

## 片持ち積層板の自由振動特性に関する研究

Study on characteristics of vibration of laminated composite cantilever plates

森田千尋\*・松田 浩\*\*・崎山 毅\*\*・下川一基\*\*\*・白濱敏行\*\*\*\*・黄 美†  
 Chihiro MORITA, Hiroshi MATSUDA, Takeshi SAKIYAMA, Kazuki SHIMOKAWA,  
 Toshiyuki SHIRAHAMA and Mei HUANG

\*博(工学) 長崎大学助教授 大学院生産科学研究科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

\*\*工博 長崎大学教授 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

\*\*\*長崎大学大学院 生産科学研究科環境システム工学専攻(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

\*\*\*\*長崎大学技術職員 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

†博(工学) 長崎大学助手 工学部構造工学科(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

The objective of this paper is to clarify the characteristics of vibration of laminated composite cantilever plates by analytical and experimental methods.

In analytical study, a discrete method is used. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The characteristic equation of the free vibration is derived by applying the Green function.

In experimental study, the test pieces on which the strain gauges are affixed, are fixed in the fixture and are acoustically excited by a siren. Oscillation frequencies at the maximum output of strain gauges are considered as resonance frequencies. These resonance vibration modes are obtained by forming a hologram on photographic plate, using the time-average method of holographic interferometry.

The vibration frequencies and modes obtained by a discrete method are verified to be in good agreement with the experimental results.

**Key Words :** laminated composite cantilever plates, free vibration problem, a discrete method, Green function, holographic interferometry

## 1. はじめに

繊維強化型複合材料(FRP)は、比強度、比剛性および軽量性に優れており、航空機産業などの分野で発達してきている。この材料は、樹脂と繊維を組み合わせることによって、単独では持ち得なかった性能を得ることができ、組み合わせる種類によって幅広い性能が得られることから、tailor-madeの材料とも言える。土木工学分野においても、プレストレスコンクリート緊張ケーブルやグラウトアンカー、コンクリート補強などへの用途が一般的なものとなりつつあり、さらに積極的な利用方法として、鉄やコンクリートに代わる一次土木構造物材料としての用途が注目されている<sup>1)</sup>。

繊維強化型複合材料の一次土木構造物材料としての適用は、土木構造物の軽量化によるコストダウン、長寿命化による維持管理労力の軽減などの利点が期待できる一方、土木工学分野では経験の少ない異方性材料であること、土木での長期的耐久性データが少ないこと、弾性係数が比較的小さいことなど、解決すべき課題も多い。

繊維強化型積層板の自由振動問題に関する解析的な研究は、厳密解が得られる四辺単純支持された場合を除け

ば、何らかの近似解法によらなければならないが、有限要素法<sup>2)</sup>、伝達マトリックス法<sup>3)</sup>、選点法<sup>4)</sup>、スプライン帯板法<sup>5)</sup>などによる検討が行われている。実験的および解析的な研究は、水澤ら<sup>6)</sup>は周辺自由板の振動実験、音響実験から得られた振動数とスプライン要素法を用いた解析結果と比較しているが、等質・等方性板のものであり、積層板の自由振動特性に関する実験、解析の両面からの研究は、著者らの知る限り見当たらない。

そこで本論文では、まず、グリーン関数を用いた固有値問題の解析手法<sup>7)</sup>を、種々の積層順序および配向角を有する片持ち積層板の自由振動問題に適用し数値解析を行う。さらに、レーザーホログラフィ干渉法<sup>8),9)</sup>を用いた振動実験により、振動数および振動モードを求め、本解析結果と比較し、積層順序および配向角などのパラメータが積層板の振動数および振動モードに及ぼす影響を調べ、片持ち積層板の自由振動特性を明らかにすることを目的としている。

## 2. 解析手法

## 2.1 積層板の基礎微分方程式

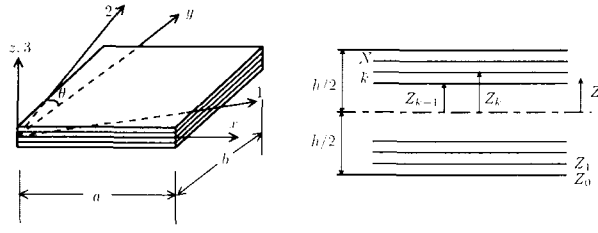


図-1 積層板

図-1に示す積層板は、 $N$ 層のラミナから成り、各ラミナは均質な直交異方性材料とし、密度および厚さは同じであり、それぞれ完全に密着しているものと仮定する。図-1に示すように、材料の直交異方性主軸を(1,2,3)で表わし、主軸1と2はそれぞれ $x$ 軸と $y$ 軸に対し傾き $\theta$ (ブライ配向角)だけ傾いているものとする。

板厚中央面に対して面内変位成分を $u, v$ 、および垂直方向の変位成分を $w$ とし、面内力を $N_{xy}, N_y$ および $N_x$ 、せん断力を $Q_y, Q_x$ 、ねじりモーメントを $M_{xy}$ 、曲げモーメントを $M_y, M_x$ 、たわみ角を $\theta_y, \theta_x$ とすれば、横荷重 $q_z$ を受ける積層板の曲げに関する基礎微分方程式は、一次せん断変形理論に基づいて、次の連立偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (5)$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$M_y = B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$M_{xy} = B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$Q_y = \kappa A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (9)$$

$$Q_x = \kappa A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (10)$$

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$+ B_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$N_y = A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$N_{xy} = A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (13)$$

