

3次元 spline 帯板法を用いた直交異方性厚板の応力解析

Stress analysis of orthotropic thick plates using the three-dimensional spline strip method

名木野 晴暢* 水澤 富作** 三上 隆***

Harunobu NAGINO, Tomisaku MIZUSAWA, Takashi MIKAMI

*北海道大学大学院 博士後期課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

**大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

***北海道大学大学院 教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

This paper presents the three-dimensional stress analysis of orthotropic thick plates using the three-dimensional spline strip method based on the theory of elasticity. The orthotropic plates are made of Aragonite crystal and sitka spruce. To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other exact and numerical methods based on the theory of elasticity. Good convergence and accuracy are obtained. The effects of thickness/width ratio, aspect ratio and boundary conditions on normal stress distributions of Aragonite crystal plates and sitka spruce plates are investigated. Moreover, the difference of weak orthotropic and strong orthotropic properties given to the characteristics of stress distributions are also shown.

Key Words: three-dimensional stress analysis, three-dimensional spline strip method, orthotropic thick plates, theory of elasticity

1. まえがき

近年, 構造物の大型化, 重量化が進む中で, 比較的板厚の大きい平板要素が構造要素として用いられてきた. 最近では, 構造物の軽量化等を目的とし, 補剛板, PC床版や繊維強化型積層板のような, 比較的異方性の大きな平板構造が用いられている. 異方性構造は, 設計自由度を高められると考えられることから, 最適設計やコスト削減の観点からも, 今後の土木構造物への応用が期待される.

直交異方性板の解析では, 面外剛性に比べて面内剛性が非常に大きいような異方性を示すと, 比較的薄い板でも面外せん断変形の影響が無視できなくなる. また, 材料学的な異方性も考慮しなければならない. 従来, 等方性および直交異方性厚板の応力解析には, 面外せん断変形の影響を考慮した種々の厚板理論が用いられ, 多くの研究報告¹⁾⁹⁾がなされている. せん断変形板理論は, 3次元弾性論の厚さ方向の影響を近似的に考慮した近似理論であるが, 等方性板と比較して, 異方性板の適用限界が必ずしも明らかでない. また, 板厚の増大にともない厚さ方向の応力やひずみ成分の影響が無視できなくなるので, より正確に力学的な挙動を把握するためには, 3次元弾性論に基づかなければならない.

元弾性論に基づかなければならない.

厚板の3次元応力解析には, ソリッド要素を用いた有限要素法が適用されているが, 未知数の急激な増大により, 計算時間や計算機の容量に制限を受けるので, 少ない未知数で, 高い解析精度が得られる解析手法の開発は, 数値解析上重要な課題である.

等方性厚板を対象にした3次元応力解析¹⁰⁾²⁵⁾は, これまでも数多くの報告がなされているが, 直交異方性厚板の3次元応力解析は, 有限要素法を適用した解析を除くと, 非常に少ないように思われる.

直交異方性厚板の3次元応力解析に関する研究として, Srinivas・Rao²⁶⁾は, 3次元弾性論に基づき2方向にFourier級数展開した無限級数展開法を用いて, 周囲単純支持された比較的異方性の小さなアラゴナイトクリスタル長方形板の面内の応力とせん断応力の厳密解を示している. Teo・Liew²⁷⁾は, Differential Quadrature法(DQ法)を用いて単純支持面および固定面を有するアラゴナイトクリスタル長方形厚板の3次元応力解析を行っているが, 解の収束性に問題点が見受けられ, 自由面が導入されていない. 一般に, DQ法では, 高階の導関数で定義される自由の境界条件を導入すると解析精度が悪化することが知られている.

既往の研究では、解析手法やその解析精度に重点が置かれており、直交異方性板の応力の板厚方向分布特性に与える板厚比、辺長比、境界条件や異方性の大きさの相違に関する影響については、さほど詳細に検討されていないように思われる。

名木野・水澤²⁹⁾は、水澤・高木²⁵⁾²⁸⁾の提案した一方向の変位関数に固有関数を採用し、他の2方向に B-spline 関数を仮定した3次元 spline 帯板法(spline prism 法と spline layer 法)を用いて直交異方性厚板の振動解析を行い、信頼性の高い解析結果を得ている。

本論文では、3次元直交異方性弾性論に基づく半数値解析法である3次元 spline 帯板法(spline prism 法)²⁹⁾を用いて、相対する2面がダイヤフラム型の単純支持され、他の2面で任意の境界条件を持つ板上面に等分布満載荷重が載荷された直交異方性厚板の3次元応力解析を行い、解の収束性と精度比較について検討を行っている。また、異方性の小さい厚板と異方性の大きな厚板の応力の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響について検討し、さらに板上下面での応力に与える板厚比、辺長比や境界条件の影響についても明らかにしている。

2. 3次元 spline 帯板要素モデルの定式化

3次元弾性論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1に示すような3次元 spline 帯板要素モデル(spline prism 要素モデル)を導く。3次元 spline 帯板法は、2方向(x, z)の変位には B-spline 関数を仮定し、長手方向(y)の変位を Fourier 級数展開し、固有関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。この $k-1$ 次(k 階)の B-spline 関数は、 $k-2$ 階までの導関数の連続性が保証された滑らかな関数であり、spline 次数($k-1$)を高めることによって、高次の3次元 spline 帯板要素モデルが容易に導ける。

定式化にあたり、以下のような解析仮定を設ける。

- (1) 微小変形を仮定する。
- (2) 厚板は直交異方性、線形弾性であると仮定する。
- (3) 長方形厚板の板厚は、一定であると仮定する。
- (4) η 軸に垂直な相対する2面 ($\xi\zeta$ 面, $\eta=0,1$) は、ダイヤフラムタイプの単純支持されていると仮定する。

また、定式化には、次式で表される無次元直交座標(ξ, η, ζ)を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (1)$$

ここで、 a は厚板の幅、 b は長さ、 h は厚さである。

3次元 spline 帯板要素で仮定される ξ, η, ζ 方向の変位 U, V, W は、それぞれ、相対する $\xi\zeta$ 面がダイヤフラムタイプの単純支持されていると仮定すれば次式で表される。

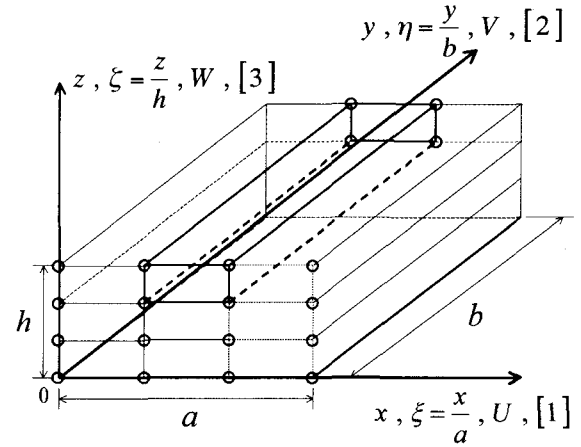


図-1 直交異方性厚板と無次元直交座標系およびマテリアル座標系

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^r S_x(\xi, \zeta) \cdot Y_l(\eta) \\ V(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^r S_y(\xi, \zeta) \cdot \bar{Y}_l(\eta) \\ W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^r S_z(\xi, \zeta) \cdot Y_l(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $S_\psi(\xi, \zeta)$ ($\psi = x, y, z$) は spline 関数を用いて、式(3)で表される。また、 $Y_l(\eta)$ と $\bar{Y}_l(\eta)$ は、それぞれ与えられた境界条件を満足した固有関数であり、 r は固有関数の級数展開の項数である。

$$\left. \begin{aligned} S_x(\xi, \zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} A_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) \\ &= [N]_{mn} \{ \delta_A \}_l \\ S_y(\xi, \zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} B_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) \\ &= [N]_{mn} \{ \delta_B \}_l \\ S_z(\xi, \zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} C_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) \\ &= [N]_{mn} \{ \delta_C \}_l \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} は未定係数であり、 $N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\zeta)$ は、 $k-1$ 次の正規化された B-spline 関数である。また、 $[N]_{mn}$ は、

$$[N]_{mn} = \begin{bmatrix} N_{1,k}(\xi) \cdot N_{1,k}(\zeta), N_{1,k}(\xi) \cdot N_{2,k}(\zeta), \\ \dots, N_{i_x,k}(\xi) \cdot N_{i_z,k}(\zeta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり、未定係数ベクトルは、次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\delta_A\}_l = \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{i_x i_z}\}_l^T \\ \{\delta_B\}_l = \{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{i_x i_z}\}_l^T \\ \{\delta_C\}_l = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{i_x i_z}\}_l^T \end{array} \right\} \quad (5)$$

ここで, $i_x = k-1+M_x$, $i_z = k-1+M_z$ であり, M_x と M_z は, それぞれ x と z 方向の帯板要素の分割数, $k-1$ は spline 次数である.

