

偏心および傾斜荷重を受けた砂質土地盤における基礎の極限解析

Limit analysis of foundations on frictional soils under eccentric and inclined loads

山本健太郎*

Kentaro Yamamoto

*博士(工学), 鹿児島大学助手, 工学部海洋土木工学科(〒890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)

Limit analysis takes advantage of the lower- and upper-bound theorems of plasticity to provide relatively simple but rigorous bounds on the true solution of stability problem. In this paper, the limit analysis theorems and linear programming techniques are applied to find the rigorous lower- and upper-bound solutions to the exact limit load of rigid strip footings with rough base loaded by eccentric and inclined loads. Finite elements are used to construct both statically admissible stress fields for lower bound analysis and kinematically admissible velocity fields for upper bound analysis. By assuming linear variation of nodal and elemental variables, the determination of the best lower- and upper-bound solutions is done using linear programming. The results of the limit analysis were compared with the Meyerhof and Hansen equations using the simplified procedure (effective width) due to Meyerhof for dealing with eccentric loads. The comparison suggests that Meyerhof's and Hansen's procedures are unconservative for large eccentricities. In addition, the bearing capacity equation was newly proposed to obtain the reasonable bearing capacity in the large eccentricities.

Key Words: foundation, bearing capacity, finite element method, limit analysis

キーワード: 基礎, 支持力, 有限要素法, 極限解析

1. はじめに

1.1 背景と目的

地盤上における基礎は上部構造物からの重力による鉛直荷重のみならず、しばしば、風、水圧、土圧などの水平荷重から生ずるモーメントが原因で偏心および傾斜荷重を受ける。実務ではそのような荷重を受ける基礎の設計は普通、偏心・鉛直荷重(鉛直荷重が偏心して作用)と中心・傾斜荷重(基礎中心に傾斜荷重が作用)の二つの部分に分けて行われる。その時、二つの異なる部分の問題を解析することによって得られた基礎の支持力、(a) 偏心・鉛直荷重を受けた基礎の支持力、(b) 中心・傾斜荷重を受けた基礎の支持力の二つの値を重ね合わせることによって、偏心および傾斜荷重を受ける基礎の支持力が得られる。

今まで、偏心・鉛直荷重を受けた基礎に関する研究^{1)~3)}並びに、中心・傾斜荷重を受けた基礎に関する研究^{1), 4), 5)}が主に行われてきた。また、模型実験を用いた偏心および傾斜荷重を受けた基礎の研究も実施されてきた^{1), 6)}。偏心と傾斜荷重は同時に起こるにも関わらず、そのような荷重を受けた基礎の支持力とその接地圧分布に対する厳密解はあまり求められていない。その代わり、Meyerhof⁷⁾とHansen⁸⁾による実験的観察に基づいた近似解がよく用いられている。実務上の設計における偏心荷重を取り扱うため

のアプローチは、Meyerhof⁷⁾によって初めて提案された。

Meyerhofは偏心荷重を取り扱う際に、偏心によって底面幅が減少する有効基礎幅の仮定 $B' = B - 2e$ を提案し、その仮定は現設計法において幅広く採用されている。

また、偏心荷重に対して接地圧分布は一樣ではなく、設計において偏心を有する基礎の接地圧分布は、偏心を有する軸に対して線形的に変化することが仮定されている。この事は本来の分布に対する簡素化である。Peckら⁹⁾は偏心載荷された基礎が支持力破壊するなら、正解は基礎のつま先での最大応力が有効基礎幅での極限支持力にあることを指摘した。この事は、どんな支持力破壊も基礎のつま先周辺で生じるので正しいと考えられる。砂質土地盤において、基礎のつま先における接地圧は中心・鉛直載荷の場合に基礎幅 B を用いて計算したものと同じではない。一方、設計における傾斜荷重を取り扱うアプローチに関して、

Meyerhof⁷⁾とHansen⁸⁾は支持力係数 N_c, N_γ, N_q を減少さ

せるために傾斜係数 i_c, i_γ, i_q を提案した。

本研究では、Sloanによって提案された数値極限解析(上界解析と下界解析)^{10), 11)}を偏心および傾斜荷重を受けた砂質土地盤上の剛な基礎に対しても極限荷重を求めることが可能なように定式化を行った。そして、現在用いられて

いる設計手法の妥当性を数値極限解析の結果と比較することにより検証することを目的としている。また、極限解析の結果を、現設計法で用いられている Meyerhof^{d)}による偏心荷重に対する支持力計算における有効基礎幅の仮定並びに、基礎直下における垂直応力の線形分布の仮定と比較した。

1. 2 数値極限解析

地盤における極限解析は、崩壊荷重もしくは土構造物の安定性を評価する方法として従来から良く用いられてきた。極限解析では、地盤の弾性変形は十分小さく無視できるものとして剛塑性体として取り扱う。極限解析は塑性論の下界、上界定理の利点を用い、正解値を下界値、上界値とで挟み撃ちにしてその幅を狭めることにより、工学的に十分精度のある解を求めることができる大変有用な数学的解析手法である。本研究では、境界値問題に対して有限要素法による空間離散化を適用し、極限解析を線形計画問題として定式化を行い、数値解析による手法を用いる。詳細に関しては、参考文献 10)~12)にゆずるものとする。

現在までに、数値極限解析は多様な工学的に重要な安定問題に対する設計チャートを描くために用いられてきた¹³⁾。基礎に対する研究としては、Sloan と Yu¹⁴⁾は数値極限解析を用い、 N_y に対する新しい下界値と上界値を調べた。

そこでは、Rough な基礎に対しては Meyerhof^{d)}と Hansen⁷⁾によって提案された N_y が数値極限解析の結果と比較し

て、正解値に近いと報告された。また、Ukritchon ら¹²⁾は組み合わせ荷重下での不均質な粘性土地盤における基礎の非排水状態での安定性を評価するために数値極限解析を適用した。彼らは3次元破壊包絡面の形状に焦点をあて、基礎下のサクションと深さ方向に不均質な非排水せん断強さの影響を示した。現在のところ、数値極限解析を用い、偏心および傾斜荷重を受けた砂質土地盤上の剛な基礎の支持力を調べた研究は見当たらない。一方、斜面に対する研究としては、Yu ら¹⁰⁾はシンプルな斜面に対して極限釣り合い法の結果を数値極限解析と比較した。そして、数値極限解析による下界値と上界値が極限釣り合い法の結果に対するベンチマークとして使用できることを示した。Kim ら^{17, 18)}は間隙水圧の影響を受けた均質並びに不均質な斜面の安定性を評価するために数値極限解析を適用した。

2. 極限解析法

ここでは、下界定理、上界定理について述べる。

2. 1 下界定理

応力境界条件を満たし、静的可容応力場が見出されれば、その応力場を満足する崩壊荷重は正解値を上まわらず下界値を与える。このことは、以下のように仮想仕事の式を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_S T_i^L v_i dS + \int_V X_i^L v_i dV &= \int_V \sigma_{ij}^L \dot{\epsilon}_{ij} dV \\ &\leq \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 σ_{ij}^L : トラクシオン T_i^L と物体力 X_i^L と釣り合い状