ここで、 $q_z = q_z(x, y)$ : 垂直方向荷重強度、 $\kappa = 5/6$ : せん断修正係数であり、 $A_{ij}$ : 面内剛性、 $B_{ij}$ : カップリング剛性、 $D_{ij}$ : 曲げ剛性は、積層順序、配向角などによって変化する積層板特有のもので次式で与えられる。

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

なお、 $\bar{Q}_{ij}$ は付録Iに示すとおりである。

## 2.2 離散化グリーン関数

本論文においては、グリーン関数を用いた固有値問題の解析手法を提案する。

まず、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、積層板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数を求める。さらに、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これに数値積分を適用して固有値解析を行う。

次の無次元量  $X_1 \sim X_{13}$

$$X_1 = \frac{a^2 Q_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_2 = \frac{a^2 Q_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$X_3 = \frac{a M_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_4 = \frac{a M_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$X_5 = \frac{a M_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x,$$

$$X_8 = \frac{w}{a}, \quad X_9 = \frac{v}{a}, \quad X_{10} = \frac{u}{a},$$

$$X_{11} = \frac{a^2 N_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad X_{12} = \frac{a^2 N_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$X_{13} = \frac{a^2 N_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

および、 $x, y$ に関して、 $x = a\eta, y = b\zeta$ なる無次元量 $\eta, \zeta$ を導入すると、無次元化された離散化グリーン関数は、任意の点 $x = x_0, y = y_0$ ( $x_0/a = \eta_0, y_0/b = \zeta_0$ )に作用する単位荷重 $P_1$ により、次のように表わされる。

$$X_8(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_1 a^2}{D_0} W(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (14)$$

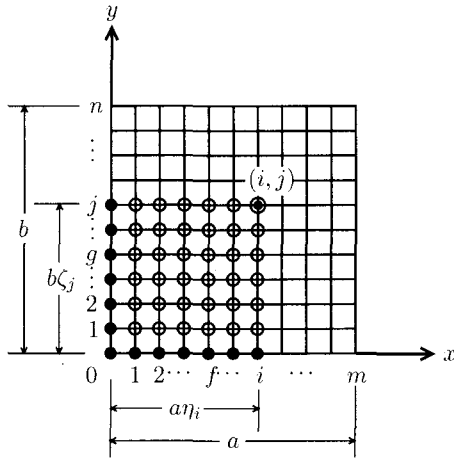


図-2 積層板の離散点

ここで、式(14)は、任意の点 $(\eta_0, \zeta_0)$ に単位荷重 $P_1$ が作用した場合 $(q_z(\eta, \zeta) = P_1\delta(\eta - \eta_0)\delta(\zeta - \zeta_0))$ の垂直方向変位である。

無次元化されたグリーン関数を求めるため、式(1)～(13)を無次元化すると次のように書き表わされる。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ F_{1ts} \frac{\partial X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} X_s \right\} + \frac{P_1 a^2}{D_0} \delta_{t3} \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0) = 0 \quad (15)$$

( $t = 1 \sim 13$ )

ここで、 $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}$ は断面力および変形にかかる無次元化された係数であり、 $\delta(\eta - \eta_0), \delta(\zeta - \zeta_0)$ :ディラックのデルタ関数、 $\delta_{t3}$ :クロネッカーのデルタである。

図-2に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ $m, n$ 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点 $(i, j)$ に関連する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを $[i, j]$ と表記することとする。また、●印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別する。

基礎微分方程式(15)における $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}$ が変数係数であることに注意し、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、板の縦横の等分割線の交点に関する離散解は、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{k=0}^i a_{pijkd} X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} X_{s0l} \right\} + q_{pij} \quad (16)$$

( $r = 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, s = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13$ )

式(16)は板の離散表示された離散解である。この式に含まれる境界従属点の諸量 $X_{rk0}, X_{s0l}$ はいわゆる

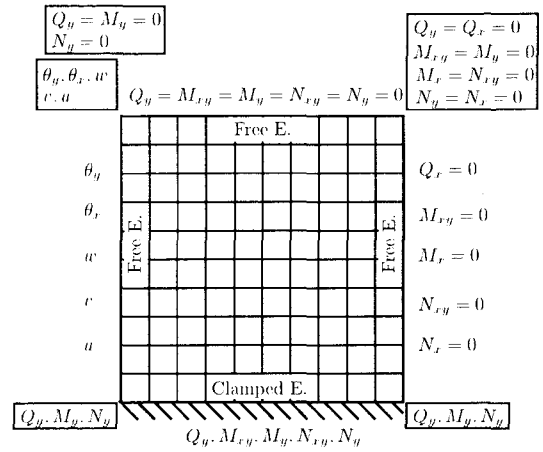


図-3 積分定数と境界条件

積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 $X_{pij}$ を、この領域の境界従属点における諸量 $X_{rk0}, X_{s0l}$ に関係づける要素 $a_{pijkd}, b_{pijld}$ は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散解の誘導過程の詳細は、文献(10)を参照されたい。

