

水平加振を受ける同心二重円筒タンクの振動解析

Dynamic responses of coaxial dual circular cylindrical tanks
forced to oscillate in horizontal direction

高西照彦*・水田洋司**・川口周作***

Teruhiko Takanishi, Yoji Mizuta and Shusaku Kawaguchi

* 工博 九州工業大学名誉教授 (〒805-0035 北九州市八幡東区山路 2-4-8)

** 工博 九州産業大学教授 工学部都市基盤デザイン工学科
(〒813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1)

*** 新日本製鐵株式会社 水道施設部 (〒100-8071 東京都千代田区大手町 2-6-3)

Theoretical analysis of forced horizontal oscillation of coaxial cylindrical tanks is carried out by applying three dimensional velocity potential theory on the water in tanks and finite element method dividing the tanks into cylindrical element. On the other hand, model of the dual circular cylindrical tanks is made of acrylic resin. The model is fixed on shaking table and is oscillated harmonically. Moreover, damped free vibration tests are carried out. Acceleration of the tanks and dynamic water pressure on the tank wall are measured. Analytical results obtained by numerical calculation agree with experimental results obtained by using shaking table.

Key Words: coaxial cylindrical tanks, theoretical analysis, model experiment

1. まえがき

現今、各地方自治体に対して、ゆとりのある安定な給水量を確保するために、水道用タンクの容量を増加することが要請されている。給水量の増加を考えると、新しくタンクを新設することはその建設用地を確保すること及び巨額な建設費用を必要とすること等、問題点が多い。これに対して、用地の有効利用と容量の増加を目的として、既設の円筒タンクの外側周りに、さらにもう一つの円筒タンクを同心に築造し、全体として二重円筒タンク(図-1 参照)を構成して使用に供することによって、より経済的に給水量の増加に対処しようとする試みがなされている¹⁾。

このようにして建設された同心二重円筒タンクが地震による水平加振を受けたとき、その内容液及び円筒タンク容器の動的挙動を明らかにすることは、この種のタンクの耐震性を考える上で必要なことである。

同心二重円筒タンクが水平外力を受けて振動する場合、その内容液とタンク容器との連成振動を考慮した振動解析を行う必要がある。この連成振動には比較的低い振動数領域において励起される内容液主体のスロッシング振動と比較的高い振動数領域において励起される容器主体のバルジング振動とがある。通常の場合、スロッシング振動とバルジング振動とが同時に生ずることはほとんどないと考えてもよい。この問題に関する既往の主な研究としては藤田²⁾、谷等³⁾及び吉田等⁴⁾の研究がある。それらの解析方法について簡単に述べると、藤田は、内容液は2次元ポテンシャル理論を用い、タンク容器はそれ

を円筒シェル要素に分割した有限要素法を用いて解析を行っている。谷等は、内容液は3次元ポテンシャル理論を用い、タンク容器についてはその変位関数を適当に仮定した後、修正ガレルキン法を適用して解析を行っている。吉田等は、内容液に対してはそれを軸対称長方形要素に分割した有限要素法を用い、タンク容器はこれを円筒シェル要素に分割した有限要素法を用いて解析を行っている。

本論では同心二重円筒タンクにおけるバルジング振動を取上げてその解析を行ったが、その際、内容液は3次元速度ポテンシャル理論を用い、タンク容器についてはそれを円筒シェル要素に分割した有限要素法を用いた。このようにして得られた内容液の速度ポテンシャルから容器壁面上の動水圧を求めてこれを容器壁面上に作用する外力と見做し、一方、容器に対する運動エネルギーと歪エネルギーを算出して、これらにハミルトンの原理を適用することによって内容液・タンク容器連成系の振動方程式を導いた。さらに、アクリル樹脂製の同心二重円筒容器を作製し、これを振動台上に固定した後、内容液を満たし、振動台入力加速度一定の振動試験を行って、タンク容器の加速度共振曲線及び容器壁面の動水圧共振曲線を求めた。最後に、数値計算を行い、それによって得られた結果と振動試験によって得られた結果とを比較して、両者が比較的良好に一致することを示した。

2. 内容液に関する解析理論

2.1 基礎方程式

解析に際しては、次のような仮定を採用した。すなわち、内容液の変位は小さい。したがって、線形理論が適用できる。また、内容液は非圧縮、非粘性で非回転である。さらに、タンク容器のバルジング振動を解析の対象としているので、取扱う振動数は比較的高い場合について考えるものとする。

上記の仮定を採用したとき、図-1に示すように、二重円筒タンクの内槽と外槽とに囲まれた領域に存在する内容液の運動を支配する微分方程式は φ を速度ポテンシャルとして、次のラプラスの方程式で表わされる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

タンク容器がその下端において $\ddot{x}(t)$ で表わされる加速度を受けた場合を考える。このときの境界条件は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{x} \cos \theta + \frac{\partial w_a}{\partial t}, \quad r = R_a, (a = a, b) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad z = 0 \quad (4)$$

ここに、 w_a, w_b はそれぞれ内・外槽の壁面の半径方向変位であり、 H は水深である。また、 R_a, R_b は内・外槽の半径である。また、上付き添字 $\cdot$ は時間 t に関する微分を表す。

2.2 基礎方程式の解

いま、式(2)~(4)を満たす式(1)の解を求めるのに、 φ は次のように3つの速度ポテンシャルの和として与えられるものとする。

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \varphi_1(r, \theta, z, t) + \varphi_2(r, \theta, t) + \varphi_3(r, \theta, z, t) \quad (5)$$

ここに、 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ はいずれもラプラスの方程式の解であるが、それらが満たす境界条件式は次の通りである。

(a) φ_1 について

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial w_a}{\partial t}, \quad r = R_a, \quad (a = a, b) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0, \quad z = 0 \quad (8)$$

(b) φ_2 について

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \dot{x} \cos \theta, \quad r = R_a, \quad (a = a, b) \quad (9)$$

(c) φ_3 について

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0, \quad r = R_a, \quad (a = a, b) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad z = 0 \quad (12)$$

