとんどの要素が 3.02～3.04 (kN/m²) のレンジに入っていることが判る。なお、最も低いレンジ (2.94～2.96 kN/m²) にある 4 つの要素はいずれも境界隅角部付近の要素であり、自重载荷により張力が減じたものと考えられる。以上により、極端な高ライズの等張力曲面を原型曲面として用いた場合でも、応力の均一化を図るという形態解析の所期の目的を十分に果たしているものと考えられる。

5.4 計算例 —水圧が作用する膨張曲面形態解析—

図-9(a)のように、空間内の二つの三角形を直角に繋いだ形の境界を、図中に示したように高さが 1.5m となるように置き、ここに石鯛膜が張られるものとする。図-9(b)は要素分割と寸法を示した平面投影図であり、中央点をコントロールポイントとして、サイマルコントロール法により膨張曲面解析を行った。このとき、内部空気圧(内圧)と同時に上流側からのみ水圧が作用するものとし、上流に向かって下向きの勾配を持つ要素にのみ、水圧荷重を作用さ

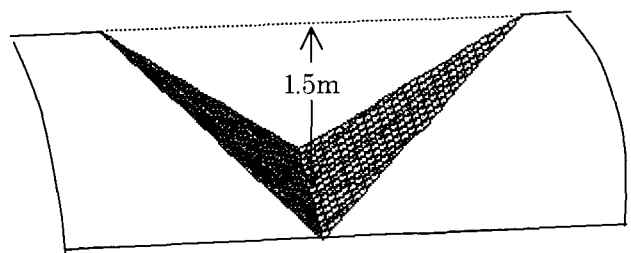


図-9(a) 初期形状 (鳥瞰図)

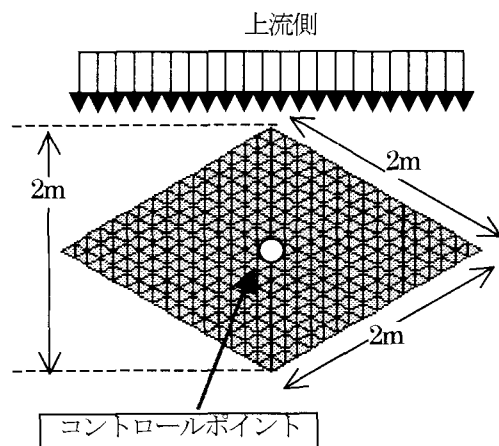


図-9(b) 初期形状と水圧の作用方向 (平面投影図)

せた。また、水面位置は常にコントロールポイントと同じ高さにあるものとして計算を行った。さらに、本計算例では、上流側と下流側で非対称な変形となるので、コントロールポイントにおける強制変位は、増分段階ごとに常に曲面の面外方向を向くように与えている。なお、ここでは単位幅膜張力を 4.0kN/m とした。

図-11 に内圧-内包体積曲線、図-10 に曲線上の解のうち、いくつかの解の形状 (鳥瞰図・側面図) を示す。本計算例では、内圧 (内部空気圧) のほかに水圧荷重が外部から作用しているにもかかわらず、内圧-内包体積曲線においては、5.3 節の計算例と同様、内圧の極大値が存在することが判る。また、本計算例では初期形状における境界