態にある静的可容応力場、 σ_{ij} : 実際の応力場、 $\dot{\epsilon}_{ij}$: 実際の

ひずみ速度場、 v_i : 実際の速度場。下界定理では、力の釣り合い条件と応力境界条件は満足されているが、流れ則と速度境界条件は考慮されていない。

2. 2 上界定理

境界の速度条件を満たし、動的可容速度場が見出されれば、そこから導かれる外力による仕事と内部消散を等置して得られる解は正解値を下まわらず上界値を与える。このことは、以下のように仮想仕事の式を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_S T_i^U v_i^U dS + \int_V X_i^U v_i^U dV &= \int_V \sigma_{ij}^U \dot{\epsilon}_{ij}^U dV \\ &= \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^U) dV \geq \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^U dV \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 v_i^U : ひずみ速度場 $\dot{\epsilon}_{ij}^U$ と適合できる動的可容速

度場、 σ_{ij}^U : トラクシオン T_i^U と物体力 X_i^U と釣り合い状

態にある応力場、 σ_{ij} : 実際の応力場。上界定理では、流

れ則、変位の適合条件並びに速度境界条件は満足されているが、力の釣り合い条件はたいてい満足されていない。

3. 有限要素定式化

ここでは、偏心および傾斜荷重が作用する剛な基礎に対しても厳密な下界、上界値が求めることが可能な定式化¹²⁾の概略について述べる。

3. 1 線形計画問題としての下界解析の定式化

下界解析のための有限要素を図-1(a)~(c)に示す。下界、上界解析ともに3節点3角形要素が用いられる。図-1(b)、(c)は有限要素メッシュの境界において、地盤を半無限体としてシミュレートするために用いられる。矢印の向きは拡張方向を表している。各節点は特定の要素に属し、応力不連続線を表現するために数個の節点が同一座標を持つようになっている。2つの応力(σ_x , σ_y)と1つのせん断応

力(τ_{xy})が節点変数として各節点に与えられている。応力

の線形変化の仮定により、要素内の点における応力は以下に示すように3つの節点応力の線形結合として表すことができる。

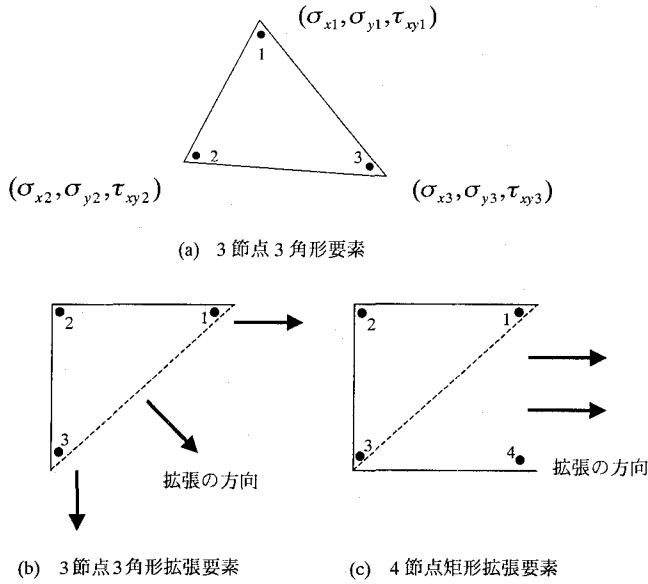


図-1 下界解析のための有限要素

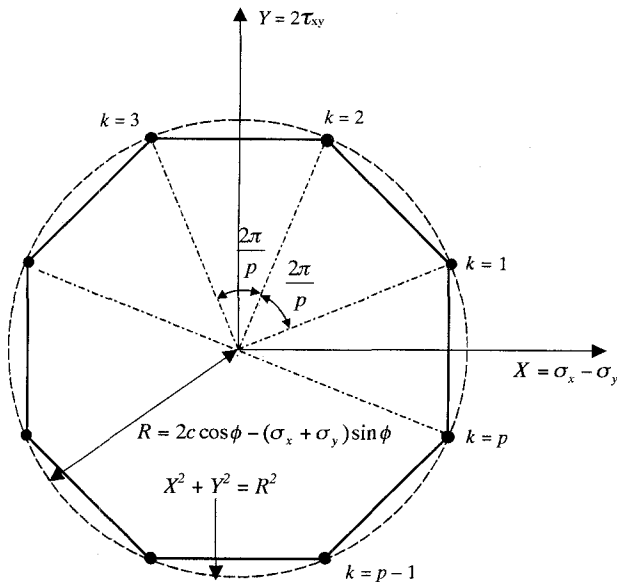


図-2 p 辺を有する多角形を用いたモール・クーロン降伏関数の内部線形化

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{xi}; \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{yi}; \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xyi} \quad (3)$$

ここに、 $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \tau_{xyi})$: 節点 i での応力、 N_i : 要素の節点座標の関数である線形形状関数¹⁰⁾である。

静的可容応力場は、(a) 要素内での力の釣り合い、(b) 応力不連続線での力の釣り合い、(c) 応力境界条件、(d) 降伏規準が土塊のどこにおいても破られないこと、(e) 基礎に対する力の釣り合いの条件を満たさなければならない。

これらの条件は以下のように表される。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad (4)$$

$$\sigma_{na}^d = \sigma_{nb}^d; \quad \tau_a^d = \tau_b^d \quad (5)$$

$$\sigma_n^l = q^l; \quad \tau^l = t^l \quad (6)$$

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (7)$$

$$\sin \alpha \int_s \sigma_n dx - \cos \alpha \int_s \tau dx = 0; \quad \int_s x \sigma_n dx = 0 \quad (8)$$

ここに、 γ : 土の単位体積重量、 q^l : 境界端 l に垂直な規定応力、 t^l : 境界端 l に接する規定応力、 x : 荷重が作用している点からの距離。

式(5)は二つの隣接する要素 a と b の間の応力不連続線 d での力の釣り合いを表す。 σ_{na}^d と τ_a^d が要素 a 側における応力不連続線 d 上での垂直応力とせん断応力を示す。式(7)を満足させるため、 $(\sigma_x - \sigma_y)$ と $2\tau_{xy}$ の空間において、円

形で表されるモール・クーロンの降伏規準を近似する p 辺と p 個の頂点をもつ多角形が用いられる。静的可容は、土塊のどこにおいても降伏規準を破らないことが要求されるので、多角形は元となる降伏面の内側を位置するように定義されることによって、静的可容が満足される。図-2にはモール・クーロン降伏関数の内部線形化を示す。式(8)は剛な基礎に対する鉛直、水平方向の力の釣り合いとモーメントの釣り合いを示す。式(3)を式(4)~(8)に代入することによって、今まで述べてきた静的可容条件が節点応力を用いて線形式として表現することができる。

基礎に対する極限荷重の下界値は、垂直応力が作用する境界において垂直応力を積分形式で表現した次式を最大化することによって得られる¹²⁾。

$$\max\{Q\} = \max\left\{\frac{1}{\cos \alpha} \int_s \sigma_n dx\right\} \quad (9)$$

ここで、 s : 垂直応力が作用する境界、 α : 垂直線からの荷重の傾斜角を表す。また、式(9)の応力は式(3)に従って、線形的に変化すると仮定されるので、式(9)は静的可容条件を記述するいくつかの線形拘束をもつ、最大化されるための線形目的関数として以下のように定式化することができる。

$$\begin{aligned} &\text{maximize: } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{あるいは} \quad \text{minimize: } -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to:} \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{B}_1 \\ &\quad \mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \mathbf{B}_2 \\ &\quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} = \mathbf{B}_3 \\ &\quad \mathbf{A}_4 \mathbf{x} \leq \mathbf{B}_4 \\ &\quad \mathbf{A}_5 \mathbf{x} = \mathbf{B}_5 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{x}$: 未知の節点応力の全体ベクトル、 $\mathbf{c}$: 目的関数の係数ベクトル、 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ ($i=1, 5$): 線形等式または線形不等式の係数マトリックスを示す。なお、 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ が要素内と応力不連続線での力の釣り合い、 $\mathbf{A}_3$ が応力境界条件、 $\mathbf{A}_4$ が降伏規準、 $\mathbf{A}_5$ が基礎上で力の釣り合いに関するものである。目的関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ はスカラーである。最終的には上記の拘束条件を示すマトリックスがいくつかの列よりも多くの行をもち（未知数の数よりも拘束数が多い）、行列の値の存在がまばらな大きなマトリックスとしてまとめられる。このような拘束マトリックスをもつ線形計画問題を解くためには、steepest-edge active set algorithm¹⁹⁾が適しており、本研究においてもこの手法を用いる。

