

鉛直方向加振を受ける円筒容器内容液の 1/2 分数調波振動

1/2 subharmonic oscillation of the liquid in a circular cylindrical tank forced to oscillate in vertical direction

高西照彦*

Teruhiko Takanishi

* 工博 九州工業大学名誉教授 (〒805-0035 北九州市八幡東区山路2丁目4-8)

Dynamic responses of the liquid in a circular cylindrical tank forced to oscillate in the vertical direction were analyzed theoretically by using the perturbation method proposed by Ockendon et al. The analytical study was carried out in the neighborhood of two times the first resonant frequency of the liquid in the tank. In that case, 1/2 subharmonic wave itself distinguished in the oscillation of the liquid. Numerical calculations were carried out. Harmonic response of wave height of liquid and dynamic water pressure on the side surface and the bottom of the tank were obtained. The numerical results agreed approximately with the results of experiments carried out by Dodge et al and Ikeda et al.

Key Words: circular cylindrical tank, vertical oscillation, perturbation method

1. まえがき

円筒形オイルタンク等が地震動を受けてその内容液がスロッシング振動する場合、水平方向入力に対する動的挙動の解析については数多くの研究がなされている。しかし、地震動は鉛直成分をも有しているため、鉛直方向入力に対しても動的解析を行うことが必要である。

図-1 に示すように、鉛直方向加振を受ける円筒形容器内容液の動的挙動の解析をするとき、線形理論を適用すれば、内容液の運動はマシュエの方程式によって支配されることになるが、よく知られているようにその解には無数の不安定領域が存在する。特に、内容液の1次の固有振動数及びその2倍の振動数近傍における内容液の動的挙動を明らかにすることは実用上にも重要なことであるが、これらの振動数の近傍には不安定領域が存在するために、線形理論を用いて解析を行うことは不可能である。

Dodge 等³⁾ 及び池田等²⁾ は摂動法を用いて3次のオーダーまでの非線形解析を行い、鉛直振動に対する表面波高及び壁面動水圧の動的応答を求め、さらに模型実験を行って理論解析の妥当性を確かめている。池田等の解析法は Dodge 等のそれと同じであり、この解析法においてはいずれもその理論式の誘導過程で煩雑な式を取扱うことが必要である。

Ockendon 等¹⁾ は、Dodge 等とは異なる摂動法を用いる解析法を示し、内容液の1次固有振動を1/2分数調波としてもつ場合について、振動の安定・不安定領域のみにについて簡潔に論じている。

本論は、Ockendon 等が示した摂動法を用いて、内容液の1次の固有振動数の2倍の振動数近傍に存在する不安定領域における内容液の非線形振動の解析を行い、その動的挙動を明らかにすることを目的としている。

なお、池田等が導いた理論式は非線形の連立方程式となり、その解を求めることは簡単ではない。これに対して、摂動法を用いて導いた本論の理論式は線形の方程式となるので、その解は解析解の形で容易に得ることができる。

また、理論を導く際に、解析の精度については池田等の場合と同程度の精度が得られるように、解析で採用する摂動項の項数を定めた。

2. 解析理論

2.1 基礎方程式

解析に際しては次のような仮定を採用した。内容液は完全流体で、非圧縮、渦無し流れである。このとき流体は速度ポテンシャルを有する。また、円筒容器に対する鉛直方向の加振振動数としては、内容液の1次の固有振動数の2倍近傍の振動数を考察の対象とする。この場合、その振動数は一般に低いので、容器は剛であるとみなしてもよい。

いま、速度ポテンシャルを $\tilde{\phi}$ とすれば、図-1 に示す円筒容器内容液の運動は次のラプラスの方程式及び圧力方程式によって支配される。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right\} + g \tilde{z} + \tilde{z} \tilde{a} \omega^2 \cos \omega \tilde{t} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{t}$ は時間、 g は重力の加速度、 $\tilde{a}$ は加振振幅、

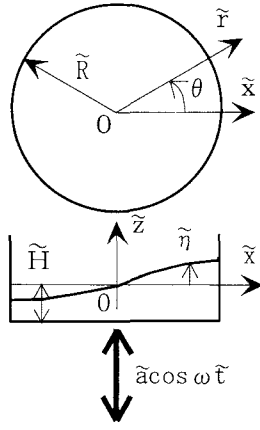


図-1 円筒容器及び座標系

ω は加振円振動数, ρ は内容液の密度, $\tilde{p}$ は水圧である. 境界条件は次の通りである.