さて、二重円筒タンクの振動を考える場合、それは加振方向に関してすべて対称であるとしてよい。したがっ

て、内容液の速度ポテンシャル及び円筒タンク容器の変位はそれをフーリエ cosine 級数によって展開することができる。

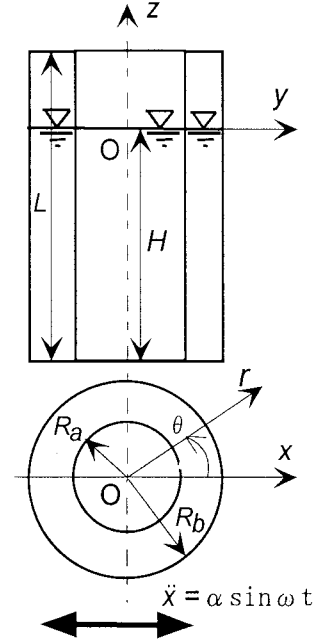


図-1 同心二重円筒タンク及び座標系

タンク容器の壁面の半径方向の変位を、次式

$$w_a = \sum_{n=1}^{\infty} w_{an} \cos n\theta, \quad (a = a, b) \quad (13)$$

のように表わすことにすれば、式(6)~(8)を満たす解 φ_1 は次式のように書くことができる。

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{E_{nm} I_n(\gamma_m r) + F_{nm} K_n(\gamma_m r)\} \cos n\theta \cdot \cos \gamma_m(z+H) \quad (14)$$

ここに、 $I_n(\cdot), K_n(\cdot)$ は n 次の第1種及び第2種の変形ベッセル関数、 γ_m は

$$\gamma_m = \frac{(2m-1)\pi}{2H}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

また、 E_{nm}, F_{nm} は次式に示す通りである。

$$\dot{w}_{anm} = \int_{-H}^0 \dot{w}_{an} \cos \gamma_m(z+H) dz, \quad (a = a, b) \quad (16)$$

$$G_{nm} = \gamma_m H \{I'_n(\gamma_m R_a) K'_n(\gamma_m R_b) - I'_n(\gamma_m R_b) K'_n(\gamma_m R_a)\} \quad (17)$$

とおけば

$$E_{nm} = -\frac{2}{G_{nm}} \{K'_n(\gamma_m R_a) \dot{w}_{bnm} - K'_n(\gamma_m R_b) \dot{w}_{anm}\} \quad (18)$$

$$F_{nm} = \frac{2}{G_{nm}} \{I'_n(\gamma_m R_a) \dot{w}_{bnm} - I'_n(\gamma_m R_b) \dot{w}_{anm}\} \quad (19)$$

ここに、添字 $'$ は関数の引数に関する微分を表す。

つぎに、式(9)を満たす解 φ_2 は

$$\varphi_2 = \dot{x} r \cos \theta \quad (20)$$

最後に、式(10)~(12)を満たす解 φ_3 は式(12)の条件式を適用する際に、 r をベッセル関数展開して表現した式を用いることに注意すれば求めることができ、それは次式のように表わされる。

$$\varphi_3 = \sum_{i=1} C_i \{J_1'(\kappa_i R_a) Y_1(\kappa_i r) - Y_1'(\kappa_i R_a) J_1(\kappa_i r)\} \cdot \cos \theta \frac{\cosh \kappa_i (z+H)}{\cosh \kappa_i H} \dot{x} \quad (21)$$

ここに、 $J_1()$, $Y_1()$ は 1 次の第 1 種及び第 2 種のベッセル関数である。また、 C_i は

$$C_i = \frac{\pi}{\kappa_i} \frac{Y_1'(\kappa_i R_a)/Y_1'(\kappa_i R_b) - 1}{\{Y_1'(\kappa_i R_a)/Y_1'(\kappa_i R_b)\}^2 \{1 - (\kappa_i R_b)^{-2}\} - \{1 - (\kappa_i R_a)^{-2}\}} \quad (22)$$

さらに、 κ_i は次式

$$J_1'(\kappa R_a) Y_1'(\kappa R_b) - J_1'(\kappa R_b) Y_1'(\kappa R_a) = 0 \quad (23)$$

を満たす i 番目の根である。

式(14),(20),(21)を式(5)に用いることによって、内槽と外槽に囲まれた領域における内容液の速度ポテンシャルを求めることができる。

2.3 内槽の内容液に対する速度ポテンシャル

単一の円筒タンクが水平加振を受けたときの内容液の動的解析については、既に Haroun 等⁵⁾ によって研究がなされているので、ここではその結果のみを示すことにする。この場合の速度ポテンシャル $\bar{\varphi}$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & \sum_{n=1} \sum_{m=1} \frac{2}{\bar{\gamma}_m H I_n'(\bar{\gamma}_m R_a)} \left\{ \int_H \dot{w}_{an} \cos \bar{\gamma}_m (z+H) dz \right\} \\ & \cdot I_n(\bar{\gamma}_m r) \cos n\theta \cos \bar{\gamma}_m (z+H) \\ & + \dot{x} r \cos \theta \\ & - \sum_{i=1} \frac{2 R_a J_1(\bar{\kappa}_i r)}{(\bar{\kappa}_i^2 R_a^2 - 1) J_1(\bar{\kappa}_i R_a)} \frac{\cosh \bar{\kappa}_i (z+H)}{\cosh \bar{\kappa}_i H} \cos \theta \dot{x} \end{aligned} \quad (24)$$