3. 2 線形計画問題としての上界解析の定式化

上界解析のための有限要素を図-3に示す。これを見ると、水平並びに鉛直変位速度 u と v は節点変数であり、要素内で一定である塑性定数速度 $\dot{\lambda}$ は要素変数である。要素内の点において、変位速度は次式を用いて3つの節点変位速度の線形結合として表すことができる。

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^3 N_i v_i \quad (11)$$

ここに、 u_i, v_i : 節点 i での水平並びに鉛直変位速度、 N_i : 線形形状関数である。

動的可容速度場は、(a) 要素内での関連流動則、(b) 速度不連続線での関連流動則、(c) 速度境界条件、(d) 基礎上の節点に対する運動学的条件の条件を満たされなければならない。これらの条件は以下のように表される。

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}; \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y};$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \quad (12)$$

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 = 0 \quad (13)$$

$$\Delta v^d = |\Delta u^d| \tan \phi^d \quad (14)$$

$$u_i^l = \bar{u}_i^l; \quad v_i^l = \bar{v}_i^l \quad (15)$$

$$u_i = u_c + x_{ci} \omega_c \sin \theta; \quad v_i = v_c - x_{ci} \omega_c \cos \theta \quad (16)$$

ここに、 $\dot{\lambda}$: 要素における非負の塑性定数速度、 F : 降伏関数、 $\Delta u^d, \Delta v^d$: 二つの隣接する要素 a と b の間の速度不連続線 d における接線方向と垂直方向の速度不連続成分、 $\phi^d = \min(\phi_a, \phi_b)$; ϕ_a, ϕ_b : 要素 a と b における内部摩擦角、

$\bar{u}_i^l, \bar{v}_i^l$: 境界端 l の節点 i において規定された接線方向と

垂直方向の速度、 u_c, v_c, ω_c : 基礎の中心 c での水平方向と鉛直方向の変位速度と角速度。

下界解析同様、一つの多角形がモール・クーロンの降伏規準の線形近似として用いられる。上界解は式(13)を満たさなければならないので、図-4に示されるように、元となる降伏面（モール・クーロンの降伏面）の周囲を外側に取り囲む p 辺を有する多角形を用いることで降伏規準を満たすことができる。式(16)は基礎上の節点に対する運動学的条件を示し、基礎が x 軸から傾き θ を有し、基礎の中心 c から左側に x_{ci} 離れた基礎上の節点 i における水平方向と鉛直方向の変位速度を表す。式(11)を式(12)~(16)に代入することによって、今まで述べてきた動的可容条件が節点変位速度、塑性定数速度などを用いて線形式として表現することができる。

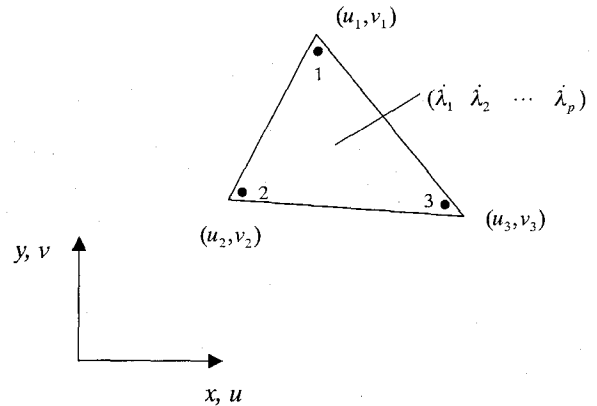


図-3 上界解析のための有限要素

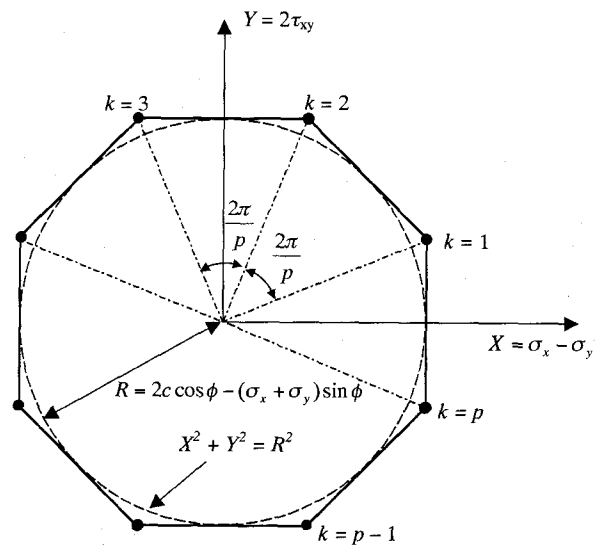


図-4 p 辺を有する多角形を用いたモール・クーロン降伏関数の外部線形化

次に、全内部消散エネルギーは要素内での塑性変形と要素間の速度不連続線に沿ってのせん断の 2 つによって消散される。1 つの三角形要素 e (面積: A) 内での塑性変形による内部消散は以下のように計算することができる。

$$P^e = \int_{A^e} (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA = \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 \quad (17)$$

また、長さ L^d をもつ速度不連続線 d に沿っての内部消散は次式で示されるように、垂直応力と接線応力によって消散される。

$$P^d = \int_{L^d} (\tau^d \Delta u^d + \sigma_n^d \Delta v^d) dL = \int_{L^d} c^d |\Delta u^d| dL = \mathbf{c}_3^T \mathbf{x}_3 \quad (18)$$

ここに、 $c^d = \min(c_a, c_b)$; c_a, c_b : 要素 a と b における粘着力を示す。

支持力問題において、作用する荷重に加えて土の自重も外力として考えられる。平面ひずみ条件において、要素 e の重力によってなされる外力仕事 $\dot{W}_g^e$ は以下の式で与えられる。

$$\dot{W}_g^e = - \int_{A^e} \gamma^e v dA = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 \quad (19)$$

ここで、 γ^e : 要素 e の単位体積重量。式(19)のマイナスは y 方向の変位速度に関して、上向きが正の向きであることによる。ここでも変位速度は要素内で線形に変化すると考えられ、単位体積重量は一定であるので、最終的に式(19)のような形にまとめられる。また、基礎に作用する偏心傾斜荷重による外力仕事は、剛な基礎での運動学的条件を用い、以下のように表される¹²⁾。

$$\dot{W}_{foot}^l = \int_L \sigma_n v_n dL = Q \{ \mu_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha + \omega_c e \cos \alpha \} \quad (20)$$

ここに、 L : 荷重が作用する境界の長さ、 σ_n, v_n : 荷重境界 l における垂直応力と変位速度を表す。

仮想仕事の原理により、全内部消散エネルギーを全外力仕事に等しいと置くことにより、以下のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^E P^e + \sum_{d=1}^D P^d = \sum_{e=1}^E \dot{W}_g^e + \sum_{l=1}^L \dot{W}_{foot}^l \quad (21)$$