式(2)は, 次式のように表わすことができる.

$$\{d\} = \sum_{l=1}^r [S]_{mn}^l \{\Delta\}_l \quad (6)$$

ここで, $\{d\} = \{U, V, W\}^T$,
 $\{\Delta\}_l = \{\{\delta_A\}_l, \{\delta_B\}_l, \{\delta_C\}_l\}^T$,

$$[S]_{mn}^l = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Y_l & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} \bar{Y}_l & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} Y_l \end{bmatrix} \quad (7)$$

である.

3次元弾性論で定義される垂直ひずみおよびせん断ひずみを無次元直交座標で表せば, 次式で与えられる.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/a)(\partial U / \partial \xi) \\ (1/b)(\partial V / \partial \eta) \\ (1/h)(\partial W / \partial \zeta) \\ (1/b)(\partial U / \partial \eta) + (1/a)(\partial V / \partial \xi) \\ (1/h)(\partial V / \partial \zeta) + (1/b)(\partial W / \partial \eta) \\ (1/a)(\partial W / \partial \xi) + (1/h)(\partial U / \partial \zeta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

これをマトリックス表示すると,

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=1}^r [B]_{mn}^l \{\Delta\}_l \quad (9)$$

で表される.

ここで, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$,

$[B]_{mn}^l$ は, ひずみマトリックスであり, 次式で表される.

$$[B]_{mn}^l = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Y_l & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} N_{m,k} N_{n,k} \dot{\bar{Y}}_l & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} N_{m,k} \dot{N}_{n,k} Y_l \\ \frac{1}{b} N_{m,k} N_{n,k} \dot{Y}_l & \frac{1}{a} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \bar{Y}_l & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} N_{m,k} \dot{N}_{n,k} \bar{Y}_l & \frac{1}{b} N_{m,k} N_{n,k} \dot{Y}_l \\ \frac{1}{h} N_{m,k} \dot{N}_{n,k} Y_l & 0 & \frac{1}{a} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Y_l \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし, $N_{m,k} = N_{m,k}(\xi)$, $N_{n,k} = N_{n,k}(\zeta)$,

$Y_l = Y_l(\eta)$, $\bar{Y}_l = \bar{Y}_l(\eta)$, $\dot{N}_{m,k} = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$,

$\dot{N}_{n,k} = \partial N_{n,k}(\zeta) / \partial \zeta$, $\dot{Y}_l = \partial Y_l(\eta) / \partial \eta$,

$\dot{\bar{Y}}_l = \partial \bar{Y}_l(\eta) / \partial \eta$ である.

3次元弾性体の構成式は, 次式で与えられる.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (11)$$

ここで, $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ である. また, $[D]$ は, 直交異方性弾性マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[D] = D_{00} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし, $D_{12} = D_{21}$, $D_{13} = D_{31}$, $D_{23} = D_{32}$ で

あり, $D_{00} = E_x$ である. また, D_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$)

は, それぞれ次式で表される.

$$\begin{aligned} D_{11} &= (1 - \nu_{zy} \nu_{yz}) / S \\ D_{12} &= (\nu_{yx} + \nu_{zx} \nu_{yz}) / S \\ D_{13} &= (\nu_{zx} + \nu_{yx} \nu_{zy}) / S \\ D_{22} &= (E_y / E_x) (1 - \nu_{zx} \nu_{xz}) / S \\ D_{23} &= (E_y / E_x) (\nu_{zy} + \nu_{zx} \nu_{xy}) / S \\ D_{33} &= (E_z / E_x) (1 - \nu_{yx} \nu_{xy}) / S \\ D_{44} &= G_{xy} / E_x, D_{55} = G_{yz} / E_x, D_{66} = G_{zx} / E_x \end{aligned} \quad (13)$$

ただし, $S = 1 - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{yx} \nu_{zy} - \nu_{zx} \nu_{zy} - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy}$ である.

また, 直交異方性弾性体においては, 以下に示すような相反定理が成り立つ.

$$\begin{aligned} \nu_{xy} / E_x &= \nu_{yx} / E_y, \quad \nu_{yz} / E_y = \nu_{zy} / E_z, \\ \nu_{zx} / E_z &= \nu_{xz} / E_x \end{aligned} \quad (14)$$

直交異方性厚板のひずみエネルギー U_p は, 無次元直交座標で表わせば次式で与えられる.

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} (abh) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}_l^T [K]_{mni j}^{lq} \{\Delta\}_s \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, $[K]_{mni j}^{lq}$ は剛性マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[K]_{mni j}^{lq} = (abh) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]_{mn}^T [D] [B]_{ij}^q d\xi d\eta d\zeta \quad (16)$$

板厚方向の $\xi = \xi_0$ 面に作用する等分布荷重 q による外力ポテンシャル F は、次式で与えられる。

$$F = (ab) \int_0^1 \int_0^1 q W(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (17)$$

$$= (qab) \sum_{l=1}^r \{\Delta\}_l^T \{f\}_l$$

ここで、 ξ_0 は、板厚方向の荷重作用位置である。

板上面に等分布荷重 q が作用する場合の力学的な境界条件は、以下のとおりである。

$$\xi = 0 ; \sigma_z = 0, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (18-a)$$

$$\xi = 1 ; \sigma_z = -q, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (18-b)$$

ここで、幾何学的境界条件を満足した変位関数を仮定している場合には、式(15)のひずみエネルギー U_p を直接用いればよいが、本手法において用いている変位関数である B-spline 関数は、境界条件を満足するような式を単純には作り出すことはできない。したがって、 ξ 軸に垂直な厚板の境界面 $\xi = \xi_{ic}$ で任意の幾何学的境界条件を解析的に導入するために、仮想バネ法^{28),29)}を用いる。すなわち、 $\xi = \xi_{ic}$ の境界面で、各変位 $U, V, W, \partial U / \partial \xi$ に対応する仮想バネ係数 $\alpha, \beta, \delta, \chi$ を導入する。これらの仮想バネによるひずみエネルギー U_b は、次式で与えられ、このエネルギーを式(15)に付加する。この方法は、penalty 関数法と同様の方法である。

$$U_b = (bh) \frac{1}{2} \sum_{ic=1}^{N_e} \int_0^1 \int_0^1 \begin{Bmatrix} \alpha U^2 \\ + \beta V^2 \\ + \delta W^2 \\ + \chi (\partial U / \partial \xi)^2 \end{Bmatrix} d\eta d\xi \Big|_{\xi=\xi_{ic}} \quad (19)$$

ここで、 N_e は、境界条件を導入する境界面の数である。固定面では、 $\alpha = \beta = \delta = \infty$ になり、また、ダイヤフラムタイプの単純支持は、 $\beta = \delta = \chi = \infty$ になり、自由面では、 $\alpha = \beta = \delta = \chi = 0$ になる。しかしながら、数値計算の際には、無限大の数値は取り扱うことができないので、解に影響を与えない最大の値を用いる。

したがって、直交異方性厚板の全ポテンシャルエネルギー Π は、式(15),(17)および式(19)を用いて次式で与えられる。

$$\Pi = U_p + U_b - F \quad (20)$$

ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて極値化すれば、次式の剛性方程式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}_l^T} = \sum_{i=1}^r \left\{ \sum_{q=1}^s \left([K]_{m n i j}^{l q} \{\Delta\}_q - \{f\}_l \right) \right\} = 0 \quad (21)$$