(i) 容器底面において

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (\tilde{z} = -\tilde{H}) \quad (3)$$

(ii) 容器側壁面上において

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad (\tilde{r} = \tilde{R}) \quad (4)$$

(iii) 自由表面上における運動学的条件は, 波高を $\tilde{\eta}$ とすれば

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta}, \quad (\tilde{z} = \tilde{\eta}) \quad (5)$$

(iv) 力学的条件は, 式(2)において $\tilde{p} = 0$ 及び $\tilde{z} = \tilde{\eta}$ と置けばよいので, 次のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right\} + g\tilde{\eta} \\ + \tilde{\eta} \tilde{a} \omega^2 \cos \omega \tilde{t} = 0, \quad (\tilde{z} = \tilde{\eta}) \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 基礎方程式の無次元化と摂動展開

式(1), (3)~(6)に対して, 以下に示すような無次元化を行う. まず, 次式で表される無次元量を導入する.

$$\tilde{t} = t / \omega, \quad \tilde{R} = \mu_{11} R, \quad (7), (8)$$

$$\tilde{H} = HR, \quad \tilde{r} = rR, \quad (9), (10)$$

上式で, t, H, r, R が導入された物理量であり, $\tilde{t}, \tilde{H}, \tilde{r}$ は無次元量であるが, R は長さの次元を有する.

式(8)で, μ_{11} は $J'_1(\mu_{11}) = 0$ を満たす定数で, その値は $\mu_{11} = 1.8411 \dots$ である. ここで, 上付き添字 ' は微分を表す. さらに, $\tilde{a} / R$ の値は小さいとして

$$\varepsilon = \tilde{a} / R, \quad (11)$$

とおき, ε 及び式(8)の R を用いて $\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}, \tilde{z}$ を次式に示す

ように無次元化する.

$$\tilde{\varphi} = R^2 \omega \varepsilon \varphi \quad (12)$$

$$\tilde{\eta} = R \varepsilon \eta \quad (13)$$

$$\tilde{z} = zR \quad (14)$$

さて, 上記の無次元量を用いれば, 式(1)及び(3)~(6)は次のように表すことができる.

$$\varphi_{rr} + \varphi_r / r + \varphi_{\theta\theta} / r^2 + \varphi_{zz} = 0 \quad (15)$$

$$\varphi_z = 0, \quad (z = -H) \quad (16)$$

$$\varphi_r = 0, \quad (r = \mu_{11}) \quad (17)$$

$$\varphi_z = \eta_t + \varepsilon(\varphi_r \eta_r + \varphi_\theta \eta_\theta / r^2) + g\eta / R\omega^2 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t + (1/2)\varepsilon(\varphi_r^2 + \varphi_\theta^2 / r^2 + \varphi_z^2) + g\eta / R\omega^2 \\ + \varepsilon\eta \cos t = 0, \quad (z = \varepsilon\eta) \end{aligned} \quad (19)$$

上式で, 下付き添字は当該添字に関する偏微分を表す.

さて, 円筒容器内容液の1次固有円振動数を ω_{11} とすれば, それは次式によって与えられる.

$$\omega_{11}^2 = (g/R) \tanh H \quad (20)$$

いま, ω_{11} が $1/2$ の分数調波振動になるような場合について考えるとすれば, 加振円振動数 ω としてはそれが ω_{11} の2倍近傍で変化する場合を取扱えばよいので, δ を微少量として

$$\omega_{11} / \omega = 1/2 + \delta \quad (21)$$

と置くことにする. δ は ε のオーダーの微少量であるとして

$$\delta = \lambda \varepsilon \quad (22)$$

と置けば, $\lambda = O(1)$ である. ここに, O はランダウの記号を表す. このとき式(19)の左辺第3項は式(20), (21), (22)を用いて, 次式のように表すことができる.