### 2.3 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1)～(13)の近似解(16)に含まれる積分定数 $X_{rk0}, X_{s0l}$ は、具体的には、それぞれ板の $y = 0, x = 0$ なる辺上における断面力および変形を表わす。 $y = 0$ において $Q_x, M_x, N_x$ 、 $x = 0$ において $Q_y, M_y, N_y$ は積分定数として存在しないため、各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、板の境界条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は、はじめから既知である。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x = a, y = b$ の各辺の境界条件によって決定される。

図-3に、片持ち板の場合の積分定数と境界条件を示す。隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において、2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められ、□で囲まれている。

### 2.4 固有振動数方程式

積層板の自由振動を支配する運動方程式は、式(3)の荷重強度を単位面積当りの慣性力とすればよく、次式となる。

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = -\rho h \omega^2 \bar{w} \quad (17)$$

ここで、 $\rho$ : 積層板の材料密度、 $\omega$ : 固有円振動数であり、 $\bar{Q}_x, \dots, \bar{N}_x$ は前述の単位荷重を受ける場合の断面力および変形と区別している。

同様に次の無次元量  $Y_1 \sim Y_{13}$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{a^2 \bar{Q}_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & Y_2 &= \frac{a^2 \bar{Q}_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ Y_3 &= \frac{a \bar{M}_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & Y_4 &= \frac{a \bar{M}_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ Y_5 &= \frac{a \bar{M}_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & Y_6 &= \bar{\theta}_y, & Y_7 &= \bar{\theta}_x, \\ Y_8 &= \frac{\bar{w}}{a}, & Y_9 &= \frac{\bar{v}}{a}, & Y_{10} &= \frac{\bar{u}}{a}, \\ Y_{11} &= \frac{a^2 \bar{N}_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & Y_{12} &= \frac{a^2 \bar{N}_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ Y_{13} &= \frac{a^2 \bar{N}_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \end{aligned}$$

を導入すると、積層板の自由振動を支配する偏微分方程式は、次のように表わされる。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ G_{1ts} \frac{\partial Y_s}{\partial \zeta} + G_{2ts} \frac{\partial Y_s}{\partial \eta} + G_{3ts} Y_s \right\} = 0 \quad (18)$$

$$(t = 1 \sim 13)$$

まず、式 (17) を無次元化し両辺に  $Y_8$  を乗じ、全領域において面積分を行い、2重積分することにより順次展開する。周辺の境界条件を考慮するといずれの境界条件の場合も整理され、次式となる。

$$Y_8(\eta_0, \zeta_0) = \mu \lambda^4 \int_0^1 \int_0^1 W(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_8(\eta, \zeta) h^* d\eta d\zeta \quad (19)$$

ここで、

$$\mu = \frac{b}{a}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0}, \quad h^* = \frac{h(\eta, \zeta)}{h_0}$$

である。

次に、式 (19) に等間隔の数値積分を適用すると次式が求まる。

$$Y_{8fg} = \mu \lambda^4 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{mi} \beta_{nj} W_{f g i j} Y_{8ij} h^* \quad (20)$$

$$(f = 0 \sim m, \quad g = 0 \sim n)$$

ここで、 $\beta_{mi}, \beta_{nj}$  は数値積分における重み係数である。

式 (20) を整理すると積層板の固有振動数方程式は次式となる。

$$|\bar{W} - \Lambda| = 0 \quad (21)$$

ここで、

$$[\bar{W}] = \begin{bmatrix} B_{00} W_{0000} & B_{01} W_{0001} & \cdots & B_{mn} W_{00mn} \\ B_{00} W_{0100} & B_{01} W_{0101} & \cdots & B_{mn} W_{01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00} W_{mn00} & B_{01} W_{mn01} & \cdots & B_{mn} W_{mnmn} \end{bmatrix},$$

$$B_{ij} = \beta_{mi} \beta_{nj},$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1/(\mu \lambda^4 h_{00}^*) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(\mu \lambda^4 h_{01}^*) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(\mu \lambda^4 h_{mn}^*) \end{bmatrix}$$

である。

### 3. ホログラフィ干渉法による計測

ホログラフィ干渉法は、粗面からの反射波面の振幅位相分布を記録する計測法である<sup>8),9)</sup>。粗面物体の変形前の状態と変形後の状態を同じホログラムに記録し、これを同時に再生すると、記録された変形前後の2つの波面間に干渉が起こり、物体変形の情報を持った干渉縞が得られる。また、振動している物体の状態を一定時間記録すると、再生像には振動の振幅分布に対応した干渉縞が得られる。本研究では、対象物の固有モード図を得る手法として、このホログラフィ干渉計測装置を採用した。