ここで、剛性マトリックスは、次式のようなサブマトリックス²⁸⁾から構成されている。

$$[K]_{m n i j}^{l q} = \begin{bmatrix} [K]_{UU} & [K]_{UV} & [K]_{UW} \\ [K]_{VU} & [K]_{VV} & [K]_{VW} \\ [K]_{WU} & [K]_{WV} & [K]_{WW} \end{bmatrix} \quad (22)$$

サブ剛性マトリックス $[K]_{IJ}$ は、Legendre-Gauss の数値積分公式により求めている。

ここで、 η 軸に垂直な相対する 2 面がダイヤフラムタイプの単純支持、つまり $\eta = 0, 1$ で、 $U = W = 0$ および、 $\partial V / \partial \eta = 0$ を仮定すれば、適用する固有関数は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Y_l(\eta) &= \sin(l\pi\eta) \\ \bar{Y}_l(\eta) &= \cos(l\pi\eta) \end{aligned} \right\} \quad (l = 1, 2, \dots, r) \quad (23)$$

よって、固有関数の直交性を用いれば、級数の連成項が消えるので、式(21)は次式ようになる。

$$\sum_{i=1}^r \left([K]_{m n i j}^{l l} \{\Delta\}_l - \{f\}_l \right) = 0 \quad (24)$$

ここで、 $[K]_{m n i j}^{l l}$ の大きさは、 $3 \times (k-1+M_x) \times (k-1+M_z)$ で表され、常に正定値対称マトリックスである。したがって、式(24)を各級数項ごとに解き、それらの和で $\{\Delta\}_l$ が求められる。

3. 数値計算例および考察

ここでは、本手法を用いて、図-2 に示すような板上面 ($\xi_0 = 1$) に等分布満載荷重 q を受ける η 軸に垂直な相対する 2 面がダイヤフラム型単純支持され、他の 2 面で任意の境界条件を持つ直交異方性厚板の 3 次元応力解析を行い、本手法の解の収束性と精度比較について検討する。また、板上面に等分布満載荷重を受ける異方性の異なる

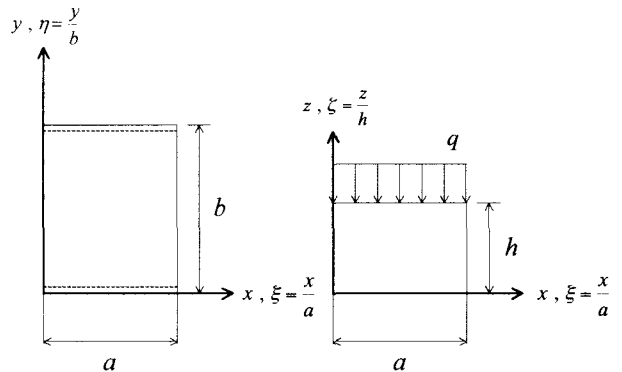


図-2 解析モデル図

表-1 アラゴナイトクリスタル材とシトカスブルース材の剛性係数比^{26),27),29)}

アラゴナイトクリスタルの剛性係数比							
D_{22}/D_{11}	D_{33}/D_{11}	D_{12}/D_{11}	D_{13}/D_{11}	D_{23}/D_{11}	D_{44}/D_{11}	D_{55}/D_{11}	D_{66}/D_{11}
0.543103	0.530172	0.23319	0.010776	0.098276	0.262931	0.26681	0.159914
シトカスブルース材の剛性係数比							
D_{22}/D_{11}	D_{33}/D_{11}	D_{12}/D_{11}	D_{13}/D_{11}	D_{23}/D_{11}	D_{44}/D_{11}	D_{55}/D_{11}	D_{66}/D_{11}
11.6220	0.55372	0.48668	0.24826	0.35210	0.73586	0.69763	0.032493

表-2 板表面に等分布荷重を受けるアラゴナイトクリスタル板のたわみ，応力の収束性に与える要素分割数の影響： $b/a=1.0, k=4, \xi_0=1, SS-SS$

$\xi=\eta=\zeta=0.5 \quad \xi=\eta=0.5, \zeta=1.0 \quad \xi=0.0, \eta=\zeta=0.5$							
h/a	r	$M_x=M_z$	W	σ_x	σ_y	τ_{zx}	
0.1	31	4	-688.6	-36.04	-22.21	-5.408	
		8	-688.6	-36.03	-22.20	-5.400	
		12	-688.6	-36.02	-22.19	-5.386	
		16	-688.6	-36.02	-22.19	-5.366	
		20	-688.6	-36.01	-22.19	-5.351	
		24	-688.6	-36.01	-22.19	-5.349	
		30	-688.6	-36.01	-22.19	-5.342	
		40	-688.6	-36.01	-22.19	-5.340	
	51	50	-688.6	-36.01	-22.19	-5.340	
		4	-688.6	-36.05	-22.22	-5.408	
		8	-688.6	-36.03	-22.20	-5.400	
		12	-688.6	-36.02	-22.20	-5.386	
		16	-688.6	-36.02	-22.20	-5.366	
		20	-688.6	-36.02	-22.20	-5.351	
		24	-688.6	-36.02	-22.20	-5.349	
		30	-688.6	-36.02	-22.20	-5.342	
0.5	31	40	-688.6	-36.02	-22.20	-5.340	
		50	-688.6	-36.02	-22.20	-5.340	
		4	-2.725	-1.616	-1.367	-0.8019	
		8	-2.727	-1.573	-1.342	-0.7858	
		12	-2.727	-1.560	-1.334	-0.7850	
		16	-2.727	-1.556	-1.332	-0.7851	
		20	-2.727	-1.555	-1.331	-0.7851	
		24	-2.727	-1.555	-1.331	-0.7851	
	51	30	-2.727	-1.554	-1.331	-0.7851	
		40	-2.727	-1.554	-1.331	-0.7851	
		50	-2.727	-1.554	-1.331	-0.7851	
		4	-2.725	-1.618	-1.373	-0.8019	
		8	-2.727	-1.577	-1.352	-0.7858	
		12	-2.727	-1.564	-1.344	-0.7850	
		16	-2.727	-1.560	-1.341	-0.7851	
		20	-2.727	-1.558	-1.339	-0.7851	
51	24	-2.727	-1.558	-1.339	-0.7851		
	30	-2.727	-1.557	-1.339	-0.7851		
	40	-2.727	-1.557	-1.339	-0.7851		
	50	-2.727	-1.557	-1.339	-0.7851		
	Multiplier			qh/D_{11}	q	q	q

直交異方性厚板の応力の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響や板上下面の応力に与える板厚比，辺長比および境界条件の影響について示す。

本数値計算に用いる直交異方性板の材料は，表-1に示すような剛性係数比を持つ比較異方性の小さなアラゴナイトクリスタル($D_{22}/D_{11}=0.54$)と異方性の大きなシトカスブルース材($D_{22}/D_{11}=11.6$)であり， D に付した添字は，図-1に示すマテリアル座標系(1, 2, 3)および式(13)，(14)で表される応力-ひずみ関係式に対応している。

表-3 板表面に等分布荷重を受けるシトカスブルース材のたわみ，応力の収束性に与える要素分割数の影響： $b/a=1.0, k=4, \xi_0=1, CC-SS$

$\xi=\eta=\zeta=0.5 \quad \xi=\eta=0.5, \zeta=1.0 \quad \xi=0.0, \eta=\zeta=0.5$						
h/a	r	$M_x=M_z$	W	σ_x	σ_y	τ_{zx}
0.1	31	4	-206.8	-16.43	-34.13	-0.1045
		8	-207.2	-16.12	-33.95	-0.05952
		12	-207.4	-16.05	-33.89	-0.06584
		16	-207.5	-16.04	-33.87	-0.08424
		20	-207.6	-16.04	-33.87	-0.10000
		24	-207.6	-16.04	-33.87	-0.1090
	51	4	-206.8	-16.44	-34.15	-0.1047
		8	-207.2	-16.12	-33.98	-0.05970
		12	-207.4	-16.06	-33.93	-0.06601
		16	-207.5	-16.05	-33.92	-0.08442
		20	-207.6	-16.05	-33.91	-0.1002
		24	-207.6	-16.05	-33.91	-0.1092
0.5	31	4	-1.095	-1.495	-0.9242	-0.04430
		8	-1.099	-1.455	-0.6935	-0.04502
		12	-1.100	-1.448	-0.6299	-0.04483
		16	-1.100	-1.448	-0.6198	-0.04485
		20	-1.101	-1.448	-0.6170	-0.04486
		24	-1.101	-1.448	-0.6135	-0.04487
	51	4	-1.095	-1.499	-0.9275	-0.04430
		8	-1.099	-1.459	-0.7004	-0.04502
		12	-1.100	-1.451	-0.6401	-0.04483
		16	-1.100	-1.451	-0.6335	-0.04485
		20	-1.101	-1.452	-0.6331	-0.04486
		24	-1.101	-1.452	-0.6329	-0.04487
Multiplier			qh/E_x	q	q	q