ここに、 $\bar{\gamma}_m$ は

$$\bar{\gamma}_m = \frac{(2m-1)\pi}{2H}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (25)$$

$$\text{また、}\bar{\kappa}_i \text{ は } J_1'(\bar{\kappa} R_a) = 0 \quad (26)$$

を満たす i 番目の根である。

2.4 タンクの側壁面上の動水圧

速度ポテンシャルが与えられれば、内・外槽の側壁面上における内容液の動水圧はそれぞれ次式によって求めることができる。

$$\text{内槽内壁上: } p_{ai} = -\rho \dot{\bar{\varphi}}, \quad r = R_a \quad (27)$$

$$\text{内槽外壁上: } p_{ao} = -\rho \dot{\bar{\varphi}}, \quad r = R_a \quad (28)$$

$$\text{外槽内壁上: } p_{bi} = -\rho \dot{\bar{\varphi}}, \quad r = R_b \quad (29)$$

ここに、 ρ は内容液の密度である。

3. 円筒タンク容器に関する解析理論

3.1 有限要素法による定式化

円筒タンク容器を薄肉円筒シェルとして、有限要素法を用いてその振動解析を行う。また、タンク容器の変位は小さいとして線形理論が適用できるものとする。

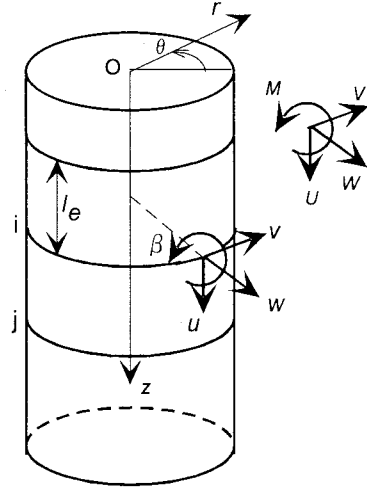


図-2 円筒タンクとリング要素並びに節線変位と節線力

二重円筒タンク容器の内・外槽をそれぞれ図-2に示すように適当な個数 (N_e) のリング要素に分割する。いま、1つのリング要素についてその母線方向、円周方向、半径方向、回転方向の変位成分を u, v, w, β とし、変位ベクトルを次のように置く。

$$d = \{u \ v \ w \ \beta\}^T \quad (30)$$

ここに、 T は転置を表わす。

ここで、この振動系における振動現象の対称性を考慮すれば、変位成分は $\cos n\theta$ 或いは $\sin n\theta$ を用いてフーリエ級数に展開して表わすことができる。すなわち、

$$d = \sum_{n=1} \Theta_n d_n \quad (31)$$

ここに、 Θ_n は対角行列であり、その対角成分は

$$\cos n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta \quad \text{である。また、}$$

$$d_n = \{u_n \ v_n \ w_n \ \beta_n\}^T \quad (32)$$

さて、 d_n の変位成分のうち、面内成分を 1 次関数、面外成分を 3 次関数で近似し、 $\beta_n = \partial w_n / \partial s$ とすれば、

$$d_n = A \Psi \quad (33)$$

と表わすことができる。ここに、 Ψ は未定係数ベクトル

$$\Psi = \{\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_8\}^T \quad (34)$$

である。 s はリング要素における母線方向の距離。また、 A については付録に示した。

図-2におけるリング要素の節線 i と節線 j において式(33)を適用し、その結果得られた式から Ψ を求めれば

$$\Psi = N d_{ne} \quad (35)$$

ここに、 d_{ne} は節線 i, j の変位成分から成るベクトルで

$$d_{ne} = \{u_n^i \ v_n^i \ w_n^i \ \beta_n^i \ u_n^j \ v_n^j \ w_n^j \ \beta_n^j\}^T \quad (36)$$

N は式(33)の A にそれぞれ $\xi=0$ 及び $\xi=1$ を代入して得られた 2 つの行列を 8×8 の行列に拡張した後、さらにその行列の逆行列をとったものである。ここに、 ξ はリング要素 e の母線長を l_e とし、母線に沿った距離を s としたとき、 $\xi = s/l_e$ で与えられる無次元量である。

式(31),(33),(35)を用いれば、リング要素の変位ベクトルは節線の変位ベクトルを用いて

$$\mathbf{d} = \sum_{n=1} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_n \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{d}_{ne} \quad (37)$$

と表わされる。

つぎに、リング要素の歪と変位の関係式は次式によって与えられる⁶⁾。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \sum_{n=1} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_n \{\boldsymbol{\varepsilon}_n\} = \mathbf{S} \mathbf{d} \quad (38)$$

ここに、 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ はリング要素の歪成分からなるベクトルで

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_s \ \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \ \gamma_{s\theta} \ \kappa_s \ \kappa_\theta \ \tau\}^T \quad (39)$$

$\bar{\boldsymbol{\Theta}}_n$ はその対角要素が

$$\cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta, \cos n\theta, \cos n\theta, \sin n\theta$$

から成る 6×6 の対角行列である。

歪成分についても変位成分と同様に、それを三角関数によってフーリエ級数に展開できるものとした、また、 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ は n 次の歪成分の振幅をその成分とするベクトルである。さらに、 $\mathbf{S}$ は微分演算子からなる 6×4 の行列で、これについては付録に示した。

式(37)を(38)に代入した後、 $\mathbf{S}$ による微分演算を実行すれば $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ は次式のように表わされる。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_n\} = \mathbf{B}_{ne} \mathbf{d}_{ne} \quad (40)$$

ここに、 $\mathbf{B}_{ne}$ は微分演算の結果得られた 6×8 の行列であり、次式から求められる。

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}_n \mathbf{B}_{ne} = \mathbf{S} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_n \mathbf{A} \mathbf{N} \quad (41)$$

さらに、リング要素における応力と歪の関係式は⁶⁾

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \sum_{n=1} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_n \{\boldsymbol{\sigma}_n\} = \mathbf{D} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (42)$$

ここに、 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ は応力成分であり、次式で定義される。

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{N_s \ N_\theta \ N_{s\theta} \ M_s \ M_\theta \ M_{s\theta}\}^T \quad (43)$$

応力成分についても三角関数を用いたフーリエ級数展開が可能であるとした。また、 $\mathbf{D}$ は弾性係数を表わす行列で、これについては付録に示した。

3.2 運動エネルギー及び歪エネルギー

タンク容器の密度を ρ_s 、厚さを h とすれば、リング要素の単位面積当りの質量は $\rho_s h$ 、回転慣性は $\rho_s h^3/12$ となる。これを用いてリング要素の質量行列を次式のように定義すれば、

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \rho_s h & & & \\ & \rho_s h & & \\ & & \rho_s h & \\ & & & \rho_s h^3/12 \end{bmatrix} \quad (44)$$

二重円筒タンクの運動エネルギーは

$$PK = \frac{1}{2} \sum_{a=a,b} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\dot{\mathbf{d}}^{(a)})^T \mathbf{m} (\dot{\mathbf{d}}^{(a)}) R_a d\theta dz \quad (45)$$