$$g/R\omega^2 = (1/2 + \delta)^2 / \tanh H = (1/2 + \lambda\varepsilon)^2 / \tanh H \quad (23)$$

さて, φ, η に対する摂動解を得るために, Ockendon 等に従って, 摂動項 ε を用いてそれらをそれぞれ次式に示すように展開する.

$$\varphi = \varepsilon^{-1/2} \varphi_0 + \varepsilon^0 \varphi_1 + \varepsilon^{1/2} \varphi_2 + \varepsilon \varphi_3 \dots \quad (24)$$

$$\eta = \varepsilon^{-1/2} \eta_0 + \varepsilon^0 \eta_1 + \varepsilon^{1/2} \eta_2 + \varepsilon \eta_3 + \dots \quad (25)$$

次に, 式(18), (19)は $z = \varepsilon\eta$ において成立する境界条件であるが, これを以下に示すようにして $z = 0$ において成立する条件式に変換する.

いま, 式(19)中の φ_t を例にとれば, それは式(24)を参照して

$$\varphi_i = \varepsilon^{-1/2} \varphi_{0i} + \varepsilon^0 \varphi_{1i} + \varepsilon^{1/2} \varphi_{2i} + \varepsilon \varphi_{3i} + \dots \quad (26)$$

と表される。上式において、 φ_0, φ_{1i} 等をそれぞれ $z=0$ のまわりでテーラー展開すれば

$$\varphi_i = \varepsilon^{-1/2} \{ \varphi_{0i}^{(0)} + z \varphi_{0iz}^{(0)} + (1/2) z^2 \varphi_{0izz}^{(0)} + \dots \} + \varepsilon^0 \{ \varphi_{1i}^{(0)} + z \varphi_{1iz}^{(0)} + \dots \} + \varepsilon^{1/2} \{ \varphi_{2i}^{(0)} + \dots \} + \dots \quad (27)$$

となる。ここに、上付き記号(0)は当該関数の $z=0$ における値を表している。

上式で $z = \varepsilon \eta$ とおき、さらに、この η に式(25)を代入した後、 ε について整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_i = & \varepsilon^{-1/2} \varphi_{0i} + \varepsilon^0 (\eta_0 \varphi_{0iz} + \varphi_{1i}) + \varepsilon^{1/2} \{ \eta_1 \varphi_{0iz} \\ & + (1/2) \eta_0^2 \varphi_{0izz} + \eta_0 \varphi_{1iz} + \varphi_{2i} \} + \varepsilon (\eta_2 \varphi_{0iz} \\ & + \eta_0 \eta_1 \varphi_{0izz} + \dots) + \dots, \quad (z=0) \end{aligned} \quad (28)$$

式(18),(19)中の $\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z$ についても上式と同様な表示式が得られる。

次に、摂動法の考え方に従って、式(15)~(19)で表される基礎方程式に、式(24),(25)並びに式(28)及び同式と同様な展開表示をした $\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z$ を代入し、摂動項 ε について整理する。それぞれ同じ ε の指数をもつ項を示せば次の通りである。ただし、本論では $\varepsilon^{1/2}$ の項までを採用することにした。

(i) $\varepsilon^{-1/2}$ の項について

$$\varphi_{0rr} + \varphi_{0r}/r + \varphi_{0\theta\theta}/r^2 + \varphi_{0zz} = 0 \quad (a-1)$$

$$\varphi_{0z} = 0, \quad (z=-H) \quad (a-2)$$

$$\varphi_{0r} = 0, \quad (r=\mu_{11}) \quad (a-3)$$

$$\varphi_{0z} = \eta_{0i}, \quad (z=0) \quad (a-4)$$

$$\varphi_{0i} + \eta_0/4 \tanh H = 0, \quad (z=0) \quad (a-5)$$

(ii) ε^0 の項について

$$\varphi_{1rr} + \varphi_{1r}/r + \varphi_{1\theta\theta}/r^2 + \varphi_{1zz} = 0 \quad (b-1)$$