境界条件は，例えば，CF-SSのように表し，それぞれ ξ 方向の2つの面($\xi=0, 1$)で固定面(C)，自由面(F)であり， η 方向の相対する2面($\eta=0, 1$)で単純支持面(S)に相当している。また，spline 次数 $k=1$ は，4次に仮定しており，仮想バネ係数 $\alpha, \beta, \delta, \chi$ は，数値実験の結果から 10^{10} 程度の数値を用いている。

3.1 本手法の解の収束性と精度比較の検討

まず，本手法の解の収束性について示す。表-2，表-3には，それぞれ板厚比 h/a が0.1と0.5であり，周面単純支持(SS-SS)された比較異方性の小さなアラゴナイトクリスタル正方形板と他の2面が固定(CC-SS)された異方性の大きなシトカスブルース材正方形板の中央断面($\eta=0.5$)でのたわみ W ，応力 σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xz} の収束性に与える級数項 r と要素分割数 $M_x=M_z$ の影響が示してある。ここで，級数項 r は31と51に仮定し，表-2は，要素分割数 $M_x=M_z$ を4から50まで，表-3は，4から24まで変化させている。

これら2つの表に示した結果より、本手法は異方性の大きさに関わらず、要素分割数の増大させると、たわみ $W(\xi=\eta=\zeta=0.5)$ 、応力 α_x 、 $\alpha_y(\xi=\eta=0.5, \zeta=1)$ およびせん断応力 $\tau_{xy}(\xi=0, \eta=\zeta=0.5)$ は、一定値への安定した収束状態を示している。以上の結果より、有効数字4桁程度の解析精度を確保するためには、級数項 $r=31$ 、要素分割数 $M_x=M_z=12$ を採用すれば十分である。

次に、本手法の解析精度を確認するために、表-4には、板上面に等分布満載荷重 q を受ける周面単純支持(SS-SS)されたアラゴナイトクリスタル板の中央断面($\eta=0.5$)でのたわみ $W(\xi=\eta=\zeta=0.5)$ 、応力 α_x 、 $\alpha_y(\xi=\eta=0.5, \zeta=1)$ およびせん断応力 $\tau_{xy}(\xi=0, \eta=\zeta=0.5)$ の精度比較が示してある。ここで、辺長比 b/a は、0.5、1.0 と 2.0 であり、板厚比 h/a はそれぞれ 0.05、0.1 および 0.14 に変化させている。また、比較のために、Teo・Liew²⁷⁾の3次元弾性論に基づくDQ法(DQM)による数値解とSrinivas・Rao²⁶⁾の級数展開法による厳密解(Exact)も示してある。これより、たわみ W と応力 α_x 、 α_y は、辺長比 b/a 、板厚比 h/a に関わらずSrinivas・Raoの厳密解と非常によく一致した結果を示している。

3.2 異方性の異なる直交異方性厚板の応力の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響

次に、板上面に等分満載布荷重 q を受ける異方性の異なる直交異方性正方形厚板の応力の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a と境界条件の影響について示す。ここでは、局所応力の解析精度を高めるために、要素分割数は $M_x=M_z=22$ に仮定している。

(1) 直交異方性厚板の応力 α_x の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響

図-3には、(a) アラゴナイトクリスタル板と (b) シトカスプルス柁目板の中央断面($\xi=\eta=0.5$)における応力 $\alpha_x(0.5, 0.5, \zeta)$ の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響が示してある。ここで、境界条件は、CC-SS および FF-SS であり、板厚比 h/a は、0.05 から 1.0 に変化させている。

これより、アラゴナイトクリスタル板の応力 α_x の板厚方向分布は、境界条件に関わらず $0.05 \leq h/a \leq 0.1$ の範囲では、直線を保持しており、中央面($\xi=0.5$)を通る。 $0.3 \leq h/a \leq 0.5$ になると、応力分布は、直線分布にはならないがほぼ中央面は通過している。さらに、板厚比を大きくした、 $h/a \geq 0.7$ では、中央面を通らなくなり、曲線的かつ非対称な分布性状を示し、板の内部で複雑な応力分布が生じている。これは、荷重上面載荷の影響であると考えられ、板厚比 h/a の増大にともないその影響が大きく現れてくる。

一方、CC-SSを有するシトカスプルス柁目板の応力 α_x の板厚方向分布は、 $0.05 \leq h/a \leq 0.1$ の範囲では、直線を保持しており、中央面($\xi=0.5$)を通り、 $0.3 \leq h/a \leq 0.5$ になると応力は、曲線分布になるが、中央面は通過する。

表-4 板上面に等分布荷重を受けるアラゴナイトクリスタル板のたわみ、応力の精度比較： $M_x=M_z=12, k=1=4, r=31, \xi_0=1, SS-SS$

b/a	h/a	Solution method	$\xi=\eta=\zeta=0.5$	$\xi=\eta=0.5,\zeta=1.0$	$\xi=0.0,\eta=\zeta=0.5$	
			W	σ_x	σ_y	τ_{zx}
0.5	0.05	Present	-2048.7	-40.652	-54.261	-6.3963
		DQM ²⁷⁾	-2048.9	-40.692	-54.303	-
		Exact ²⁶⁾	-2048.7	-40.657	-54.279	-6.2434
	0.1	Present	-139.08	-10.023	-13.870	-2.9978
		DQM	-139.10	-10.068	-13.912	-
		Exact	-139.08	-10.025	-13.888	-2.9573
	0.14	Present	-39.789	-5.0343	-7.2617	-2.0195
		DQM	-39.798	-5.0802	-7.3026	-
		Exact	-39.790	-5.0364	-7.2794	-1.9987
	0.05	Present	-10443	-144.31	-87.059	-10.994
		DQM	-10444	-144.34	-87.090	-
		Exact	-10443	-144.31	-87.080	-10.873
1.0	0.1	Present	-688.57	-36.019	-22.192	-5.3862
		DQM	-688.63	-36.065	-22.233	-
		Exact	-688.57	-36.021	-22.210	-5.3411
	0.14	Present	-191.07	-18.344	-11.597	-3.7506
		DQM	-191.09	-18.391	-11.639	-
		Exact	-191.07	-18.346	-11.615	-3.7313
	0.05	Present	-21542	-262.66	-79.517	-14.093
		DQM	-21542	-262.69	-79.536	-
		Exact	-21542	-262.67	-79.545	-14.048
	0.1	Present	-1408.5	-65.973	-20.186	-6.965
		DQM	-1408.5	-66.012	-20.212	-
		Exact	-1408.5	-65.975	-20.204	-6.9266
0.14	Present	-387.23	-33.860	-10.498	-4.8974	
	DQM	-387.25	-33.904	-10.531	-	
	Exact	-387.23	-33.862	-10.515	-4.8782	
Multiplier			qh/D_{11}	q	q	q

さらに、板厚比が大きな $h/a \geq 0.7$ では、曲線的かつ非対称な分布性状を示し、中央面を通らなくなる。 $h/a = 1.0$ では、 $\xi=0.75 \sim 0.5$ の上方で大きな圧縮応力が、下方で引張り応力が発生し、かなり複雑な応力分布性状を示す。

FF-SSを有するシトカスプルス柁目板の板厚方向の応力分布は、板厚比に関わらず非対称かつ曲線分布をなしている。また、板厚比の増大にともない圧縮応力が支配的になっており、板上面では大きな圧縮応力が生じている。さらに、板の下面では引張り応力が局所的に発生している。また、板上面近傍で生じてくる圧縮応力の値は、異方性が大きく、板厚の増大かつ拘束が強いほど大きく現れている。