レーザーホログラフィの実験装置を写真-1、装置概要を図-4に示す。

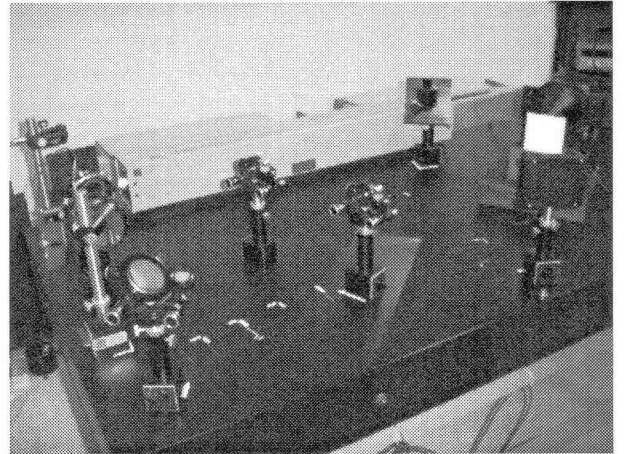


写真-1 レーザーホログラフィ装置

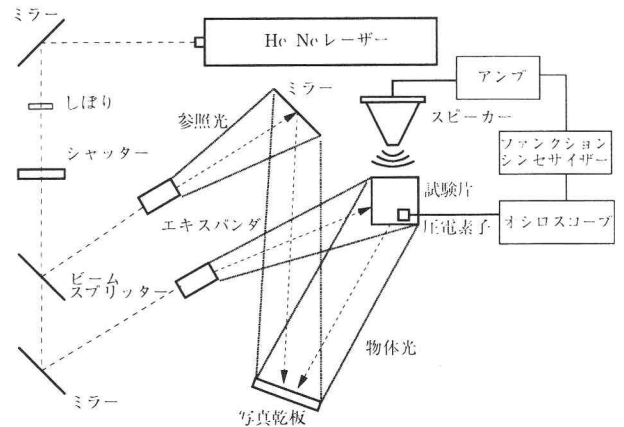


図-4 レーザーホログラフィ装置概要

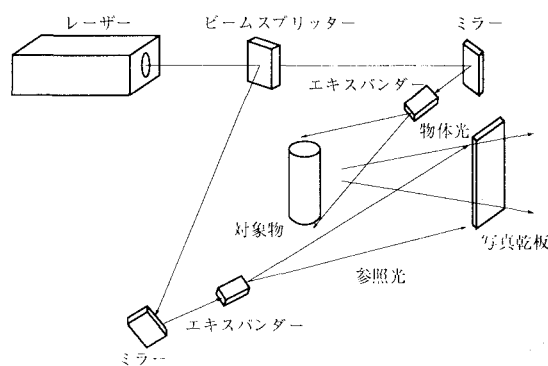


図-5 ホログラムの記録

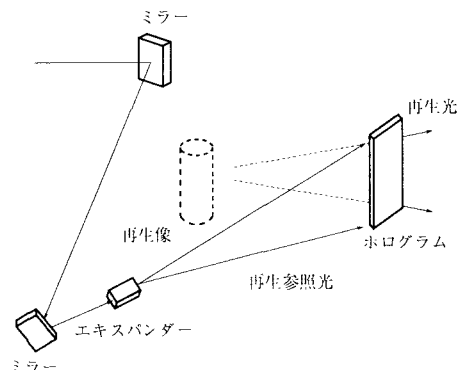


図-6 ホログラムの再生

### 3.1 ホログラフィ干渉の原理

ホログラフィは、物体からの光の波面を記録し再生する手法である。ホログラムの記録に使用する感光材料は、光の強度のみを記録するため、物体からの光を直接感光材料に記録するのでは位相の情報が損なわれる。そのため、レーザーのようなコヒーレント（干渉性）の高い光源を用い、光を2方向に分割し互いに干渉させ、発生する干渉縞の強度分布を感光材料に記録する。

#### (1) ホログラムの記録

光源から発信されたレーザー光をビームスプリッターにより二分割し、それぞれをビームエキスパンダーにより光の幅を拡張する。一方を物体光として物体を経由した後に記録材料に照射する。もう一方を参照光として、直接記録材料に照射する。ホログラムには二つの光の位相差が記録されるので、光の反射によって、物体光と参照光の位相がずれないようにする必要がある。

図-5において、物体により回折した複素振幅の位相を持つ物体光とレーザー光の複素振幅の位相を持つ参照光がそれぞれ記録材料面上に到達する。それにより物体光と参照光が位相の重ね合わせによって記録材料に干渉縞の強度分布として記録される。干渉縞は極めて細い周期構造をしており回折格子の作用をする。

#### (2) ホログラムの再生

ホログラムとして記録された物体の像を再び再生させるためには、参照光と同一波長の光をホログラムに照射する（図-6参照）。この光を再生照明光と呼ぶ。ホログラムは細かい干渉縞を記録した回折格子なため、これに光を照射すればそのまま直進する光の他に、別の方向に回折して進む光が生じる。この回折光は再生光と呼ばれ、記録した物体光とまったく同じ形をしている。

### 3.2 実験方法概要

本実験は、ホログラフィ干渉計測の時間平均法を用いて撮影を行った。時間平均法とは変形前と変形後の物体光を、同じ参照光で干渉させることにより記録できる変位分布を利用したものであり、振動の周期に比べ十分長い時間にわたって露光させる。物体光は周期的に変化す

るので、記録材料には変形前と変形後の変位分布が記録され、干渉縞を得ることができる。

振動実験を行うにあたり、治具に固定された試験片の上部後方より、スピーカーの音圧によって加振させた。試験片に貼付したピエゾ・フィルム (FDT-028K) から得たひずみの最大値をオシロスコープで検出し、その時の振動数を試験片の固有振動数としている。