$$\varphi_{1z} = 0, \quad (z=-H) \quad (b-2)$$

$$\varphi_{1r} = 0, \quad (r=\mu_{11}) \quad (b-3)$$

$$\eta_0 \varphi_{0zz} + \varphi_{1z} = \eta_{1i} + \varphi_{0r} \eta_{0r} + \varphi_{0\theta} \eta_{0\theta}/r^2, \quad (z=0) \quad (b-4)$$

$$\eta_0 \varphi_{0iz} + \varphi_{1i} + \varphi_{0r}^2/2 + \varphi_{0\theta}^2/2r^2 + \varphi_{0z}^2/2 + \eta_1/4 \tanh H = 0, \quad (z=0) \quad (b-5)$$

(iii) $\varepsilon^{1/2}$ の項について

$$\varphi_{2rr} + \varphi_{2r}/r + \varphi_{2\theta\theta}/r^2 + \varphi_{2zz} = 0 \quad (c-1)$$

$$\varphi_{2z} = 0, \quad (z=-H) \quad (c-2)$$

$$\varphi_{2r} = 0, \quad (r=\mu_{11}) \quad (c-3)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \varphi_{0zz} + \eta_0^2 \varphi_{0zz}/2 + \eta_0 \varphi_{1zz} + \varphi_{2z} = & \eta_{2i} + \eta_{0r} (\eta_0 \varphi_{0rz} + \varphi_{1r}) \\ & + \eta_{1r} \varphi_{0r} + \eta_{0\theta} (\eta_0 \varphi_{0\theta z} + \varphi_{1\theta})/r^2 + \eta_{1\theta} \varphi_{0\theta}/r^2, \quad (z=0) \end{aligned} \quad (c-4)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \varphi_{0iz} + \eta_0^2 \varphi_{0izz}/2 + \eta_0 \varphi_{1iz} + \varphi_{2i} + \varphi_{0r} (\eta_0 \varphi_{0rz} + \varphi_{1r}) \\ & + \varphi_{0\theta} (\eta_0 \varphi_{0\theta z} + \varphi_{1\theta})/r^2 + \varphi_{0z} (\eta_0 \varphi_{0zz} + \varphi_{1z}) \end{aligned}$$

$$+ (\lambda/\tanh H + \cos t) \eta_0 + \eta_2/4 \tanh H = 0, \quad (z=0) \quad (c-5)$$

2.3 摂動方程式の解

前節で得られた $\varepsilon^{-1/2}, \varepsilon^0, \varepsilon^{1/2}$ の各項に対する摂動方程式の解は以下のように求めることができる。このとき、円筒容器内容液中には回転運動が生じていない場合について考えることにする。

(i) $\varepsilon^{-1/2}$ の項について

いまの場合、内容液の1次の固有振動を1/2分数調波として有する振動について考えているのであるから、式 $(a-1) \sim (a-3)$ を満足する解の内、1次振動が主要解になるとみてよいであろう。したがって、 $\varepsilon^{-1/2}$ の項については次式を近似解として採用することにした。

$$\varphi_0 = J_1(r) \cosh(z+H) \cos \theta T_0(t) \quad (29)$$

ここに、 $J_1(r)$ は第1種1次のベッセル関数、 $T_0(t)$ は時間の関数を表す。上式を用いれば、式 $(a-5)$ から η_0 を求めることができる。

$$\eta_0 = -4J_1(r) \sinh H \cos \theta T_0'(t) \quad (30)$$

T_0 については、式 $(a-4)$ の条件式を用いることによって、それは次式に示す微分方程式

$$T_0'' + \frac{1}{4} T_0 = 0 \quad (31)$$

を満足しなければならないことがわかる。したがって、いま、 C_0, D_0 を未知定数とすれば、上式の解は次式のよう表すことができる。

$$T_0 = C_0 \cos \frac{1}{2}t + D_0 \sin \frac{1}{2}t \quad (32)$$

なお、 C_0, D_0 の算定方法については次節で述べる。

(ii) ε^0 の項について

式 $(b-1) \sim (b-3)$ を満たす解は次のように表される。

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\kappa_{nm}r) \cosh \kappa_{nm}(z+H) \cos n\theta \\ & \bullet T_{nm}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