と表わされる。ここに、添字 a, b は内槽及び外槽を示す記号である。

式(37)を式(45)に代入し、 θ による積分が

$$\int_0^{2\pi} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_n^T \mathbf{m} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_m d\theta = \begin{cases} \pi \mathbf{m}, & (m = n) \\ \mathbf{0}, & (m \neq n) \end{cases} \quad (46)$$

となることを考慮すれば、

$$PK = \frac{1}{2} \sum_{a=a,b} \pi R_a \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{n=1} l_e \int_0^L (\dot{\mathbf{d}}_{ne}^{(a)})^T \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T \mathbf{m} \mathbf{A} \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}}_{ne}^{(a)} d\xi \quad (47)$$

いま、全リング要素の節線変位振幅の成分を1列に並べることによって作られた列ベクトル $\sum_{a=a,b} \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{d}_{ne}^{(a)}$ において、その中の重複した成分を除いて得られる列ベクトルを $\mathbf{Q}_n$ とすれば、式(47)は結局、次式のように表わすことができる。

$$PK = \frac{1}{2} \sum_{n=1} \dot{\mathbf{Q}}_n^T \mathbf{M}_n \dot{\mathbf{Q}}_n \quad (48)$$

ここに、 $\mathbf{M}_n$ は式(47)において ξ による積分を実行した後、に得られる各要素行列について、その次元を拡張し、要素 e に関して全て加え合わせるによって求められる。なお、 $\mathbf{Q}_n$ の次元数は全リング要素の節線変位の総数に等しい。

つぎに、二重円筒タンクの歪エネルギーは

$$PU = \frac{1}{2} \sum_{a=a,b} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{\boldsymbol{\sigma}^{(a)}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}^{(a)}\} R_a d\theta dz \quad (49)$$

と表わされる。

式(38),(40)~(42)を用い、 θ による積分が

$$\int_0^{2\pi} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_n^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_m d\theta = \begin{cases} \pi \mathbf{D}, & (m = n) \\ \mathbf{0}, & (m \neq n) \end{cases} \quad (50)$$

となることを考慮すれば、

$$PU = \frac{1}{2} \sum_{a=a,b} \pi R_a \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{n=1} l_e \int_0^L (\mathbf{d}_{ne}^{(a)})^T \mathbf{B}_{ne}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{ne} \mathbf{d}_{ne}^{(a)} d\xi \quad (51)$$

と書くことができる。

上式は $\mathbf{Q}_n$ を用いて次式のように表わすことができる。

$$PU = \frac{1}{2} \sum_{n=1} \mathbf{Q}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{Q}_n \quad (52)$$

ここに、 $\mathbf{K}_n$ は式(51)において ξ による積分を実行した

後に得られる各要素行列を、要素 e に関して加え合わせるることによって求められる。

最後に、二重円筒タンクに対する外力としては、その内容液の振動によって生ずる壁面動水圧とタンクの振動によって生ずるタンク自身の慣性力とを考えればよい。したがって、これら外力による仮想仕事は、式(27)~(29)から得られる内・外槽タンクの壁面動水圧 p_{ai}, p_{ao}, p_{bi} 及び式(30)から得られるタンク壁面の円周方向と半径方向の変位 $v_a, w_a, (a = a, b)$ を用いて、次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \delta PW = & \int_0^H \int_0^{2\pi} \{ (p_{ai} - p_{ao}) \delta w_a R_a + p_{bi} \delta w_b R_b \} d\theta dz \\ & + \sum_{a=a,b} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{ (-\rho_s h \ddot{x}) (\delta w_a \cos \theta - \delta v_a \sin \theta) \} R_a d\theta dz \end{aligned} \quad (53)$$

ここに、 $\delta v, \delta w$ は仮想変位を表わしている。

式(15),(23),(25),(26)の $\gamma_m, \kappa_i, \bar{\gamma}_m, \bar{\kappa}_i$ において、数値計算の精度を考慮して、採用すべき m, i の最大値を定めた後、式(53)の積分を実行して整理すれば、それは次式のように書き表わすことができる。

$$\delta PW = -\sum_{n=1} \delta Q_n^T \Delta M_n \ddot{Q}_n + \delta Q_1^T F \ddot{x} \quad (54)$$

ここに、 $\Delta M_n, F$ は積分の結果得られた $\ddot{Q}_n$ 及び $\ddot{x}$ に対する係数行列で、 ΔM_n は正方行列、 F は列ベクトルであり、その次元数は Q_n のそれに等しい。

3.3 二重円筒タンクの振動方程式

式(48),(52),(54)を用いて、これにハミルトンの原理を適用し、それよりオイラーの微分方程式を導けば次式が得られる。

$$(M_1 + \Delta M_1) \ddot{Q}_1 + K_1 Q_1 = F \ddot{x} \quad (55)$$

$$(M_n + \Delta M_n) \ddot{Q}_n + K_n Q_n = 0, \quad (n \geq 2) \quad (56)$$

入力加速度 $\ddot{x}$ が与えられれば、上記の微分方程式を解くことによって、二重円筒タンクの各リング要素の節線変位が得られるから、その値を用いれば、既に上に示した各式を用いて円筒タンクの応答値及びタンク壁面上の動水圧の応答値を全て求めることができる。

式(55),(56)で表わされる振動の微分方程式を見れば、同心二重円筒タンクがその一つの直径方向に強制加振を受けた場合には、 $n = 1$ すなわち、 $\cos \theta$ に対する振動のみしか励振されず、 $\cos n\theta, (n \geq 2)$ に対する振動は

生じないことが分る。

また、式(55),(56)における ΔM_n は壁面動水圧の中で、タンク壁面の振動加速度 $\ddot{Q}_n$ に比例して振動する内容液の質量を表す行列と考えてもよいもので、それを仮想質量行列或いは付加質量行列と称してよいであろう。