したがって、設計の際には、板上面での圧縮応力と板内部での複雑な応力分布性状を十分考慮する必要があると思われる。

(2) 直交異方性厚板の応力 α_y の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響

図-4には、(a) アラゴナイトクリスタル板と (b) シトカスプルス柁目板の中央断面($\xi=\eta=0.5$)における応力 $\alpha_y(0.5, 0.5, \zeta)$ の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a と境界条件の影響が示してある。解析条件は、前述した α_x と同様である。

これより、CC-SSを有するアラゴナイトクリスタル板の応力 α_y 分布は、 α_x とほぼ同様な応力分布性状を示すが、

α_x と比較して非対称性が小さく、応力の値に大きな差異は見られないことがわかる。これは、アラゴナイトクリスタル板では、異方性が小さい($D_{22}/D_{11}=0.54$)ため、 α_x と同様な分布特性を示すものと考えられる。また、FF-SSを有する場合も同様で、 $0.05 \leq h/a \leq 0.5$ の範囲では、ほぼ直線分布であり、板厚が増大してもさほど複雑な応力分布性状は見られない。しかしながら、板上面および下面での応力の値は、板厚比に関わらず α_x よりも大きな値を示している。

一方、CC-SSを有するシトカスブルース柱目板の応力分布は、 $0.05 \leq h/a \leq 0.1$ の範囲では、すでに曲線分布をなしているが、中央面($\xi=0.5$)は通過している。板厚比が、 $0.3 \leq h/a \leq 0.7$ の範囲になると応力は、大きな曲線かつ非対称な分布になり中央面を通過しなくなる。 $h/a=1.0$ では、板上面で大きな圧縮応力を出しているが、そのすぐ下方で引張り応力が発生している。また、この現象が $\xi=\eta=0.5$ 以外でも生じるか確認するために、 $\xi=0.25$ 、 $\eta=0.5$ の位置でも応力分布を検討したが同様な応力分布性状が示されている。これは、板厚の増大にともなう板上面付近での曲げ変形の影響であると考えられる。また、

$h/a \geq 0.7$ では、 $\xi=0.75 \sim 0.5$ の下方では圧縮応力が支配的に発生し、かなり複雑な応力分布性状を示す。

FF-SSを有するシトカスブルース柱目板の応力 α_y 分布は、板厚比に関わらず曲線分布をなしているが、板上面付近で大きな圧縮応力を、板下面付近で大きな引張り応力が集中的に発生している。また、この応力 α_y の値は、 α_x と比較すると非常に大きな値を示しており、板の内部では応力の値は非常に微小であるような特異な応力分布性状を示す。

これらの結果より、異方性の大きな木板の応力分布特性は、かなり複雑な性状を示すので3次元弾性論を用いて、正確に応力状態を評価する必要があると思われる。

(3) 直交異方性厚板の応力 α_x の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響

図-5には、(a)アラゴナイトクリスタル板と(b)シトカスブルース柱目板の中央断面($\xi=\eta=0.5$)における応力 α_x (0.5, 0.5, ξ)の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a と境界条件の影響が示してある。解析条件は、前述した α_x と同様である。

これより、応力 α_x の分布特性は、材種、板厚比 h/a お

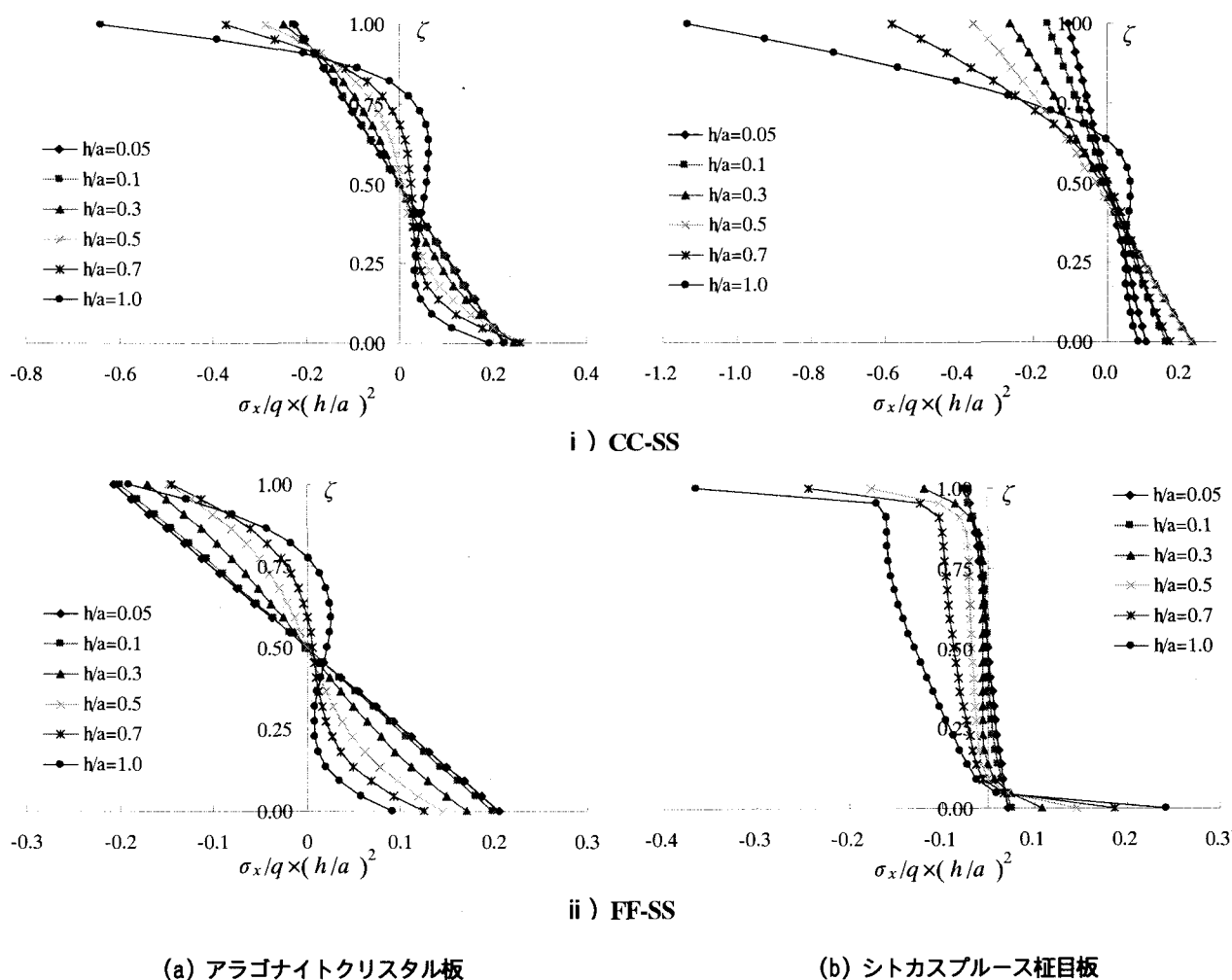


図-3 直交異方性厚板の応力 α_x の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a と境界条件の影響： $b/a=1.0$, $k=1$, $M_x=M_z=22$, $r=31$, $\xi=\eta=0.5$, $\xi_0=1$

よび境界条件に関わらずほぼ同様な曲線的分布性状が示されている。ただし、FF-SS を有するシトカスプルス板では、板厚比が大きな $h/a \geq 0.3$ では、直線的な応力分布性状を示している。また、式 (18-a) と (18-b) で表される板上面での力学的な境界条件 $\alpha_z = -q$ は、ほぼ満足しており、下面では境界条件 $\alpha_z = 0$ を完全に満足している。また、本論文では割愛しているが、せん断応力の境界条件も正確に満足していることを確認している。

α_z の分布は、板厚比が大きくなると、板上面よりやや下の部分で最大応力値を示すので、設計上配慮する必要があると思われる。

3.3 直交異方性厚板の固定面での応力の板厚方向応力分布特性に与える板厚比の影響

図-6 には、CC-SS された板上面に等分布満載荷重 q を受ける (a) アラゴナイトクリスタル板と (b) シトカスプルス板の固定面 ($\xi=0, \eta=0.5$) での応力 $\alpha_x(0, 0.5, \xi)$, $\alpha_y(0, 0.5, \xi)$ および $\alpha_z(0, 0.5, \xi)$ の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a の影響が示してある。