ここに、 E : 全要素数、 D : 全速度不連続線数、 L : 全荷重境界数を表す。式(20)を式(21)に代入し、整理すると以下のようなになる。

$$Q \{ \mu_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha + \omega_c e \cos \alpha \} = - \sum_{e=1}^E \dot{W}_g^e + \sum_{e=1}^E P^e + \sum_{d=1}^D P^d \quad (22)$$

ここで、基礎の動きを荷重が作用する方向に式(23)のように拘束することにより、式(22)から Q を直接求めることが

できる。

$$\mu_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha + \omega_c e \cos \alpha = 1 \quad (23)$$

以上により、上界解析の目的関数である Q を最小化するためには、式(22)の右辺を最小化すればいいことがわかる。よって、上界解析の定式化を下界解析同様、線形計画問題としてまとめると以下のようなになる。

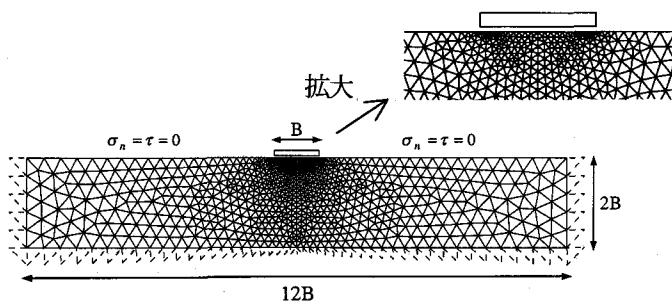
$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & -\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_3^T \mathbf{x}_3 \\ \text{subject to:} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 = 0 \\ & \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{x}_3 = 0 \\ & \mathbf{A}_{31} \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_3 \\ & \mathbf{A}_{41} \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_4 \\ & \mathbf{A}_{51} \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_5 \\ & \mathbf{x}_2 \geq 0 \\ & \mathbf{x}_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{x}_1$: 節点変位速度の全体ベクトル、 $\mathbf{x}_2$: 要素に対する塑性定数速度の全体ベクトル、 $\mathbf{x}_3$: 速度不連続線パラメータの全体ベクトル、 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$: 目的関数の係数ベクトル、 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{41}, \mathbf{A}_{51}, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5$: 線形式の係数マトリックスを示す。なお、 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{23}$ が要素内と速度不連続線での関連流動則、 $\mathbf{A}_{31}$ が速度境界条件、 $\mathbf{A}_{41}, \mathbf{A}_{51}$ が剛な基礎の運動学的条件に関するものである。

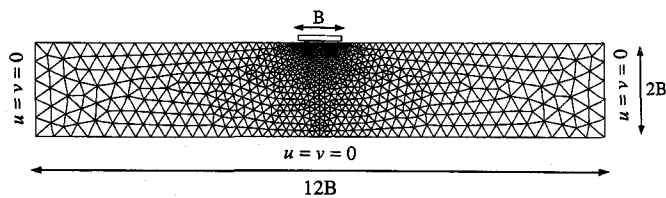
式(24)で表される線形計画問題も最終的には、steepest-edge active set algorithm¹⁹⁾が適用可能な問題へと変換され、上界解析同様、steepest-edge active set algorithm が用いられる。

4. 解析結果

図-5 には下界解析並びに上界解析用有限要素メッシュの一例を示す。下界メッシュは 1556 個の 3 角形要素、2379 個の応力不連続線から成る。一方、上界メッシュは 1556 個の 3 角形要素、2266 個の速度不連続線から構成されている。図-5(a)の有限要素メッシュの境界においては、地盤を半無限体としてシミュレートするために図-1(b)と(c)の拡張要素を用いた。下界解析と上界解析の境界条件も図-5 中に示されている。できるだけ良い解を得るために、基礎端周辺においては十分にメッシュを細かくすることを実施した。左右と下の境界は極限支持力と破壊メカニズムに影響を与えない範囲内で、メッシュの数を増やすためにできるだけ基礎に近くなるように設定した。図-6~12 には荷重傾斜角、偏心量を変化させた時の上界解析からの速度変位ベクトル、塑性領域を示す。地盤は砂質土地盤を想定し、そのパラメータは $c_0=0$ 、 $\phi=35^\circ$ 、 $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$ と設定した。基礎幅は $B=1 \text{ m}$ とし、 q_b は基礎の base における単位面積当たりの荷重を表す。偏心量 e 、荷重傾斜角 α の符号に関しては、Meyerhof¹⁾と同様に、基礎の中心から左側と垂直線から時計回りを正の向きとしている。偏心量、基礎幅比(e/B)と荷重傾斜角(α)の範囲は、 $e/B=0, 1/12$,

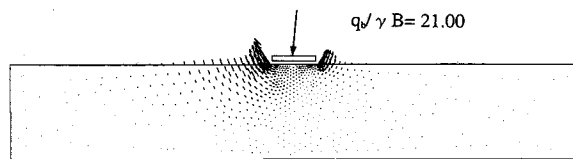


(a) 下界解析のメッシュ

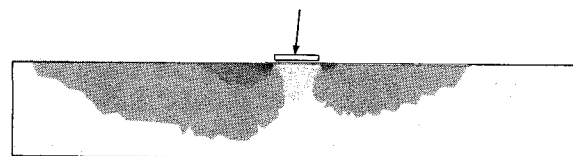


(b) 上界解析のメッシュ

図-5 典型的な有限要素メッシュと境界条件

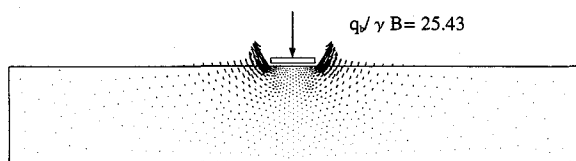


(a) 変位速度ベクトル

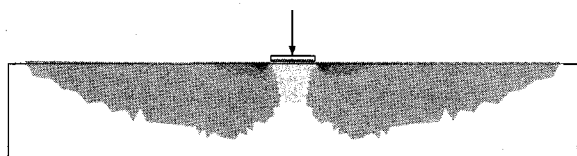


(b) 塑性領域

図-7 中心、傾斜荷重下における基礎の上界解
($e/B=0$, $\alpha=5^\circ$)

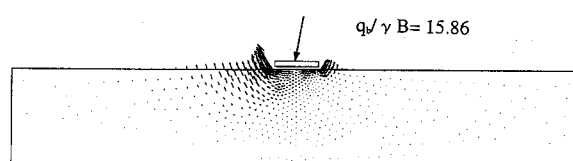


(a) 変位速度ベクトル

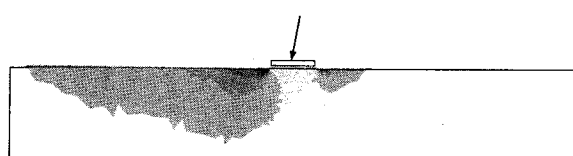


(b) 塑性領域

図-6 中心、鉛直荷重下における基礎の上界解
($e/B=0$, $\alpha=0^\circ$)

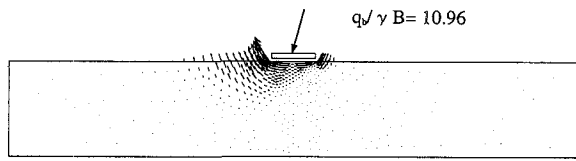


(a) 変位速度ベクトル

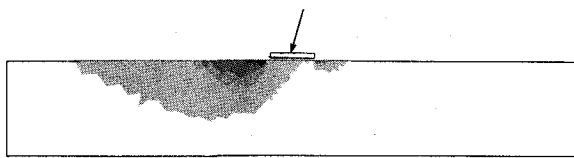


(b) 塑性領域

図-8 中心、傾斜荷重下における基礎の上界解
($e/B=0$, $\alpha=10^\circ$)