さて、式(55)の微分方程式を用いて応答計算を行うにはモード解析法に従うのがよい方法である。

まず、式(55)において $\ddot{x} = 0$ とした同次微分方程式を解くことによって、内容液を有する円筒タンクの固有円振動数 $\omega_s, (s = 1, 2, \dots, N_s)$ とモード行列 Γ を求める。ここに、 N_s はモード解析法で採用する最大の振動次数である。

q を基準座標ベクトルとして、式(55)において Q_1 を

$$Q_1 = \Gamma q \quad (57)$$

とおく。式(57)を式(55)に代入した後、左から Γ^T を掛けて、モードの直交性を考慮し、さらに、 $\dot{q}$ に比例する減衰項を付加して整理すれば、 s 次振動に関する微分方程式が得られて次のように表わすことができる。

$$\ddot{q}_s + 2h_s \omega_s \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = f_s \ddot{x}, \quad (s = 1, 2, \dots, N_s) \quad (58)$$

ここに、 h_s は s 次の減衰定数である。また、 f_s は列ベクトル $\{ \Gamma^T (M_1 + \Delta M_1) \Gamma \}^{-1} \Gamma^T F$ の s 番目の要素である。本論では入力加速度が

$$\ddot{x} = \alpha \sin \omega t \quad (59)$$

で与えられるような定常調和波加振の場合について考えることにする。

4. 定常振動実験について

同心二重円筒タンクの動的挙動について、これを実験的に明らかにし、さらに上述の理論の妥当性を検討するために、実物の約 1/20 の模型を作成し、これを振動台上に固定して、内容液が存在する場合について、入力加速度を一定とした定常調和加振実験を行った (図 - 3)。

実験に用いた模型タンクは厚さ 1 cm のアクリル樹脂製で、内槽及び外槽の外径がそれぞれ 0.6 m, 0.8 m, 高さが 0.8 m である。内容液としては水を用い、水深は 0.5 m とした。内・外槽に水を満たした場合を CASE C, 内槽と外槽の間に水を満たした場合を CASE D とした。

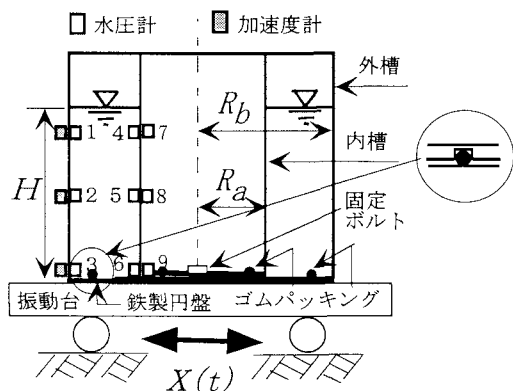


図-3 振動台上の同心二重円筒タンク

図-3に示すように、円筒タンクの底面にはそれぞれ止水を目的として、その断面が半円形（直径4 mm弱）の溝を同心円状に掘り、この溝に断面の直径が4 mmの円形の防水用ゴムパッキングを埋めこんだ後、これら2つのタンクの底面の中心を合わせて、その中心に固定ボルトを通すことによってタンクを振動台に固定した。なお、同図に示すように、各円筒タンクの底面にはそれぞれその内径より4 cm小さい厚さ12 mmのステンレス製の円板が置かれており、固定ボルトはその中心を貫通している。

加速度の測定には容量2000 Galのひずみゲージ式加速度計（共和電業製AS-2GB）を用い、動水圧の測定には容量20 Paの水圧計（共和電業製PSS-02KBF）を用いた。これらのセンサーは図-3に示すように、それぞれ内・外槽タンクの壁面上に、底面から0.02, 0.2, 0.4 mの位置に取付けられている。なお、センサーの位置が測点の位置を、数値が測点の番号を表わしている。

入力加速度は100 Galとし、加振振動数は内容液のスロッシング振動領域を避けて、5~100 Hzの範囲に渡って、振動数間隔を0.5 Hzとして定常調和加振を行った。このとき、円筒タンク壁面上の加速度と動水圧を計測し、得られた記録から加速度と動水圧の共振曲線並びに特定の加振振動数に対する応答加速度及び動水圧の深さ方向の分布曲線を求めた。

5. 実験結果及び数値計算結果との比較

5.1 数値計算について

数値計算に際して採用した物理定数及び諸定数の値は次の通りである。

円筒タンクの半径としては、円筒の中心よりそれぞれのタンク壁の厚さの中央面までの距離を取って0.295 m, 0.395 mとした。厚さは0.01 m, 高さは0.8 mである。アクリル樹脂製タンクの密度は 1220 kg/m^3 、弾性係数とポアソン比についてはタンクと同質の試験片を用いた静的引張り試験を行うことによって得られた $2.29 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ と0.35を用いた。内容液は水であり、その密度は 1000 kg/m^3 である。

円筒タンクは内・外槽共にそれぞれ空中部分を5等分、水中部分を8等分したリング要素に分割した。なお、図-3に示した止水用ゴムパッキングの弾性バネとしての性質を考慮するために、それぞれのタンク壁の下端にリング要素を1つ加えることによって、その上下方向の剛性がゴムパッキングのそれと等価になるようにした。

式(15),(23),(25),(26)の $\gamma_m, \kappa_i, \bar{\gamma}_m, \bar{\kappa}_i$ において採用したm及びiの最大値はそれぞれ12及び5である。試算の結果、この場合、すべての応答値についていずれも0.1%以下の精度が得られていることがわかった。モード解析法で採用した振動次数は3次までである。

固有振動数はCASE Cの場合、1, 2, 3次がそれぞれ18.329, 50.817, 107.82 Hz, CASE Dの場合、19.237, 56.187, 113.32 Hzである。したがって、3次の固有振動数はいずれの場合も100 Hzを超える値になっている。

いずれの場合も、1次振動は内槽の水平方向の変位が卓越する振動で、その振動形は槽の母線が片持梁の1次振動と類似した単純な振動形を示す。2次振動は外槽の水平方向の変位が卓越する振動で、その振動形は内槽のそれと同形である。3次振動は内槽の鉛直方向の変位が卓越する振動で、その振動形は槽の母線の一方が伸び、反対側が縮むという振動形を示す。