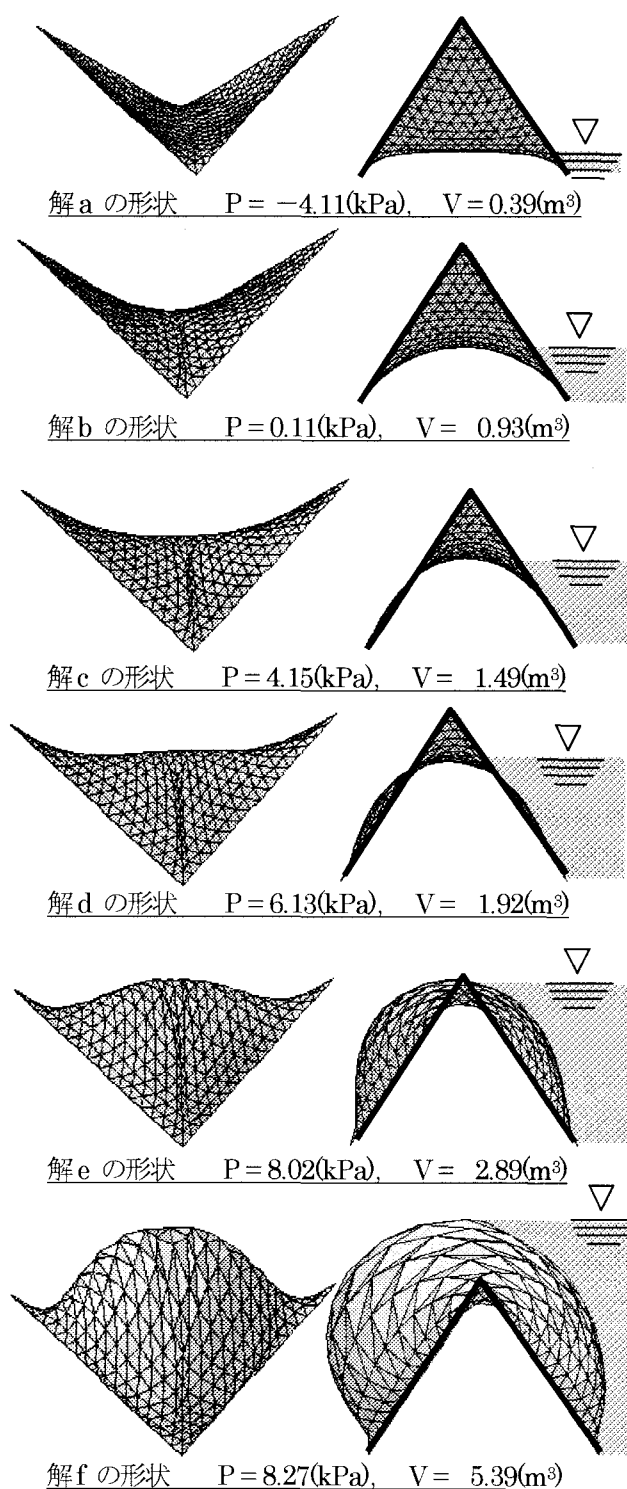


図-10 各段階の解の形状 (左=鳥瞰図, 右=側面図)

がひとつの平面内にないので、サイマルコントロール法によって得られる第一増分の解においては内圧が負の値をとる。その後、内部空気圧がまったく作用せず水圧荷重のみで釣合った等張力曲面形状(解bの付近)を経て、膨張している様子が判る。なお、各段階の解の形状(鳥瞰図)において、節点が中央部に集中し、一見、しわが発生しているようにも見えるが、これは、各節点の自由度を面外方向一自由度としているため、初期形状における中央部折れ角付近で初期の節点変位が凝集する方向に設定されてい

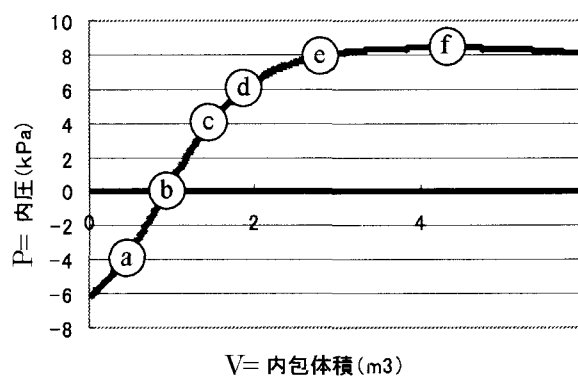


図-11 内圧-内包体積曲線(P-V 曲線)