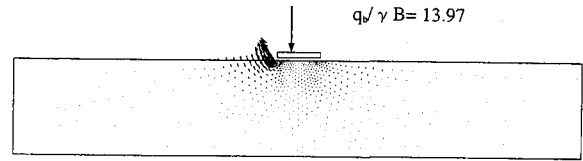


(a) 変位速度ベクトル

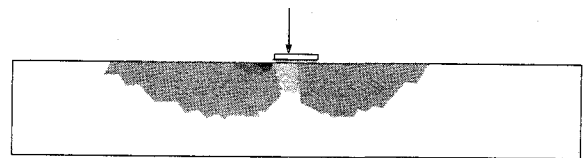


(b) 塑性領域

図-9 中心、傾斜荷重下における基礎の上界解
($e/B=0$, $\alpha=15^\circ$)

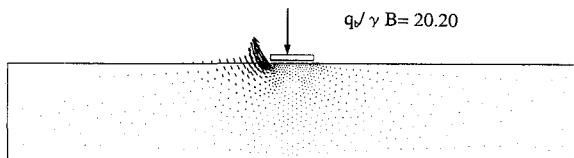


(a) 変位速度ベクトル

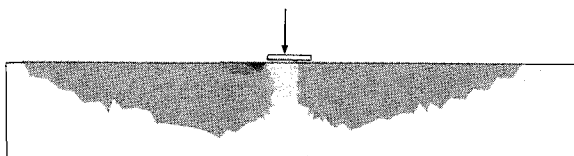


(b) 塑性領域

図-11 偏心、鉛直荷重下における基礎の上界解
($e/B=1/6$, $\alpha=0^\circ$)

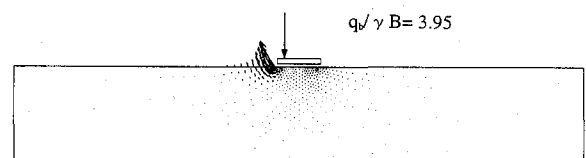


(a) 変位速度ベクトル

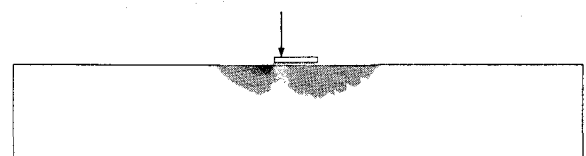


(b) 塑性領域

図-10 偏心、鉛直荷重下における基礎の上界解
($e/B=1/12$, $\alpha=0^\circ$)



(a) 変位速度ベクトル



(b) 塑性領域

図-12 偏心、鉛直荷重下における基礎の上界解
($e/B=1/3$, $\alpha=0^\circ$)

1/6, 1/3, $\alpha=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ としている。速度場における矢印は、破壊時における節点変位速度の大きさと方向を示している。塑性領域は対象とする領域内での内部消散の大きさの変化を表すために白色から黒色へと異なる濃淡をもつ領域へと分けられている。黒い領域では大きな内部消散が生じていることを示す。なお、基礎直下の領域は土塊の剛な領域を表している。ここでは、基礎と土の間の境界面は rough と仮定している。図-6(a)を見ると、基礎端周辺において大きな変位速度が生じ、図-6(b)からは基礎端周辺において大きな内部消散が生じていることがわかる。また、図-6(a), (b)ともに基礎の中心に対しては対称で、両図は良い対応を示していることがわかる。中心・傾斜荷重の場合である図-7~9を見ると、荷重が作用する方向の基礎端において変位速度ベクトルと塑性領域が発達していることがわかる。また、 α の増加とともに支持力は減少している。次に、偏心・鉛直荷重の場合である図-10~12を見ると、偏心量、基礎幅比(e/B)が徐々に増加する時、変位速度ベクトルは主に、基礎上において荷重が載荷されている側で観察される。塑性領域は荷重直下の領域でより顕著になる。なお、 e/B の増加とともに支持力が減少していることもわかる。

図-13, 14には下界解析からの基礎直下での垂直応力分布とせん断応力分布の一例を示す。縦軸には γB で無次元化された応力、横軸には基礎幅 B ($B=1\text{ m}$)で無次元化された基礎中心からの距離を示す。図中の直線は基礎直下での同一座標をもつ、隣接する3角形要素のそれぞれの節点での応力の値を平均したものを結んだものである。図-13での破線は、以下の式で表される基礎直下での垂直応力の線形分布の仮定を示す。なお、下式を用いて垂直応力が計算される時、 Q には下界解析からの下界値が使われている。

$$q_{b, \max/\min} = \frac{Q}{BL} \left(1 \pm \frac{6e}{B} \right) \quad (e/B \leq 1/6) \quad (25)$$

$$q_{b, \max} = \frac{4Q}{3L(B-2e)} \quad (e/B > 1/6) \quad (26)$$

この仮定は、式(25)において $e/B=1/6$ の時、 $q_{b, \min}$ は0となり、 $e/B>1/6$ の時には $q_{b, \min}$ が負となり、基礎と地盤の間に張力が生ずるので、その時には分布形を式(26)で表される3角形としたものである。今なお、接地圧の正確な分布を推定することは難しいと考えられる。図-13(a)を見ると、下界解析からの基礎直下での垂直応力分布は基礎の中心に対して対称で、基礎中心で最大値をとり、基礎端で0をとっていることがわかる。この事は、砂質土地盤における基礎直下での接地圧分布と良い対応を示していることがわかる。また、線形分布の仮定と比べて基礎中央で大きく、基礎端周辺で小さく、その最大値は、線形分布の仮定で求めたものよりも大きいことがわかる。図-13(a)-(d)を見ると、下界解析からの垂直応力分布は荷重が作用している周辺で最大値をとり、 e/B が1/6を越えると、その分布と最大値は荷重が偏心していない側での基礎と地盤との接触面の減少とともに小さくなる。よって、 $q_b/\gamma B$ も減少して

いる。図-13(d)においては、基礎と地盤との接触面は基礎の左側においてのみ見られる。次に、図-14(a)を見ると、下界解析からの基礎直下でのせん断応力分布は図-13(a)と対応しており、これも基礎の中心に対して対称となっており、基礎の中心と基礎端で0をとっていることがわかる。なお、せん断応力は基礎直下の境界区分に対して時計回りが正となっている。図-13と同様に、図-14(a)-(d)を見ると、 e/B の増加とともに、せん断応力分布とその値は小さくなる。そして、荷重が作用している点ではせん断応力が0となり、正と負のせん断応力を分けている。 e/B が増加する時、偏心量 e と同方向にせん断力が0となる点も移動し、図-14(d)では基礎の左側でのみせん断応力が作用していることもわかる。なお、図-13, 14中の $q_b/\gamma B$ はこの時の正規化された支持力を示し、後述の $\phi=35^\circ$ のケースである図-16(b)の $q_b/\gamma B$ とは対応していない。後述の図-16, 17では、各ケースの荷重条件などに応じて、特に基礎端周辺におけるメッシュの細かさの程度や解析領域の大きさなどもいくつか変化させ、できるだけより良い下界値と上界値を求めることを試みた。また、図-13, 14では各々の荷重条件での比較と見やすさのために、ある程度細かい同一メッシュを用いた。