減衰定数は各振動次数に対して、それぞれ減衰自由振動実験を行うことによってこれを求めた。それらの値はCASE CとCASE Dについて多少異なっているが、1次が0.0001~0.09, 2次が0.2~0.28, 3次が0.01~0.05であった。これは、それぞれの実験において、タンクを固定するボルトの締付け具合に多少の差があることがその主な原因の1つであると考えられる。さらに、実験にお

ける減衰自由振動の波形にうなりの現象が生じており、これが減衰定数を定めるときのばらつきの原因にもなっている。なお、3次振動については明確な共振点が存在しない場合もあり、したがって得られた減衰定数の値も信頼性が低いと考えられる。なお、数値計算に用いた減衰定数についてはそれぞれ後に示した図中に h_s として明記してある。

5.2 円筒タンクの応答結果について

同心二重円筒タンクの定常振動実験によって得られたタンク自身の加速度応答曲線と特定の加振振動数に対する加速度応答の深さ方向の分布曲線の一例を、理論計算結果と比較して示せば以下の通りである。

図-4はCASE C（内・外槽に水を満たした場合）、図-5はCASE D（内槽と外槽の間に水を満たした場合）に対する外槽の測点2における加速度の振動数応答曲線である。実線が理論値、●印が実験値である。図中、 α は加振加速度振幅を、 h_s は1,2,3次振動の減衰定数を表わしている。また、 K_g は図-3中の止水ゴムパッキングのバネ剛性の大きさを表わすための倍率の値であり、それは5.1で述べた様に、各タンクの下端に付加した高さ3mmのリング要素の剛性と倍率との積が、ゴムパッキングの剛性と等価になるように、内容液を含まないタンク容器の1次と2次の固有振動数を用いて定めた値である。

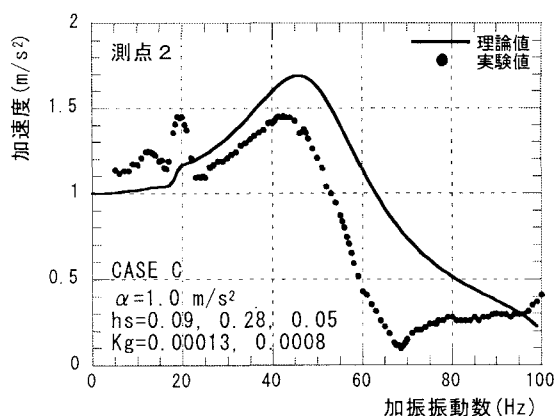


図-4 外槽の加速度の共振曲線
(CASE C, 測点2)

同図を見ると、1次振動については実験値の方が大きく、2次振動については理論値の方が大きくなっているが、60 Hz以上の高い振動数の範囲を除いては両者の傾向はよく一致しているといえよう。1次振動は主として

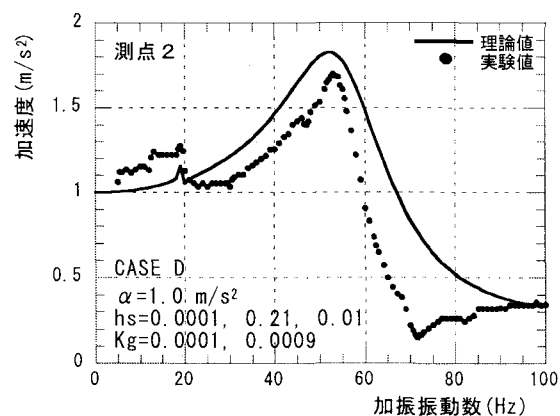


図-5 外槽の加速度の共振曲線
(CASE D, 測点2)

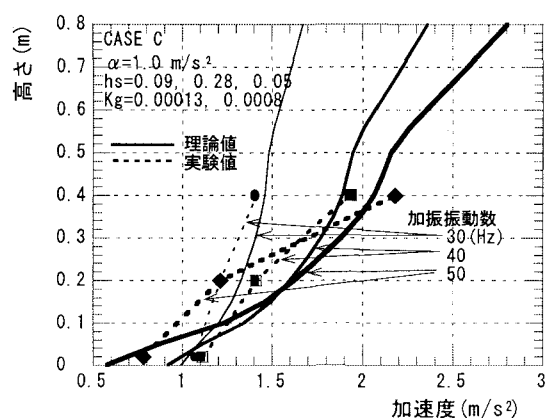


図-6 外槽の壁面上の加速度分布
(CASE C)

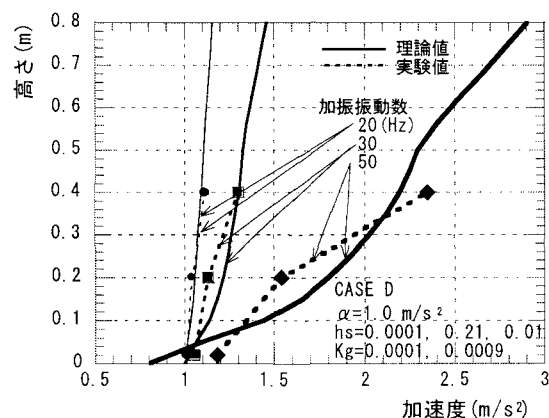


図-7 外槽の壁面上の加速度分布
(CASE D)

内槽の1次の共振によって生じたものであるが、本論の理論式では、内・外槽が固定ボルトで締結されている状態をばね作用によって近似的にしかモデル化していないために、内・外槽間の連成効果を小さく見積った結果になって、特に、この振動数近傍においてその影響が強く現れて、内槽の慣性力が外槽の振動に及ぼす影響を実際

より小さく評価しているのではないかと考えられる。なお、実験において1次の固有振動数以下の応答に乱れが生じているが、その原因については現在までのところよく分っていない。

図-6,7はそれぞれCASE C,Dについて、一例として選んだ3つの加振振動数に対する外槽壁面上の加速度応答の分布を示したものである。実線が理論値で、●, ■, ◆印が実験値である。両者を比較すると、多少その値に差が生じている測点もあるが、全体としてはいずれの加振振動数についても両者は互いに比較的良好に一致しているといえるであろう。