### 3.3 試験片

試験片の寸法は、アルミ合金板とアングルプライ（配向角を $\theta$ とすれば、 $+\theta$ と $-\theta$ の組み合わせから成る）積層板の場合は、高さ175mm、幅90mm、厚さ1mm、クロスプライ（ $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ の組み合わせから成る）積層板の場合は、高さ165mm、幅80mm、厚さ1mmであり、図-7に示すようにどちらも下端85mmの箇所に8点の開孔を設け、ボルトにより治具に完全固定する。

実験に使用したアルミ合金、CFRP(Carbon Fiber Reinforced Plastic、以下CFRPと略記)試験片を写真-2に、材料特性を表-1にそれぞれ示す。なお、CFRP試験片には、東邦テナックス(株)製の材料プリプレグ(Q-1111, CFAW:150g/m<sup>2</sup>, RC:30%)を使用している。

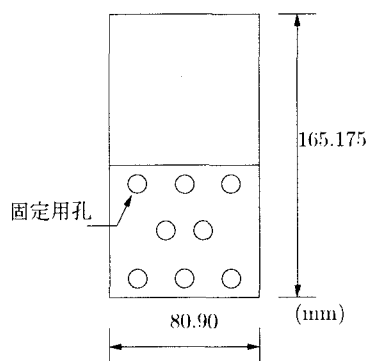
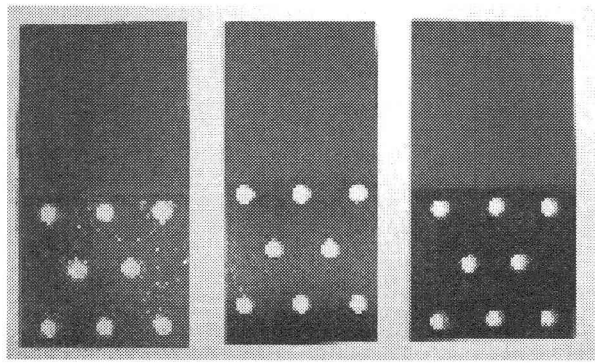


図-7 試験片寸法



アルミ合金板 クロスプライ積層板 アングルプライ積層板

写真-2 アルミ合金板および積層板の試験片

表-1 試験片の材料特性

|       | $E_L$ (GPa) | $E_T$ (GPa) | $G_{LT}$ (GPa) | $\nu_{LT}$ | $\rho$ (kN/m <sup>3</sup> ) |
|-------|-------------|-------------|----------------|------------|-----------------------------|
| アルミ合金 | 69.6        | 69.6        | 26.1           | 0.33       | 26.5                        |
| CFRP  | 149         | 9.2         | 4.8            | 0.3        | 15.8                        |

## 4. 実験および解析結果

### 4.1 アルミ合金板の結果

はじめに、本解析法の精度およびホログラフィ干渉計測の実用性を検討するために、等質・等方性の材料である片持ちアルミ合金板の振動解析および実験を行った。板の縦横の分割数  $m = n = 6, 8, 10$  とした場合の6次までの振動数および Richardson の補外公式によって求めた推定収束値 (8 分割と 10 分割)、Claassen による解<sup>11)</sup> および実験値を表-2に示す。

本解析法による数値解析結果は、分割数の増加とともに一様に収束し、比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分の精度をもつ解が得られている。さらに Richardson の補外公式による推定収束値は、比較解に極めて近づくことが示されている。なお、以後の解析結果では推定収束値 (8 分割と 10 分割) を用いることとする。

実験結果と解析結果を比較すると、3 次の振動数においては多少の差があるものの、それ以外の振動数はせい

表-2 片持ちアルミ合金板の振動数

| $m = n$                 | $f$ (Hz) |       |       |       |       |      |
|-------------------------|----------|-------|-------|-------|-------|------|
|                         | 1st      | 2nd   | 3rd   | 4th   | 5th   | 6th  |
| 6                       | 106.5    | 260.3 | 713.1 | 909.2 | 1027  | 1837 |
| 8                       | 106.1    | 257.8 | 681.4 | 870.9 | 982.4 | 1743 |
| 10                      | 105.9    | 256.5 | 667.4 | 854.1 | 962.8 | 1701 |
| Ex. v.*                 | 105.5    | 254.2 | 642.5 | 824.2 | 928.0 | 1626 |
| Claassen <sup>11)</sup> | 105.6    | 255.2 | 644.1 | 826.5 | 932.2 | 1606 |
| Experiment              | 100.0    | 245.0 | 580.0 | 815.0 | 890.0 | 1520 |

\* Ex. v. Extrapolated value [8 10].