これより、応力 α_x , α_y は、曲線的かつ非対称な分布性

状が示され、板上面の荷重載荷近傍で引張りの応力集中が生じている。また、異方性の大きなシトカスプルス板の方が大きな値を示している。さらに、応力 α_z にも、応力集中が生じている。

したがって、固定面を有する異方性の大きな直交異方性板では、設計の際に応力集中を十分留意する必要があると思われる。

3.4 シトカスプルス板のたわみ、応力に与える板厚比、辺長比および境界条件の影響

これまで、異方性の大きさの異なる直交異方性板の応力の板厚方向分布特性について検討してきた。その結果、異方性が大きな直交異方性板では、複雑な応力分布特性を示すことを明らかにした。そこで、異方性の大きなシトカスプルス板に着目し、たわみ、応力に与える板厚比、辺長比および境界条件の影響について検討する。

表-5 には、板上面に等分布満載荷重を受けるシトカスプルス板のたわみ $W(0.5, 0.5, 0.5)$ と板上下面での応力 $\alpha_x(0.5, 0.5, \xi)$; $\xi=0.1$ および $\alpha_y(0.5, 0.5, \xi)$; $\xi=0.1$ に与える板厚比 h/a , 辺長比 b/a と境界条件の影響が示

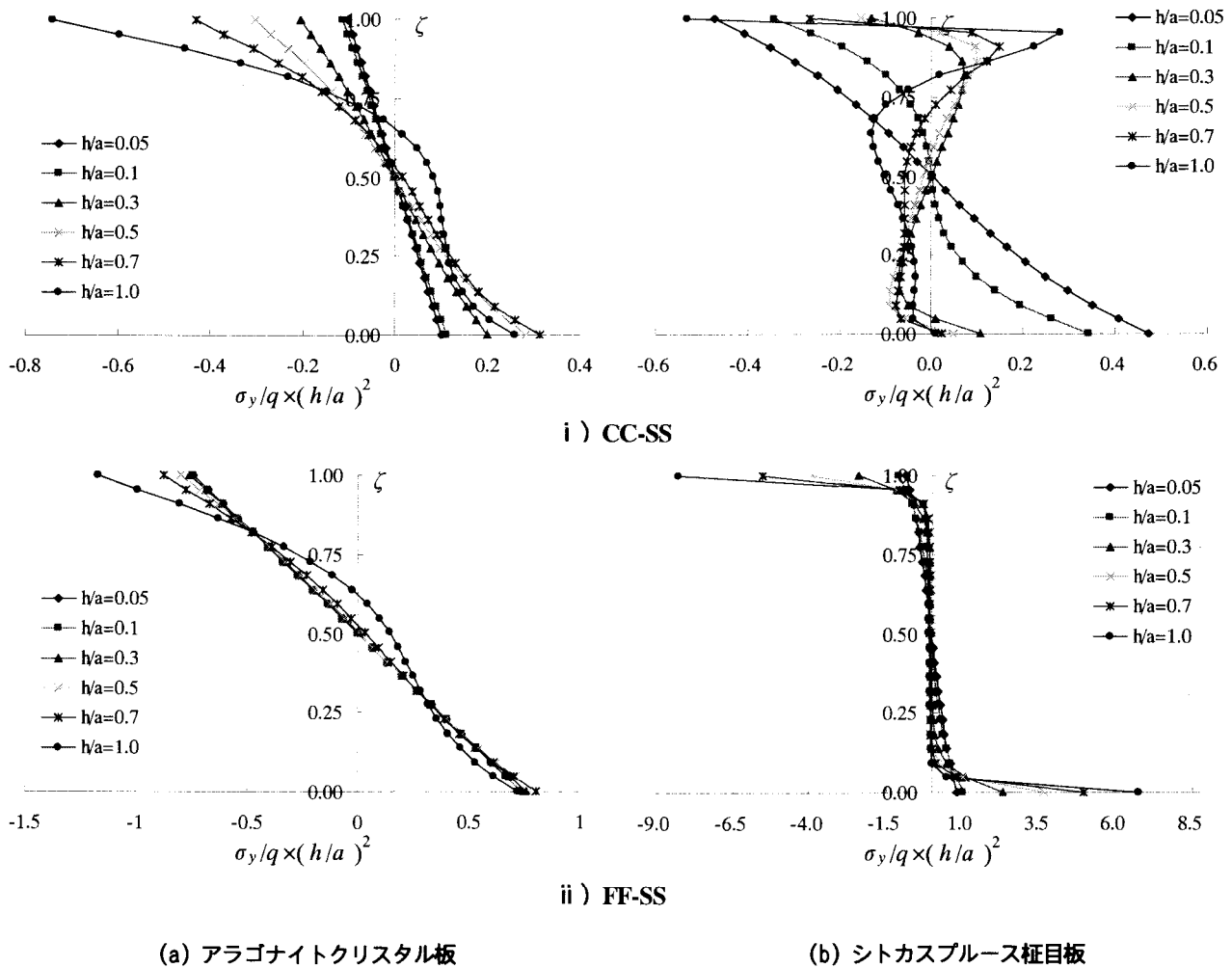


図-4 直交異方性厚板の応力 σ_y の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a と境界条件の影響 : $b/a=1.0, k=1, M_x=M_z=22, r=31, \xi=\eta=0.5, \xi_0=1$

してある．ここで，境界条件は，SS-SS，FF-SS および CC-SS である．また，辺長比 b/a は 0.5, 1.0 と 2.0 であり，板厚比 h/a は 0.05 から 0.5 まで変化させている．

これより，たわみ W は辺長比 b/a に関わらず，板厚比 h/a が増大するにつれて小さくなる．

また，異方性の大きな繊維方向（長手方向）が拘束されない FF-SS の α_y の値が， α_x の値と比較してかなり大きな数値を示している．一方，SS-SS と CC-SS では，辺長比 b/a が 0.5 の場合には板厚比に関わらず α_x よりも α_y の方が大きな値を示すが，正方形板や辺長比 b/a が 2.0 になると，板厚比 h/a の増大にともない， α_y よりも α_x の値が大きくなる．

したがって，直交異方性厚板の応力の板厚方向分布は，拘束が大きく，幾何形状も含めた異方性の影響を大きく受けると考えられる．

4. あとがき

本論文では，3 次元直交異方性弾性論に基づく 3 次元 spline 帯板法を用いて， η 軸に垂直な相対する 2 面がダイヤフラム型単純支持され，他の 2 面で任意の境界条件を

持つ板上面に等分布満載荷重を受ける直交異方性板の 3 次元応力解析を行い，解の収束性と精度比較について検討を行った．また，異方性の異なるアラゴナイトクリсталとシトカスブルース柁目板を直交異方性モデルに採用し，板上面に等分布満載荷重を受ける直交異方性厚板の応力の板厚方向分布特性に与える板厚比と境界条件の影響や板上下面の応力に与える板厚比，辺長比および境界条件の影響について明らかにしてきた．

本論文で得られた新たな知見をまとめると，以下のとおりである．

- 1) 本手法は，材種に関わらず，直交異方性厚板の変位および応力の安定した収束性と高い解析精度を示している．
- 2) 本手法を用いれば，厚板の上面および下面での応力の境界条件を正確に満足させられる．
- 3) 直交異方性板の応力の板厚方向分布は，板厚比の増大にともない曲線的かつ非対称な分布性状を示す．これは，荷重上面載荷の影響であると考えられる．
- 4) 異方性の大きなシトカスブルース柁目板の応力の板厚方向分布は，アラゴナイトクリстал板と比較して，非常に複雑な応力分布性状を示す．また，異方