図-15には中心・鉛直荷重に対する rough な剛性基礎上での支持力係数 N_γ と内部摩擦角 ϕ との関係を示す。ここでは、数値極限解析の結果である下界値、上界値並びにCaquot and Kerisel²⁰⁾, Meyerhof⁴⁵⁾, Hansen⁷⁾による提案式が比較されている。有限要素メッシュに関しては、メッシュを十分細かくし、より正確な解を得るために解析領域が半分のメッシュを用いた。各提案式は以下のように表されている。

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \phi \quad (\text{Caquot and Kerisel, 1953}) \quad (27)$$

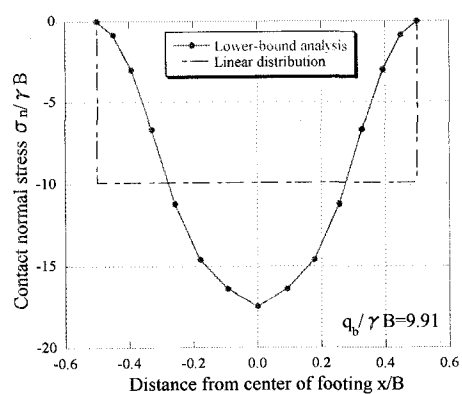
$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1.4\phi) \quad (\text{Meyerhof, 1963}) \quad (28)$$

$$N_\gamma = 1.5(N_q - 1) \tan \phi \quad (\text{Hansen, 1970}) \quad (29)$$

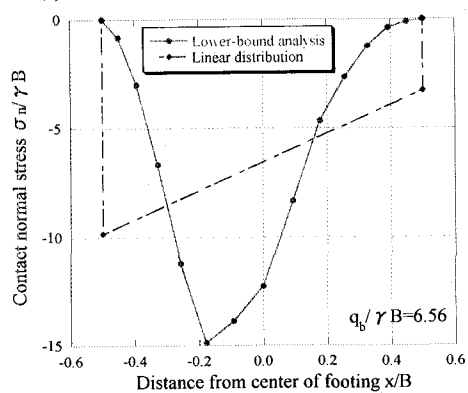
$$N_q = \exp(\pi \tan \phi) \tan^2(45 + \frac{\phi}{2}) \quad (30)$$

支持力係数 N_γ に関しては、Caquot and Kerisel, Meyerhof, Hansenの順に大きい。下界値と上界値は $\phi=25^\circ$ と 30° の時のCaquot and Keriselの値を除いて、すべての値を挟み撃ちにすることができた。このCaquot and Keriselによる値は $\phi=25^\circ$ と 30° の時、 N_γ を過大評価していると考えられる。下界値と上界値の差並びに、MeyerhofとHansenによる解の差は ϕ が大きくなるにつれて、徐々に大きくなるがわかる。

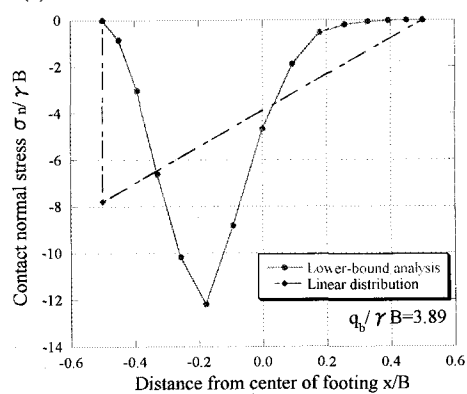
図-16には様々な内部摩擦角をもつ砂質土地盤に対する $q_b/\gamma B$ と偏心量、基礎幅比(e/B)との関係を示す。縦軸には γB で無次元化された極限支持力、横軸には基礎幅 B に対する偏心量 e の比(e/B)を示す。図中のプロットは本解析結果からの下界値、上界値並びにMeyerhof⁴⁵⁾とHansen⁷⁾の提案式(31)と(32)から計算された値を示す。MeyerhofとHansenは、偏心荷重による基礎底面幅の減少を考慮した



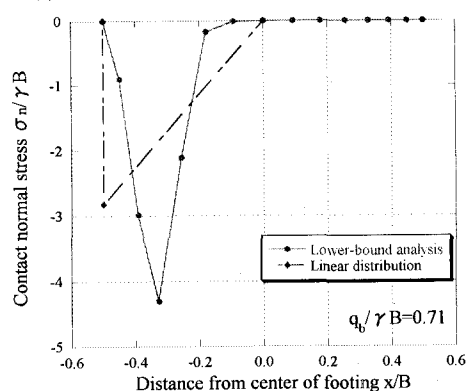
(a) 中心、鉛直荷重 ($e/B=0$, $\alpha=0^\circ$)



(b) 偏心、鉛直荷重 ($e/B=1/12$, $\alpha=0^\circ$)

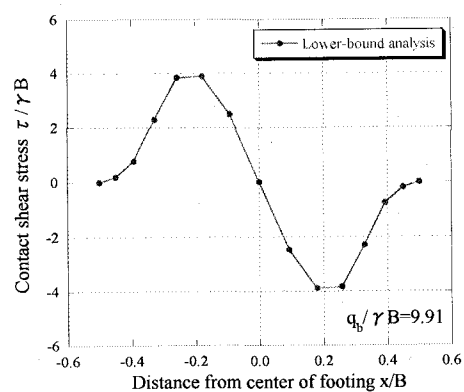


(c) 偏心、鉛直荷重 ($e/B=1/6$, $\alpha=0^\circ$)

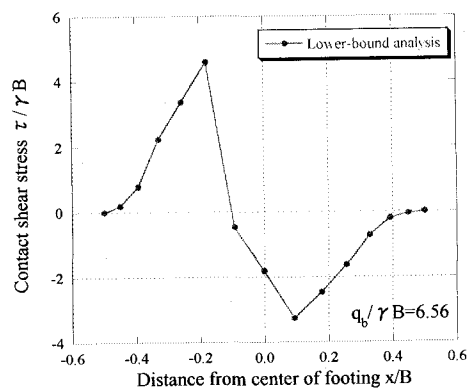


(d) 偏心、鉛直荷重 ($e/B=1/3$, $\alpha=0^\circ$)

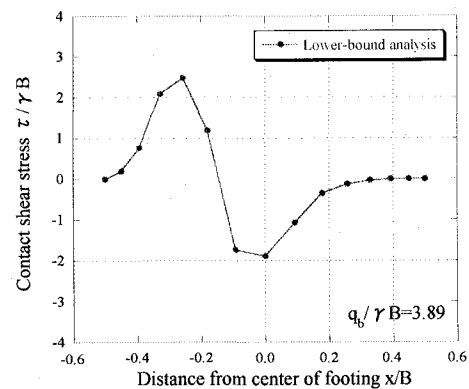
図-13 下界解析からの基礎直下での垂直応力分布



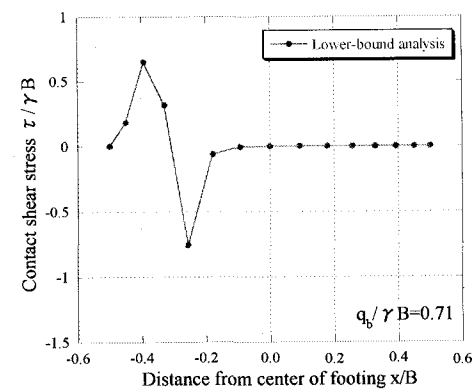
(a) 中心、鉛直荷重 ($e/B=0$, $\alpha=0^\circ$)



(b) 偏心、鉛直荷重 ($e/B=1/12$, $\alpha=0^\circ$)