ることによるものである。もちろん、解析自体は等張力条件を満たした石鹸膜要素を用いて面外方向不平衡力を完全に収束させているため、実際は全節点が滑らかな等張力曲面上に存在していることになる。

簡易水門などの実構造物を想定したときには、デフレ時の形状の問題や流れに対する動的問題等、技術的な課題があるため、本計算例の結果を直ちに適用するには無理がある。しかし、内部空気圧と水圧、土圧などの位置依存強度をもつ(追従力となる)外部圧力が同時に、かつ部分的に作用した場合でも、等張力曲面が存在し本解析手法によって面外方向釣合を満たす収束解が得られることが確認できた。したがって、たとえば現在極めて肉厚のラバーシートを用いているゴム堰の軽量化や、軟弱地盤上の水路の流量調整を行うための空気膜などに応用できる可能性があるが、詳細なアプリケーションについては、材料などの諸条件を含め、今後の検討課題とする。

6. まとめ

本論文で得られた結果をまとめると、以下ようになる。

- 1) 厳密な適合条件を使用した接線剛性法を用いることにより、一切の修正項などを使用することなく、形状依存追従力(空気圧、水圧など)を荷重条件とする等張力曲面解析が可能である。
- 2) 接線剛性法による形態解析にサイマルコントロール法の反復概念を導入することにより、極端に高いライズと大きな内包体積を持つ等張力曲面までの追跡が可能となる。また、このような高ライズ曲面であっても、等張力曲面としての力学的合理性は失われないことが、実膜要素に置換した応力・変形解析によって確認された。
- 3) 水圧を片側からのみ受けるような厳しい荷重条件であっても、サイマルコントロール法を用いることにより、等張力条件を満たした解形状が得られる。

以上により、本論文における形態解析手法を用いれば、曲面法線方向に作用する圧力系の荷重下においては、形状依存の追従力としての条件が厳しい場合でも、その条件に適う等張力曲面が物理的に存在すれば追跡可能である。これによって、等張力曲面解析の適用範囲が拡大し、地中、水中、宇宙など、さまざまな環境下における膜構造物の形状決定に利用できるものと考えられる。

付録 三角形等方性定ひずみ膜要素の要素力式

本来、建設材料としての膜材は異方性が強く、また圧縮に対する抵抗力がないため、リンクリング(しわ)まで考慮した構成則が多く提案されている(たとえば、Higashihara¹⁴⁾、遠藤¹⁵⁾など)。しかしながら、本論文では、石鹸膜要素によって得られた等張力曲面の力学的合理性を照査するための応力・変形解析を行っているので、膜材料の強い材料非線形性が問題となる挙動は考慮する必要がない。したがって、ここでは線形の三角形等方性定ひずみ膜要素を用いている。以下、接線剛性法に適用可能な三角形等方性定ひずみ膜要素の要素力式誘導の概要を示す。

図-1と同様に独立な要素端力の組み合わせを、三角形要素の各辺に沿う方向の力

$$S_e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]^T \quad (16)$$

とすれば、これと仕事の対となる要素変形量の組み合わせ、

$$\Delta s_e = [\Delta l_1 \quad \Delta l_2 \quad \Delta l_3]^T \quad (17)$$

との関係として定義できる。いま、この要素の無応力寸法を図-12のように表したとき、この要素のひずみエネルギーを U とすれば、この要素の要素力式は、

$$S_e = \frac{\partial U}{\partial \Delta s_e^T} = k_0 \Delta s_e \quad (18)$$

となる。なお、

$$k_0 = \frac{Et}{4A_0(1+\nu)} \left\{ \frac{2}{A_0^2(1-\nu)} \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ & r_2^2 & r_2 r_3 \\ \text{Sym} & & r_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{01}^2 & -l_{01}l_{02} & -l_{01}l_{03} \\ & l_{02}^2 & -l_{02}l_{03} \\ \text{Sym} & & l_{03}^2 \end{pmatrix} \right\} \quad (19)$$

$$r_i = \frac{a_{0i}^2 - b_{0i}c_{0i}}{l_{0i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (20)$$