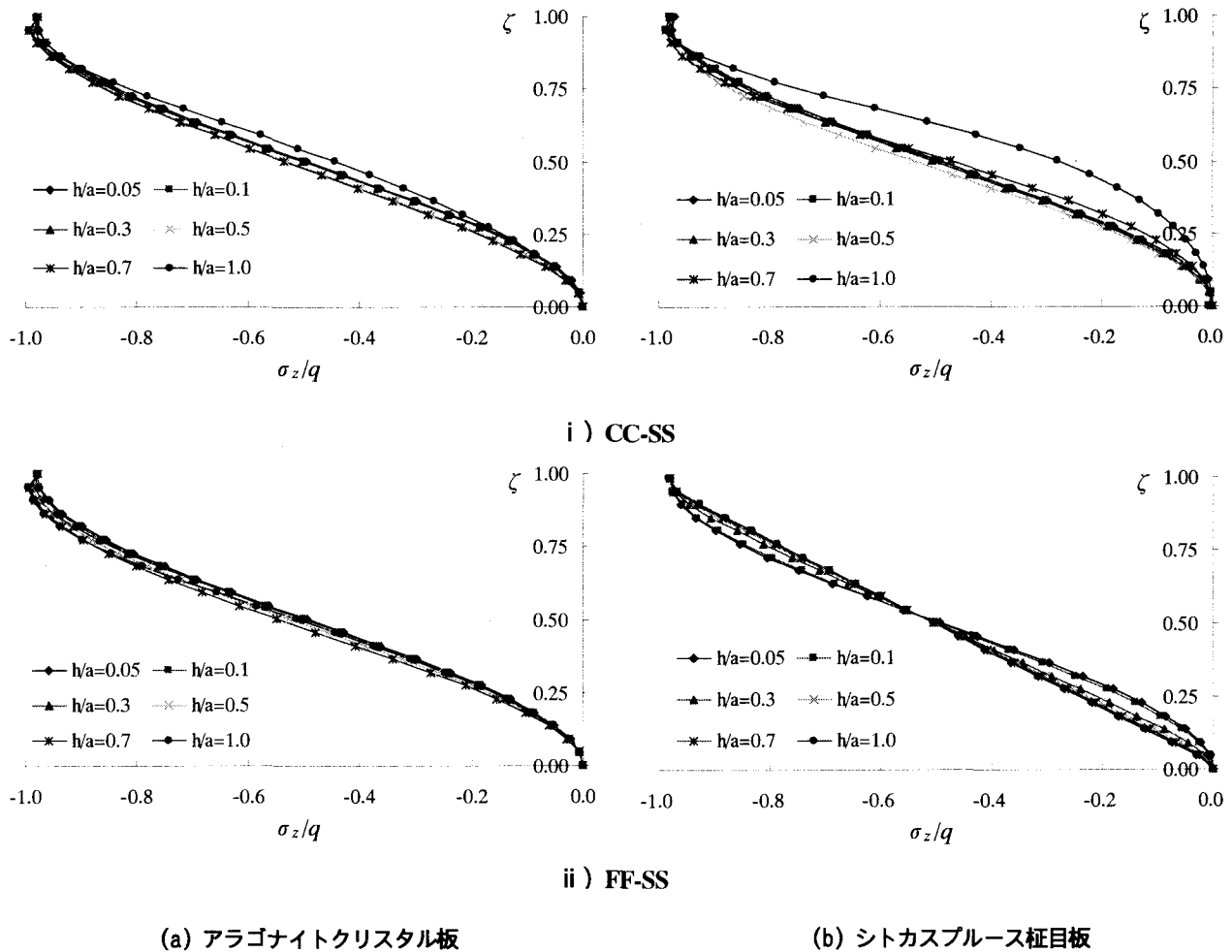


図-5 直交異方性厚板の応力 σ_z の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a と境界条件の影響 : $b/a=1.0, k=1=4, M_x=M_y=22, r=31, \xi=\eta=0.5, \zeta_0=1$

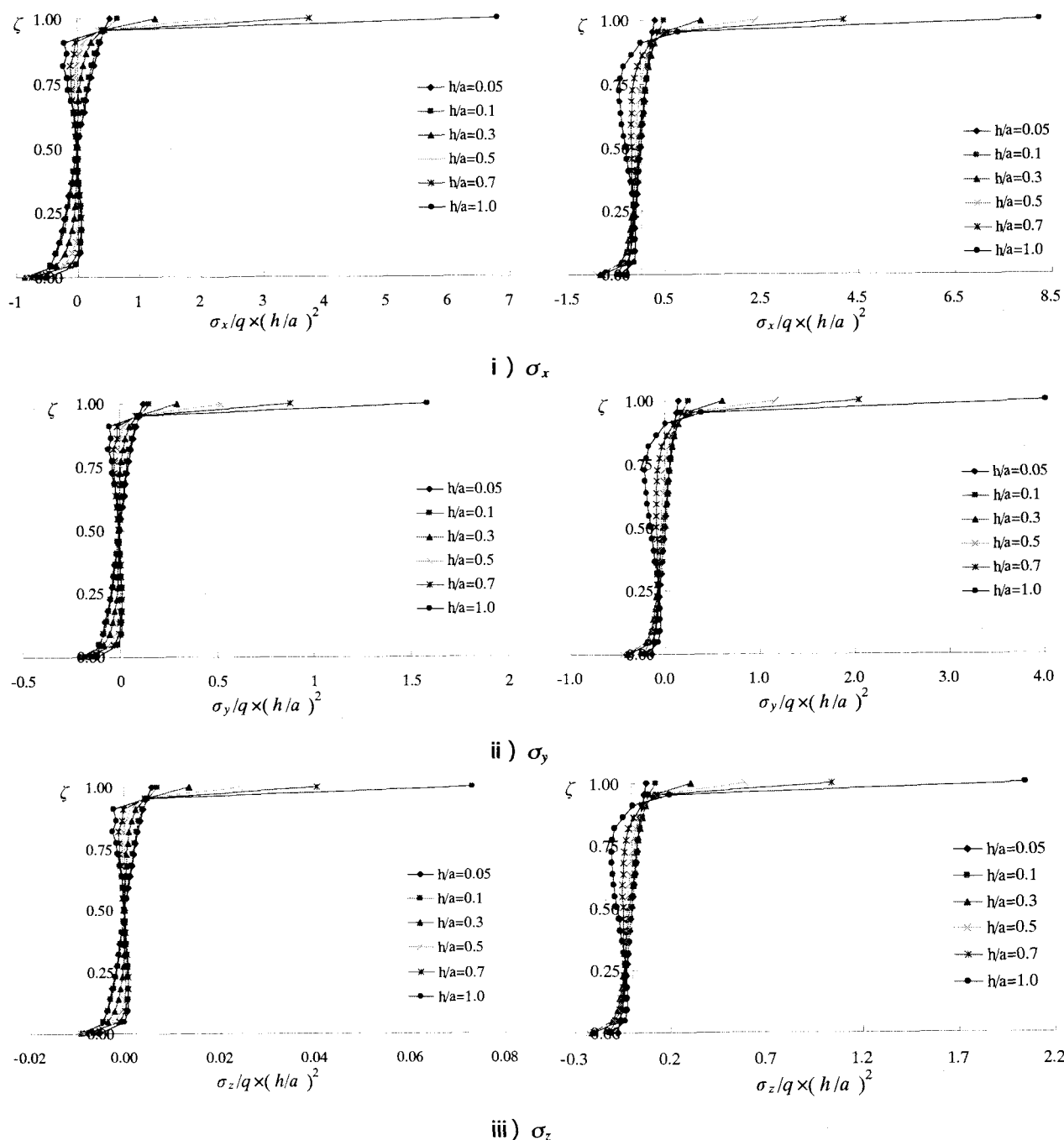
性の大きな方向に大きな応力が発生する。

- 5) 異方性の大きなシトカスブルース柁目板の応力の板厚方向分布は、板厚比が小さくても、曲線的な分布性状を示すため、3次元弾性論を用いる必要がある。
- 6) 固定面では、荷重載荷付近で大きな応力集中が見られる。また、異方性が大きくなると、応力も非常に大きく現れる。

最後に、本文で示した表の値は、有限要素解のベンチマークに使うて頂ければ幸いである。

今後、任意の境界条件を取り扱い、集中荷重、部分荷重や周期荷重を受ける直交異方性厚板の力学的特性の検討を行い、直交異方性構造物への応用について検討していきたい。

謝辞 本論文に関する貴重なご意見を頂きました査読者に謝意を表します。



(a) アラゴナイトクリスタル板

(b) シトカスブルース柁目板

図-6 直交異方性厚板の固定面での応力の板厚方向分布特性に与える板厚比 h/a の影響: $b/a=1.0, k-1=4, M_x=M_z=22, r=31, \xi=0, \eta=0.5, \xi_0=1, CC-SS$