(c) 偏心、鉛直荷重 ($e/B=1/6$, $\alpha=0^\circ$)



(d) 偏心、鉛直荷重 ($e/B=1/3$, $\alpha=0^\circ$)

図-14 下界解析からの基礎直下でのせん断応力分布

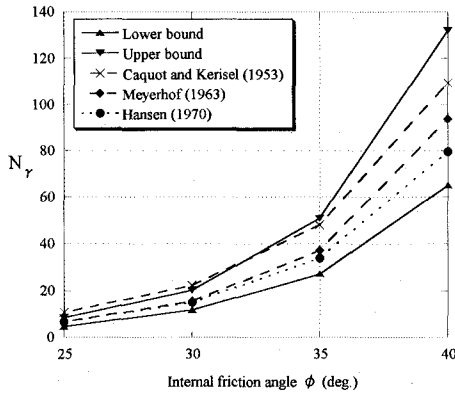


図-15 中心・鉛直荷重に対する支持力係数 N_γ と内部摩擦角 ϕ との関係 (Rough な剛性基礎)

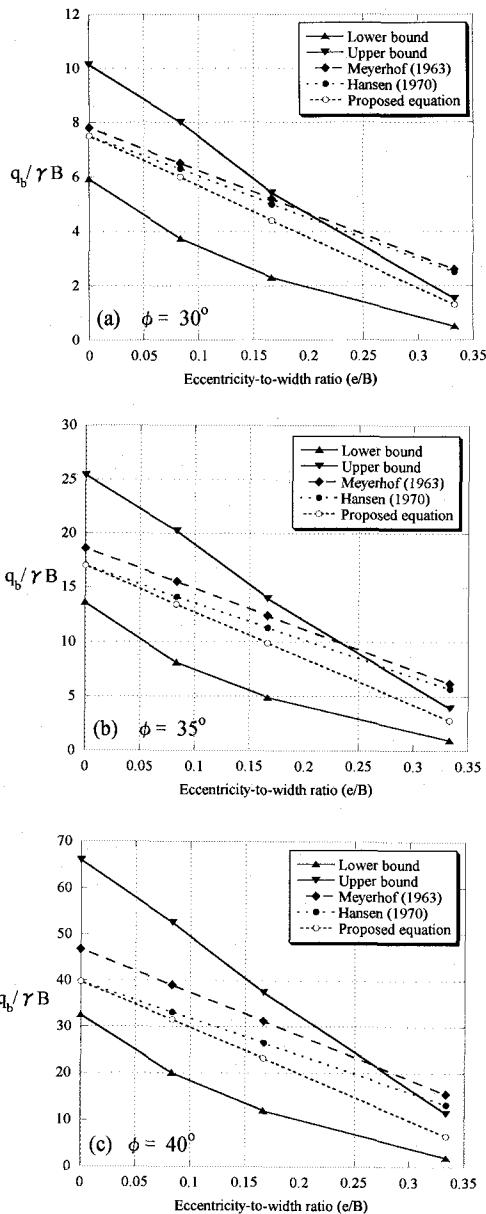


図-16 様々な内部摩擦角に対する $q_b / \gamma B$ と偏心率、基礎幅比 (e/B) との関係 ($\alpha=0^\circ$)

偏心および傾斜荷重を受ける砂質土地盤上での基礎の極限支持力 q_b を以下のように表現した。

$$q_b = \frac{1}{2} \gamma (B - 2e) \left(1 - \frac{\alpha}{\phi}\right)^2 N_\gamma \quad (\text{Meyerhof, 1963}) \quad (31)$$

$$q_b = \frac{1}{2} \gamma (B - 2e) (1 - 0.7 \tan \alpha)^5 N_\gamma \quad (\text{Hansen, 1970}) \quad (32)$$

ここに、 B : 基礎幅、 e : 偏心量、 α : 垂直線からの基礎上に作用する荷重の傾斜角、 ϕ : 砂質土の内部摩擦角並びに単位体積重量、 $B - 2e$: Meyerhof¹⁾ による有効基礎幅、式(31)と(32)の N_γ はそれぞれ式(28)と(29)によって与えられる支持力係数である。図-16 を見ると、式(31)と(32)によって計算された $q_b / \gamma B$ は偏心量が大い場合、 $e/B > 0.2$

($\phi=30^\circ$), $e/B > 0.25$ ($\phi=35^\circ$), $e/B > 0.3$ ($\phi=40^\circ$)、上界値より

りも大きいことがわかる。これらの解のみが下界値と上界値によって、挟み撃ちにされていないこともわかる。また、常に Meyerhof による解は Hansen による解よりも大きい。 ϕ が大きくなる時、Meyerhof と Hansen による解の差は、特に $e/B=0$ の時に大きいことがわかる。 e/B が増加するにつれて、Meyerhof と Hansen による解の差は徐々に小さくなっている。図-16 より、式(31)と(32)は偏心量が大きくなる時、支持力を解析結果の上界値より大きく評価する傾向が見られるので、ここでは偏心量が大い場合にも支持力が解析結果の上界値、下界値の間に入るように次式を提案するものとする。

$$q_b = \frac{1}{2} \gamma (B - 2.5e) (1 - \tan \alpha)^{2.5} N_\gamma \quad (33)$$

ここに、上式の N_γ は式(32)と同様に、式(29)によって与えられる支持力係数である。上式においては、式(31)と(32)と比較して、 $B - 2e$ の代わりに $B - 2.5e$ が用いられているのが特徴である。図-16 からは、式(33)で表される提案式は $e/B \leq 1/12$ の範囲内では Hansen による値と良く対応し、 $e/B > 1/12$ の領域では大まかに下界値と上界値の中央に位置してくることがわかる。

図-17 には $\phi=35^\circ$ の場合における $q_b / \gamma B$ と荷重傾斜

角 α との関係を示す。これを見ると、式(33)で表される提案式は大まかに下界値と上界値の中央に位置することがわかる。Meyerhof と Hansen による解は図-17(c), (d)で示される $e/B \geq 1/6$ になると、提案式よりも支持力を過大評価する傾向が見られる。特に、図-17(d)で示される $e/B = 1/3$ の時には、Meyerhof と Hansen により得られた値はどんな α に対しても上界値より大きくなっている。

以上より、数値極限解析からの結果である下界値、上界値は正解値を挟み撃ちにすることができるので、他の提案式などと比較した場合にベンチマークとなることができる。Meyerhof と Hansen による提案式は、偏心量が大い場合、特に $e/B \geq 1/3$ の時、支持力を解析結果の上界値より大きく評価する傾向があると考えられる。