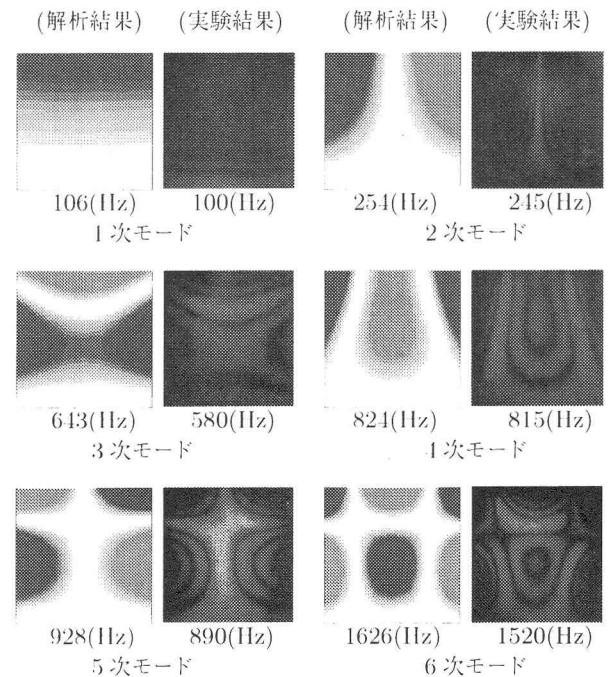


図-8 アルミ合金板の振動モード

ぜい数%の差である。これは、実験においては境界条件が完全に固定とはなっていないために、この程度の差が出たものと考えられ、実験上の誤差もあることを考慮すると、妥当な結果が得られていると考えられる。

図-8には、6次までの振動数と振動モードを示している。実験と解析では同様な振動モードが得られており、レーザーホログラフィ干渉計測による実験結果は、十分妥当であると考えられる。

### 4.2 CFRP クロスプライ積層板の結果

つづいて、片持ち積層板の自由振動特性に及ぼす積層順序の影響を明らかにするために、CFRP クロスプライ積層板の振動解析および実験を行った。用いた積層板は全て8層からなり、 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_2$  (配向角  $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ$  の積層順序を2層重ねた積層構造)、 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]_2$  および  $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]_2$  の3種類のクロスプライ積層板である。

表-3には、6次までの振動数を示している。いずれの積層順序においても、実験結果と解析結果はほぼ一致した値を得ており、アルミ合金板の場合と同じように、実験による振動数は、全般的に解析結果を若干下回る結果となっている。

振動モードにおいても、実験と解析では同様な結果が得られている。1次、2次および6次のモードは、いずれの積層順序においても同様なモードであるが、3次～5次のモードは、図-9に示すように積層順序によって出現順序が変わっている。 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_2$  にすると、等質・等方性のアルミ合金板の振動モードと同じ出現順序であるが、 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]_2$  とすることで、4次と5次の出現順序が入れ替わり、 $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]_2$

表-3 CFRP クロスプライ積層板の振動数

| 積層順序                                    | 次数  | 実験 (Hz) | 解析 (Hz) |
|-----------------------------------------|-----|---------|---------|
| $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_2$ | 1st | 172     | 174     |
|                                         | 2nd | 248     | 249     |
|                                         | 3rd | 1054    | 1086    |
|                                         | 4th | 1098    | 1170    |
|                                         | 5th | 1229    | 1184    |
|                                         | 6th | 1838    | 1828    |
| $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]_2$ | 1st | 154     | 162     |
|                                         | 2nd | 242     | 239     |
|                                         | 3rd | 942     | 1009    |
|                                         | 4th | 1063    | 1117    |
|                                         | 5th | 1266    | 1271    |
|                                         | 6th | 1841    | 1855    |
| $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]_2$ | 1st | 185     | 191     |
|                                         | 2nd | 258     | 261     |
|                                         | 3rd | 984     | 1101    |
|                                         | 4th | 1162    | 1194    |
|                                         | 5th | 1248    | 1284    |
|                                         | 6th | 1798    | 1853    |

表-4 CFRP アングルプライ積層板の振動数

| 積層順序                     | 次数  | 実験 (Hz) | 解析 (Hz) |
|--------------------------|-----|---------|---------|
| $[30^\circ/-30^\circ]_s$ | 1st | 61.7    | 60.0    |
|                          | 2nd | 245     | 248     |
|                          | 3rd | 369     | 362     |
|                          | 4th | 737     | 733     |
|                          | 5th | 979     | 943     |
|                          | 6th | 1211    | 1203    |
| $[45^\circ/-45^\circ]_s$ | 1st | 88.1    | 88.1    |
|                          | 2nd | 293     | 295     |
|                          | 3rd | 489     | 513     |
|                          | 4th | 777     | 764     |
|                          | 5th | 1035    | 1009    |
|                          | 6th | 1539    | 1542    |
| $[60^\circ/-60^\circ]_s$ | 1st | 126     | 128     |
|                          | 2nd | 299     | 296     |
|                          | 3rd | 632     | 619     |
|                          | 4th | 789     | 824     |
|                          | 5th | 1079    | 1063    |
|                          | 6th | 1389    | 1310    |