5.3 タンク側壁面上の動水圧の応答結果について

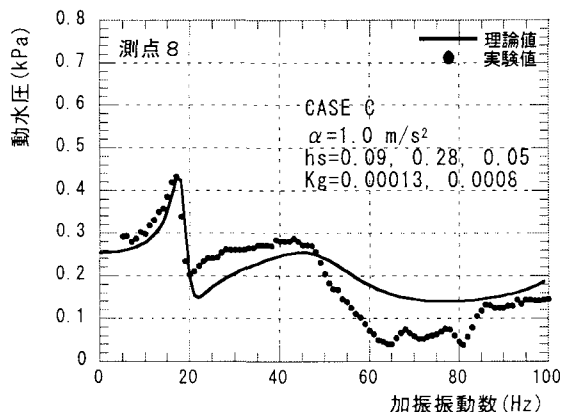


図-8 動水圧強度の共振曲線
(CASE C, 内槽の内壁)

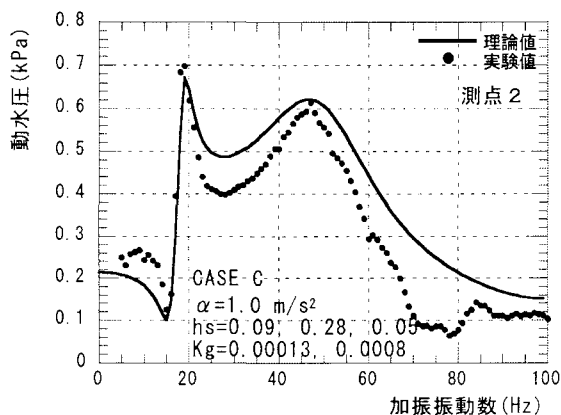


図-9 動水圧強度の共振曲線
(CASE C, 外槽の内壁)

実験によって得られた円筒タンクの内・外槽の側壁に対する動水圧強度の応答曲線と特定の加振振動数に対する動水圧強度応答の深さ方向の分布曲線の一例を、理論計算結果と比較して示せば以下の通りである。

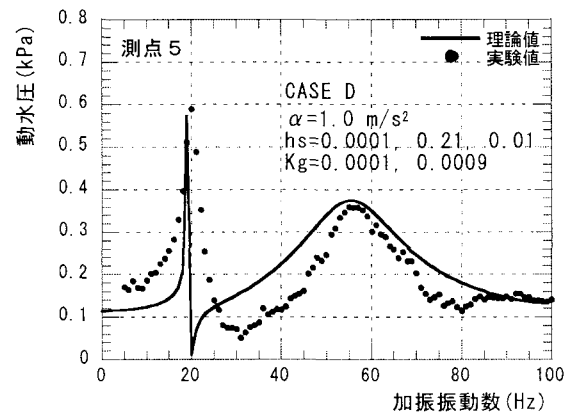


図-10 動水圧強度の共振曲線
(CASE D, 内槽の外壁)

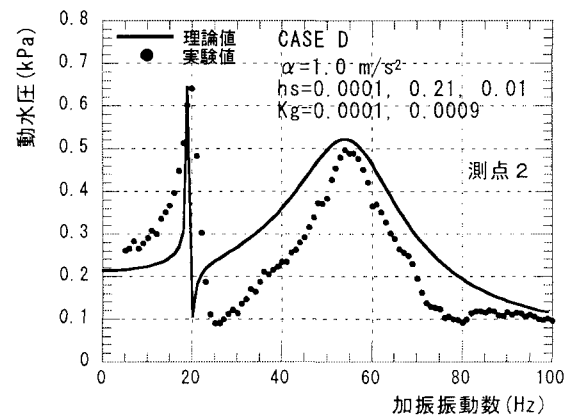


図-11 動水圧強度の共振曲線
(CASE D, 外槽の内壁)

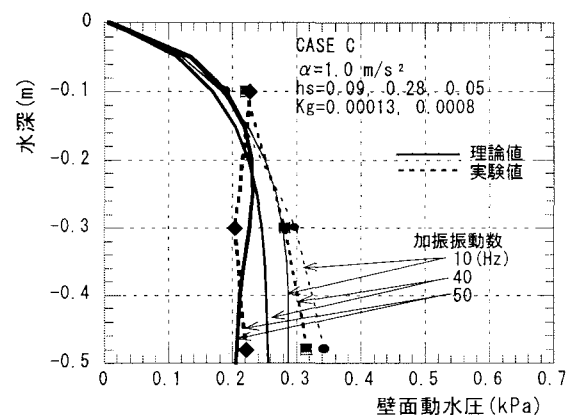


図-12 動水圧強度の分布
(CASE C, 内槽の内壁)

図-8,9はCASE Cにおける内槽の内壁面上の測点8と外槽の内壁面上の測点2の、図-10,11はCASE Dにおける内槽の外壁面上の測点5と外槽の内壁面上の測点2の動水圧強度の応答曲線である。

実験値と理論値を比べると、加振振動数に対する両者

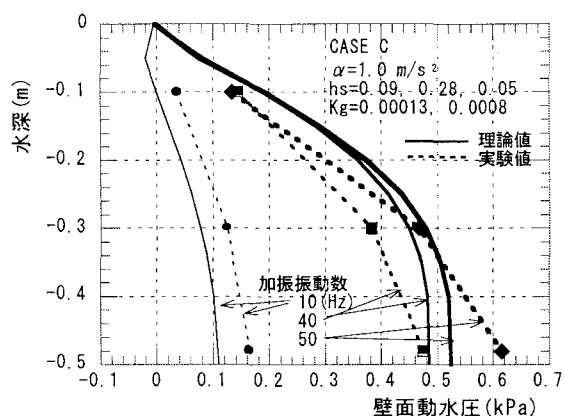


図-13 動水圧強度の分布
(CASE C, 内槽の外壁)

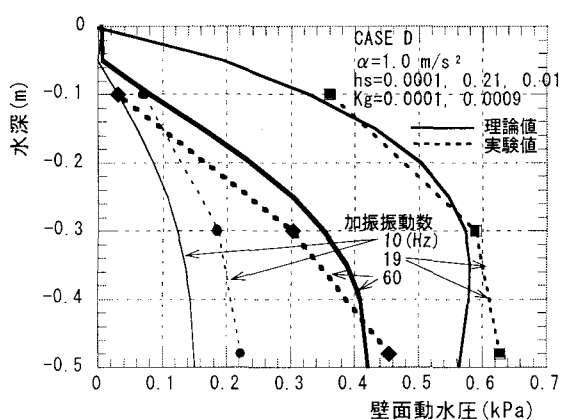


図-14 動水圧強度の分布
(CASE D, 内槽の外壁)