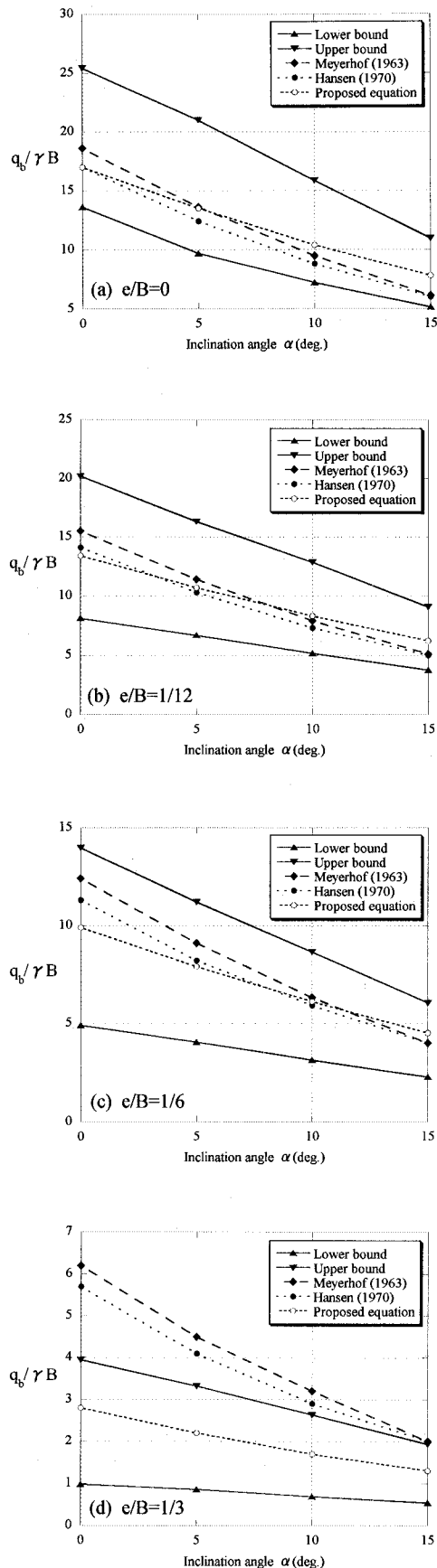


図-17 $\phi = 35^\circ$ における $q_b / \gamma B$ と荷重傾斜角 α との関係

5. 結論

本報告では数値極限解析を用いて、偏心および傾斜荷重を受けた砂地盤上の剛な基礎の支持力を解析した。その結果を Meyerhof^{d5)}と Hansen⁷⁾による提案式から計算された支持力と比較した。そして、本報告で示された偏心および傾斜荷重下の支持力問題に対する数値極限解析の定式化は、厳密な極限荷重に対して下界値と上界値を与えることもわかった。本報告から得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) 中心・傾斜荷重の場合、荷重が作用する方向の基礎端において、主に変位速度ベクトルと塑性領域は発達する。一方、偏心・鉛直荷重の場合、偏心量、基礎幅比(e/B)が徐々に増加する時、変位速度ベクトルは主に、基礎上において荷重が載荷されている側で観察される。塑性領域は荷重直下の領域でより顕著になる。
- 2) 下界解析からの基礎直下での垂直応力分布は、線形分布の仮定と比べて基礎中央で大きく、基礎端周辺で小さい。下界解析からの垂直応力の最大値は、線形分布の仮定で求めたものよりも大きい。
- 3) 支持力係数 N_γ に関しては、Caquot and Kerisel²⁰⁾, Meyerhof^{d5)}, Hansen⁷⁾の順に大きい。下界値と上界値は $\phi = 25^\circ$ と 30° の時の Caquot and Kerisel の値を除いて、すべての値を挟み撃ちにすることができた。下界値と上界値の差並びに、Meyerhof と Hansen による解の差は ϕ が大きくなるにつれて、徐々に大きくなる。
- 4) Meyerhof^{d1)}による有効基礎幅の仮定 $B - 2e$ を用いている Meyerhof^{d5)}と Hansen⁷⁾による提案式によって計算された支持力は、偏心量が大きくなる場合、特に $e/B \geq 1/3$ の時、解析結果の上界値より大きな支持力となる傾向がある。また、Meyerhof による解は常に Hansen による解よりも大きい。偏心量、基礎幅比(e/B)あるいは荷重傾斜角が大きくなる時、Meyerhof と Hansen による解の差は徐々に小さくなる。一般に、基礎の設計においては大きな偏心量は避けているので、Meyerhof^{d5)}と Hansen⁷⁾による不備は特に報告されていない。今回、偏心量が大きい場合にも解析結果の上界値、下界値の間に入るように新しい支持力式を提案した。これを用いると、大きな偏心量の時でも、妥当な支持力を計算することができる。
- 5) 数値極限解析は正解値が不明な安定解析での正解値を下界値、上界値とで挟み撃ちにして、その幅を狭めることにより工学的に十分精度のある解を求めることが可能である。さらに、本解析手法は数少ないパラメータで安定解析における正解値を正確に挟み撃ちにすることができるのみならず、速度場、応力場、塑性領域などの情報も得ることができる。ゆえに、一般的な境界値問題のみならず複雑な幾何条件に対しても適用可能であり、実務的な問題に対しても十分重要

な役割を果たすことができると考えられる。

謝辞

本研究は著者が Purdue University, USA を Visiting scholar として滞在していた時に主に行ったものである。著者に極限解析のオリジナルプログラムを快く提供し、有益な議論をいただいた Purdue University, Prof. Salgado に謝意を表します。

参考文献

- 1) Meyerhof, G. G.: The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads, *Proc. of 3rd ICSMFE*, Zürich, 1, 440-445, 1953.
- 2) Prakash, S. and Saran, S.: Bearing capacity of eccentrically loaded footings, *J. Soil. Mech. And Found. Engrg. Div.*, ASCE, 97(1), 95-117, 1971.
- 3) Purkayastha, R. D. and Char, A. N. R.: Stability analysis for eccentrically loaded footings, *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 103(6), 647-651, 1977.
- 4) Saran, S., Prakash, S. and Murty, A. V. S. R.: Bearing capacity of footings under inclined loads, *Soils Found.*, 11(1), 47-52, 1971.
- 5) Hanna, A. M. and Meyerhof, G. G.: Experimental evaluation of bearing capacity of footings subjected inclined loads, *Can. Geotech. J.*, 18, 599-603, 1981.
- 6) Saran, S. and Agrawal, R. K.: Bearing capacity of eccentrically obliquely loaded footing, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, 117(11), 1669-1690, 1991.
- 7) Hansen, J. B.: A revised and extended formula for bearing capacity, *Danish Geotech. Inst. Bull.*, 28, 5-11, 1970.
- 8) Peck, R. B., Hanson, W. E. and Thornburn, T. H.: *Foundation Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.
- 9) Hansen, J. B.: A general formula for bearing capacity, *Danish Geotech. Inst. Bull.*, 11, 38-46, 1961.
- 10) Sloan, S. W.: Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming, *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.*, 12, 61-77, 1988.
- 11) Sloan, S. W. and Kleeman, P. W.: Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields, *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 127, 293-314, 1995.
- 12) Ukritchon, B., Whittle, A. J. and Sloan, S. W.: Undrained limit analysis for combined loading of strip footings on clay, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 124(3), 265-276, 1998.
- 13) Sloan, S. W.: Limit analysis in geotechnical engineering, *Modern developments in geomechanics*, C. M. Haberfield, ed., Monash University, Melbourne, Australia, 167-199, 1995.
- 14) Sloan, S. W. and Yu, H. S.: Rigorous plasticity solutions for the bearing capacity factor N_γ , *Proc. of the 7th Australia-New Zealand Conf. on Geomechanics*, Adelaide, 544-550, 1996.
- 15) Meyerhof, G. G.: Some recent research on the bearing capacity of foundations, *Can. Geotech. J.*, 1(1), 16-26, 1963.
- 16) Yu, H. S., Salgado, R., Sloan, S. W. and Kim, J. M.: Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 124(1), 1-11, 1998.
- 17) Kim, J., Salgado, R. and Yu, H. S.: Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 125(1), 49-58, 1999.
- 18) Kim, J., Salgado, R. and Lee, J.: Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 128(7), 546-557, 2002.
- 19) Sloan, S. W.: A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 2671-2685, 1988.
- 20) Caquot, A. and Kerisel, J.: Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulent, *Proc. of 3rd ICSMFE*, Zürich, 1, 336-337, 1953.

(2003 年 9 月 12 日受付)