であり、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 t は膜厚である。石鹸膜要素から実膜要素への置換に際しては、石鹸膜要素の各辺の長さ l_1, l_2, l_3 から次式によって、実膜要素の無応力寸法を算出する。

$$l_{0i} = \left\{ 1 - \frac{\sigma_s}{E} (1-\nu) \right\} l_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

また、式(2)の要素座標系内における要素挙動に起因する剛性 K_0 は、要素端力ベクトルと基準座標系で表示された節点力ベクトルの平衡条件マトリックス J によって、

$$K_0 = Jk_0 J^T \quad (22)$$

となる。

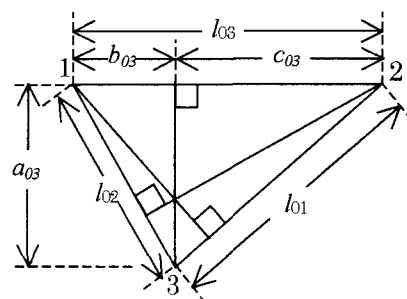


図-12 実膜要素の無応力寸法

参考文献

- 1) 川口衛：膜構造－その現状と展望，
http://www.kenkocho.co.jp/PDF/113_19KK.pdf
- 2) 石井一夫：膜構造の形状解析(形状決定の問題) 概説，膜構造論文集，No.3，pp.83-108，1989.
- 3) 半谷裕彦：構造物の形態解析，土木学会論文集，No.501/I-29，pp.11-20，1994.
- 4) Ishii, K. : Analytical shape determination for membrane structures, Proc. of IASS Congress of Sept., II, pp.67-74, 1976.
- 5) 後藤茂夫，荒牧軍治，井嶋克志，深江葉子：要素剛性分離の手法による等張力曲面の形状解析と膜構造解析，構造工学論文集，Vol.37A，pp.307-314，1991.
- 6) 大森博司，萩原伸幸，松井徹哉，松岡理：有限要素法による極小曲面の数値解析，膜構造研究論文集'88，P.1-10，1988.
- 7) 鈴木俊夫，半谷裕彦：極小曲面の変数低減による有限要素解析，日本建築学会構造系論文報告集，No.425，pp.111-120，1991.
- 8) 帯屋洋之，井嶋克志，後藤茂夫，荒牧軍治，川崎徳明：サイマルコントロール法による膨張曲面の形態解析，日本計算工学会論文集，Vol.4，pp.37-44，2002.
- 9) 帯屋洋之，後藤茂夫，井嶋克志，井口真一：接線剛性法による薄板構造の大変形挙動解析，土木学会論文集，No.598/I-44，pp.347-358，1998.
- 10) Ishii, K. : The form of an Oil-filled Axisymmetric Membrane Tank Floating on Sea, Bulletin of the Faculty of Engineering Yokohama National University, Vol.34, 1985.
- 11) 萩原国宏，立石昂，古屋久和：ラバーダム形状に関する研究，土木学会論文報告集，No.179，pp.37-47，1970.
- 12) Ijima K., Obiye H., Formfinding of single layer structure by measure potential function of element, Structural morphology, pp.249-256, 1997.
- 13) 帯屋洋之，劉磊，井嶋克志，後藤茂夫，等張力曲面解析における接線幾何剛性，膜構造研究論文集'94，pp.77-85，1994.
- 14) Higashihara H., Kikuchi H. : A Preliminary Study on Polyhedral Membrane-Panel Domes, Proc. of JSCE, No.344，pp.103-112，1984.
- 15) 遠藤典男，曹西，三井康司：塑性理論の適用による膜構造物のリンクリング現象評価，構造工学論文集，Vol.42-1，pp.27-34，1996.

(2004年9月17日受付)