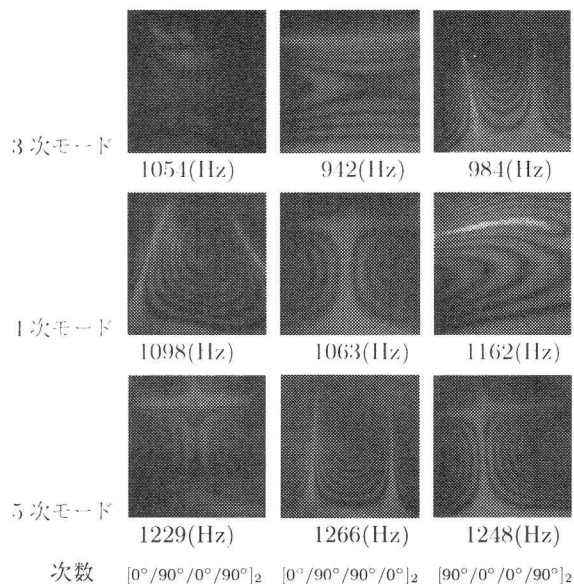


図-9 CFRP 積層板の振動モード

とすることで、3次と4次の出現順序が入れ替わってくる。これは、これら3次～5次の振動数にはあまり差がなく、積層順序を変えることによって、出現順序が替わりやすい積層構造であると考えられる。

#### 4.3 CFRP アングルプライ積層板の結果

さらに、片持ち積層板の自由振動特性に及ぼす配向角の影響を明らかにするために、CFRP アングルプライ積層板の振動解析および実験を行った。用いた積層板は全て8層からなり、 $[\theta/-\theta]_s$  (添字  $s$  は対称積層のことである。)とし、 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の5種類の対称アングルプライ積層板である。

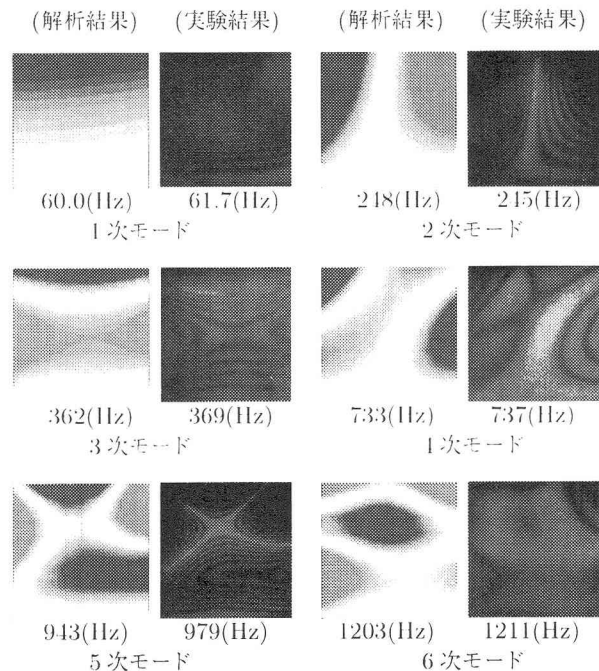
図-10 アングルプライ積層板 ( $\theta = 30^\circ$ ) の振動モード

表-4には、 $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の場合の6次までの振動数を示している。いずれの配向角においても、実験結果と解析結果はほぼ一致した値を得ている。

図-10および図-11には、それぞれ  $\theta = 30^\circ$  および  $\theta = 60^\circ$  の場合の6次までの振動数と振動モードを示している。アングルプライ積層板では、繊維方向に角度があるため、左右対称の振動モードは出現せず、繊維方向に影響された振動モードが出現している。このような積層構造においても、ホログラフィ干渉計測は、解析結果と一致した振動モードを示している。