参考文献

- 1) R. D. Mindlin: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, Vol. 73, pp.31-38, 1951.
- 2) E. Reissner: On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. *International Journal of Solids Structures*, Vol.11, pp.569-573, 1975.
- 3) 長谷部宣男：ある種の直交異方性板の応力集中と応力解析. 土木学会論文報告集, 第 233 号, pp. 1-11, 1975.
- 4) M. Levinson: An accurate simple theory of the static and dynamics of elastic plates. *Mech. Res. Commun.*, Vol.7, pp.343-350, 1980.
- 5) J. N. Reddy: A simple high-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.*, Vol. 45, pp.745-752, 1984.
- 6) 内山武, 土橋由造, 大津聡: Reissner 理論による三辺固定一辺自由板の解析. 日本建築学会構造系論文報告集, 第 350 号, pp. 48-57, 1985.
- 7) S. D. Akabarov and T. Kocaturk : On the bending problems of anisotropic (orthotropic) plates resting on elastic foundations that react in compression only, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 34, No. 28, pp. 3673-3689, 1997.
- 8) Brian M. Donning, Wing Kam Liu: Meshless method for shear-deformable beams and plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 152. pp.17-71, 1998.
- 9) M. Huang, X. Q. Ma, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita: A Discrete Method for Bending and Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates with Non-uniform Thickness. *Journal of Appl. Mech.*, JSCE. Vol.6, pp.331-340, 2003.
- 10) 色部誠, 後藤浩一: 3次元弾性問題の数値解法. 土木学会論文集, 138 号, pp. 11-20, 1967.
- 11) S. Srinivas: Flexure of simple supported thick homogeneous and laminated rectangular plates. *ZAMM*, Vol. 49, pp.449-458, 1969.
- 12) 岡村宏一, 島田功: 3次元弾性問題の一数値解法とその応用. 土木学会論文集, 199 号, pp. 33-43, 1972.
- 13) 岡村宏一, 島田功: 弾塑性, もしくは不均質弾性を有する 3次元体の一数値解法. 土木学会論文集, 212 号, pp. 11-24, 1973.
- 14) I. A. Okumura, Y. Oguma : Series solutions for a transversely loaded and completely clamped thick rectangular plate based on the three-dimensional theory of elasticity, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.68, pp.103-121, 1998.
- 15) 園田恵一郎, 堀川都志雄, 白鳥良一: 3次元弾性問題に対する伝達マトリックス級数解法の適用. 土木

表-5 板上面に等分布荷重を受けるシトカスプルーネ目板のたわみ, 板上下面での応力に与える板厚比, 辺長比と境界条件の影響: $M_x=M_y=12, k=4, r=31, \xi_0=1$

		$\xi=\eta=\zeta=0.5$ $\xi=\eta=0.5,\zeta=1.0$ $\xi=\eta=0.5,\zeta=0.0$					
B.C.	b/a	h/a	W	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
SS-SS	0.5	0.05	-521.1	-5.716	-106.6	5.330	106.5
		0.1	-93.21	-4.390	-36.35	4.016	36.17
		0.2	-14.73	-2.802	-10.50	2.422	10.08
		0.5	-1.035	-1.119	-2.503	0.670	1.148
	1.0	0.05	-2956	-37.01	-269.5	36.79	269.3
		0.1	-358.9	-17.53	-64.75	17.33	64.53
		0.2	-42.99	-8.088	-12.31	7.884	11.95
		0.5	-2.015	-2.075	-0.993	1.814	0.322
	2.0	0.05	-12479	-157.0	-405.7	157.0	405.5
		0.1	-972.3	-47.68	-76.62	47.64	76.28
		0.2	-81.14	-15.24	-9.149	15.20	8.775
		0.5	-2.871	-2.951	-0.099	2.845	-0.337
FF-SS	0.5	0.05	-512.3	-3.539	-106.1	3.188	106.1
		0.1	-101.5	-1.596	-42.13	1.242	41.93
		0.2	-22.92	-0.908	-19.26	0.549	18.82
		0.5	-3.412	-0.581	-8.148	0.211	6.792
	1.0	0.05	-3483	-8.840	-329.9	8.713	329.6
		0.1	-507.7	-2.660	-105.8	2.532	105.5
		0.2	-101.2	-1.120	-42.42	0.991	42.01
		0.5	-14.38	-0.511	-15.56	0.386	14.75
	2.0	0.05	-36874	-16.83	-1218	16.86	1218
		0.1	-3499	-3.707	-332.8	3.736	332.5
		0.2	-511.3	-1.244	-107.0	1.273	106.8
		0.5	-62.52	-0.578	-32.92	0.603	32.43
CC-SS	0.5	0.05	-495.9	-8.174	-99.70	7.751	99.69
		0.1	-79.21	-5.554	-29.43	5.133	29.29
		0.2	-11.04	-2.852	-7.273	2.430	6.887
		0.5	-0.837	-1.074	-2.124	0.523	0.886
	1.0	0.05	-2116	-41.88	-186.9	41.45	186.9
		0.1	-207.4	-16.05	-33.89	15.64	33.88
		0.2	-19.98	-5.602	-4.610	5.195	4.453
		0.5	-1.100	-1.448	-0.630	0.910	0.192
	2.0	0.05	-4573	-93.10	-138.5	92.67	138.5
		0.1	-311.2	-24.55	-22.01	24.13	21.96
		0.2	-23.49	-6.687	-2.534	6.280	2.442
		0.5	-1.150	-1.525	-0.323	0.990	0.106
Multiplier		qh/E_x	q	q	q	q	

学会論文報告集, No. 339, pp. 41-50, 1983.

- 16) 島田功, 岡村宏一: 厚い長方形スラブの応力と変形. 土木学会論文報告集, No. 233, pp. 13-23, 1975.
- 17) 古市享, 岡村宏一, 石川一美: 3次元弾性大型直方体要素の剛性マトリックスの作成. 土木学会第 45 年次学術講演会, I -86, pp. 202-203, 1990.
- 18) 林正, 小林享市: 節点プリズム法による 3次元応力解析. 土木学会論文集, No. 450/I-20, pp. 95-101, 1992.
- 19) K. T. Sundara Raja Iyengar, K. Chandrashekhara and V. K. Sebastian: On the analysis of thick rectangular plates. *Ing.-Archiv*, Vol. 43, pp.317-330, 1974.
- 20) O. C. Zienkiewicz and J. J. M. Too: The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. *Proc. Inst. Civil Engrs*, Vol. 53, pp.147-172, 1972.
- 21) M. S. Cheung and M. Y. T. Chan: Three-dimensional

- finite strip analysis of elastic solid. *Computers and Structures*, Vol. 9, pp.629-938, 1978.
- 22) M. S. Cheung and M. Y. T. Chan: Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method. *Computers and Structures*, Vol. 9, pp.629-938, 1978.
- 23) 梶田建夫：厚板構造の解析．日本鋼構造協会第7回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 225-232，1973．
- 24) 末武義崇，大須賀敦，友田土雄：Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析．応用力学論文集，Vol. 6，pp. 257-266，2003．
- 25) 水澤富作，高木信治：Spline Prism 法を用いた長方形厚板の三次元曲げ解析について．土木学会論文集，第 489 号/I-27，pp. 101-110，1994．
- 26) S. Srinivas and A. K. Rao: Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *International Journal of Solids Structures*, Vol. 6, pp. 1463-1481, 1970.
- 27) T. M. Teo, K. M. Liew: Three-dimensional elasticity solutions to some orthotropic plate problems. *International Journal of Solids Structures*, Vol. 36, pp.5301-5326, 1999.
- 28) 水澤富作，高木信治：Spline Prism 法を用いた長方形厚板の振動解析について．構造工学論文集，Vol.39A，pp.1-12，1993．
- 29) 名木野晴暢，水澤富作：3 次元 spline 帯板法を用いた粘弾性直交異方性厚板の振動解析と損失正接について．応用力学論文集．Vol. 6，pp. 321-330，2003．

(2004 年 9 月 17 日 受付)