の変化の傾向はよく一致しているといってもよいであろう。しかし、詳細にみると、一般に、2次の固有振動数を中心としてその両側で理論曲線は実験値より大きくなっており、そのため理論曲線の振動数方向の幅が広がっていることが分る。また、理論では3次の固有振動数はいずれの場合も100 Hzを少し越える程度であるが、3次振動は内槽の母線の伸縮が卓越する振動であるために、理論曲線には3次の共振点がほとんど現れていない。このため理論曲線は60 Hz以上においては単調な変化しかしていないが、実験値ではこの範囲で小さなピークがいくつかみられる。その原因の一つとして、加振振動数が高くなると実験装置の局所的な共振現象が発生しやすくなり、それを加速度計が拾ったという可能性が挙げられよう。

図-12,13と14はそれぞれCASE C,Dについて、一例として選んだ3つの加振振動数に対する内槽の内・外壁面上の動水圧強度の深さ方向分布を示したものである。

実線が理論値であり、●, ■, ◆印が実験値である。加振振動数はいずれも60 Hz以下の場合である。図中、加振振動数の値によっては静水面近傍における動水圧の理論値が0に近いか或は負になっている所がある。それはその振動数における水槽壁面の変形のために、これらの点における動水圧の位相が水深の深い所のそれとは逆になったことで生じた現象であると考えられる。

これらの図を見ると、ある加振振動数のとき、測点によっては理論値と実験値とが多少異なっている場合もあるが、全体として両者は比較的良好に一致しているといってもよいであろう。

なお、本論では実験結果について、その一部のみしか示さなかったが、ここでは示さなかった他の実験条件の場合及び他の測点における場合についても、それらの実験結果と本論による数値計算結果とは、ここで示したものと同程度に両者は一致していることを記しておく。

本論では、内容液の存在しない空の円筒タンクに対する振動実験結果については、現在、実験データを整理中のため示していないが、この実験結果と数値計算結果とを対比すれば本論における同心二重円筒タンクのモデル化に対する妥当性に関して、有用な示唆が得られるものと思われる。

また、(a)内・外槽タンクの壁面の弾性変形と動水圧の連成効果及び(b)内・外槽タンクに生じる動水圧の差がタンク自体に及ぼす影響等に関しては、それらを直接明らかにするような実験を行っていない。しかし、上記の(a),(b)等に関しては、結果的には本論の実験において示したタンク壁の加速度応答及び動水圧応答として現れている筈であるから、本論の実験結果と理論解析の結果とがよく一致すれば、その解析理論は妥当であると判断してもよいと考えられる。

6. おわりに

本論では、まず、内容液を有する同心二重円筒タンクが水平方向の定常調和加振を受ける場合に、その内容液の動的挙動については3次元速度ポテンシャル理論に従って導かれた厳密解を用いて壁面動水圧を求め、内・外槽タンク容器についてはこれを円筒シェル要素に分割した有限要素法を用いた解析を行って、タンク容器に対する運動エネルギーと歪エネルギーとを求めた後、これにハミルトンの原理を適用することによって、内容液・タンク容器連成系の振動方程式を導いた。つぎに、アクリル樹脂を用いて同心二重円筒タンクの模型を作成し、こ

れを振動台上に固定して、定常調和波入力による加振実験及び各共振点における減衰自由振動実験を行うことによって、振動系の振動数応答曲線及び減衰定数を求めた。最後に、理論に基く数値計算結果と実験によって得られた結果とを比較し2,3の検討を行った。

得られた結果を纏めると以下の通りである。

- (1) 水平方向の調和波による加振を受ける同心二重円筒タンクの動的挙動を、内容液については3次元速度ポテンシャル理論を用い、タンク容器についてはこれを円筒シェル要素に分割した有限要素法を用いることによって、内容液・タンク容器連成系の振動を理論的に解析する方法を示した。
- (2) アクリル樹脂製の同心二重円筒タンク模型を用いて、水深が一定の場合について水平方向の定常調和波加振実験を行い、内・外槽の壁面上に取付けた加速度計及び水圧計によって、タンク容器の加速度及び内容液の壁面動水圧強度を計測して、それらの共振曲線及び一定の加振振動数に対する高さ方向の分布を求め、これを理論解析結果と比較することによって、加振振動数が5~60 Hzの範囲では両者が比較的良好一致することを示した。
- (3) 上記のことから、本論で示した解析法の有用性が示されたといえよう。

付録

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_e} & \frac{2\xi}{l_e} & \frac{3\xi^2}{l_e} \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

$\xi = s/l_e$, l_e : リング要素 e の母線長

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

ここで, $R = R_a, R_b$

$$\mathbf{D} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)h^2}{24} \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

ここで,

E : タンク容器の縦弾性係数

ν : タンク容器のポアソン比

h : タンク容器の厚さ

参考文献

- 1) 岡本光広・宮本明・中野誠・成田幸生: 既設配水池周りの用地を利用した「大谷低区配水池増設工事」の計画, 51回全国水道研究発表会講演集, 2000.5.
- 2) 藤田勝久: 流体を含む二重軸対称かくの振動解析, 日本機械学会論文集 (C編), 51巻 466号, 1985.6.
- 3) 谷順二・拝司裕久: 流体連成片持二重円筒殻の自由振動, 日本機械学会論文集, (C編), 52巻 484号, 1986.12.
- 4) 吉田聖一・三好俊郎: 多重円筒タンクの地震応答解析, 日本機械学会論文集, (C編), 53巻 494号, 1987.8.
- 5) Haroun, M.A. and Housner, G.W.: Dynamic characteristics of liquid storage tanks, ASCE, Vol. 108, No. EM5, 1982.10.
- 6) 例えば, 川股重也: シェル構造解析, 培風館, 1974.

(2004年9月12日受付)