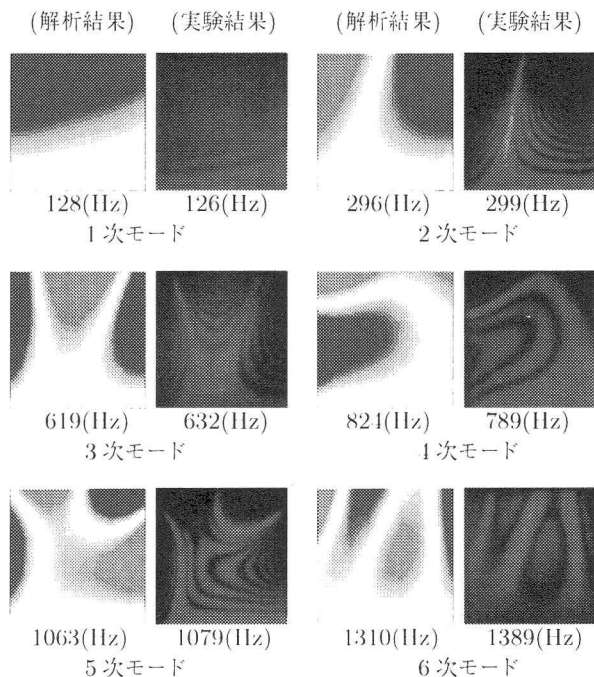


図-11 アンギュラプライ積層板 ( $\theta = 60^\circ$ ) の振動モード

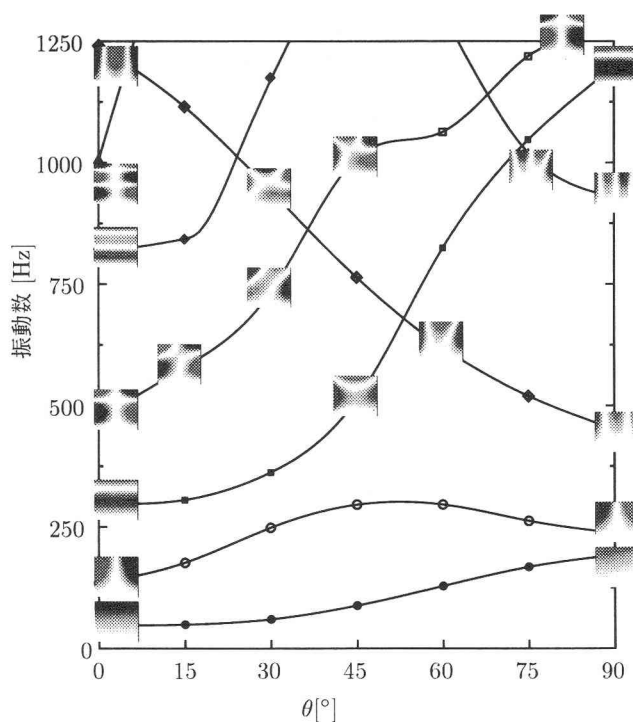


図-12 配向角の影響

図-12に、 $\theta$ を $15^\circ$ きざみで解析した結果を示す。同図より、配向角を変化させることにより、1次、2次の振動モードに変化は見られないが、 $0^\circ$ で3次であったモードが $90^\circ$ では5次で現われ、逆に、 $0^\circ$ で7次であったモードが $90^\circ$ では3次で現われるように、振動モードは配向角に大きく影響される。

## 5. まとめ

本研究では、片持ち積層板の自由振動特性を明らかにするために、まず、グリーン関数を用いた固有値解析法を片持ち積層板に適用した。本解析法は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、積層板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数が得られ、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これに数値積分を適用した固有値解析法である。本解析法を用いて、積層順序および配向角をパラメータとした片持ち積層板の自由振動解析を行った。

さらに、レーザーホログラフィ干渉法を用いた振動実験により、振動数および振動モードを求め、本解析結果と比較し、積層順序および配向角などのパラメータが積層板の自由振動特性に及ぼす影響を調べた。

得られた結果は次のとおりである。

1) 本解析法による数値解は、一様に収束性を持つこと、また、8~10分割程度の比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分の精度をもつ解が得られていることなどが確認された。

2) ホログラフィ干渉法を用いた振動実験では、振動数においては、解析結果と比べて全般的に若干下回った結果であったが、ほとんどが数%の差であった。振動モードにおいては、一致した結果が得られた。

3) 積層順序および配向角は、1次、2次の振動モードにはあまり影響はないが、3次以降の振動モードの出現順序に影響を与える。

以上のように、積層順序および配向角を変えることにより、振動モードの発現順序を変えることができるため、特定の振動モードを抑えることが可能である。このことを利用して、例えば超長大橋における、橋梁桁断面の流線形化と同様に、上部構造部材にテーリングできる複合材料を用いて、不利な振動を受ける箇所に最適な積層順序および配向角を選ぶことにより、構造物の耐震安定性などを高めることができるものと思われる。

なお今回は、片持ち積層板に限った解析および実験であったが、本解析手法は、種々の境界条件にも適用できることを確認している。しかしながら、レーザーホログラフィ干渉計測装置は、防振台上での実験であり、現状では片持ち積層板しか取り扱えない。今後改良を行っていく予定である。

最後に、本研究を進めるに際して、数値計算および実験を行って戴いた当大学院生、増山貴仁君、大学4年生、金山綾子さん、吉村征宜君に謝意を表わします。

## 付録 I

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4, \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4, \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3, \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s, \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4), \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})cs, \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2, \quad c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta, \\
Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad Q_{22} = E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\
Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad Q_{66} = G_{12}, \\
Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}
\end{aligned}$$

#### 参考文献

- 1) 建設省土木研究所：繊維強化プラスチックの土木構造材料への適用に関する共同研究報告書 (I) ―一次構造材料としての FRP の適用事例調査―，1998.
- 2) Reddy, J.N.：Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method, Journal of Sound and Vibration, Vol.66, pp.565-576, 1979.
- 3) Khdeir, A.A.：Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol.122, pp.377-388, 1988.
- 4) 芳村 仁・三上 隆・朴 勝振：逆対称アングル・プライ積層板の自由振動解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.911-919, 1991.
- 5) 水澤富作・鬼頭博史：高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いた積層複合板の振動解析について, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.71-83, 1994.
- 6) 水澤富作・近藤八重・木村健一・名木野晴暢：平板の振動モードの縮退と連成挙動について, 応用力学論文集, Vol.6, pp.311-320, 2003.
- 7) 森田千尋・松田浩・崎山毅・佐治孝記・浦田英知・黄美：クロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題に関する一解析法, 構造工学論文集, Vol.44A, pp.11-20, 1998.
- 8) 久保田敏弘：ホログラフィ入門, 朝倉書店, 1995.
- 9) Paul Smigielski 著, 辻内順平 訳：ホログラフィによる計測と検査―工業で使われるホログラフィー―, 新技術コミュニケーションズ, 1999.
- 10) 崎山 毅・松田 浩：変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第 338 号, pp.21-28, 1983.
- 11) R. W. Claassen and C. J. Thorne：Vibration of a rectangular cantilever plates, J. Aerospace Sci., Vol.29, No.11, pp.1300-1305, 1962.

(2004 年 9 月 17 日 受付)