ここに、 $T_{nm}(t)$ は時間の関数であり、 κ_{nm} は第1種 n 次のベッセル関数 $J_n(\kappa_{nm}r)$ において

$$J_n'(\kappa_{nm}\mu_{11}) = 0 \quad (34)$$

を満たす定数である。 η_1 は式(33)の φ_1 を用いれば式 $(b-5)$ から得られる。

$$\begin{aligned} \eta_1 = & -4 \tanh H \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\kappa_{nm}r) \cosh \kappa_{nm}H \cos n\theta \right. \\ & \bullet T_{nm}'(t) + \frac{1}{2} \cosh^2 H \cos^2 \theta \{ (J_1'(r))^2 + (J_1(r) \tan \theta/r)^2 \\ & \left. + (J_1(r) \tanh H)^2 T_0^2(t) - (2J_1(r) \sinh H \cos \theta T_0'(t))^2 \} \right] \end{aligned}$$

(35)

さらに、式(b-4)から、 $T_{nm}(t)$ が満たさなければならぬ微分方程式が次式に示すように得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\kappa_{nm}r) \cosh \kappa_{nm}H \cos n\theta (T_{nm}'' + p_{nm}^2 T_{nm}) \\ &= \cosh^2 H \cos^2 \theta \{ J_1^2(r) - 2(J_1'(r))^2 - 3J_1^2(r) \tanh^2 H \} \\ & \quad \bullet T_0 T_0' - 2 \cosh^2 H \sin^2 \theta J_1^2(r) / r^2 T_0 T_0' \end{aligned} \quad (36)$$

ここに、

$$p_{nm}^2 = \kappa_{nm} H \tanh \kappa_{nm} H / 4H \tanh H \quad (37)$$

上式の右辺の3角関数を cosine 関数でフーリエ級数展開し、さらに、ベッセル関数をベッセル関数 $J_n(\kappa_{nm}r)$ でベッセル級数展開した後、両辺の $J_n(\kappa_{nm}r) \cos n\theta$ の各項に対する係数を互いに等置することによって、 $T_{nm}(t)$ をそれぞれ独立に定めることができる微分方程式が次のように得られる。

$n=0, 2, \dots, m=1, 2, \dots$ の場合

$$T_{nm}'' + p_{nm}^2 T_{nm} = E_{nm} T_0 T_0' \quad (38)$$

$n=1, 3, 4, 5, \dots, m=1, 2, \dots$ の場合

$$T_{nm}'' + p_{nm}^2 T_{nm} = 0 \quad (39)$$

式(38)の E_{nm} は

$$E_{nm} = \frac{\cosh^2 H}{2 \cosh \kappa_{nm} H} \{ (1 - 3 \tanh^2 H) \beta_{nm1} - 2 \beta_{nm2} \} \quad (40)$$

上式で、 β_{nm1} はベッセル級数展開における係数で、これについては付録に示している。

式(32)を用いれば、式(38),(39)の解はそれぞれ次式のように与えられる。

$$T_{nm} = \frac{E_{nm}}{4(p_{nm}^2 - 1)} \{ 2C_0 D_0 \cos t - (C_0^2 - D_0^2) \sin t \} \quad (41)$$

$$T_{nm} = C_{nm} \cos p_{nm} t + D_{nm} \sin p_{nm} t \quad (42)$$

ここに、 C_{nm}, D_{nm} は未知定数である。

(iii) $\varepsilon^{1/2}$ の項について

式(c-1) ~ (c-3) を満たす解は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\kappa_{nm}r) \cosh \kappa_{nm}(z+H) \cos n\theta \\ & \quad \bullet \bar{T}_{nm}(t) \end{aligned} \quad (43)$$

ここに、 $\bar{T}_{nm}(t)$ は時間の関数である。

次に、上式を用いれば η_2 は式(c-5)から得られる。

さらに、 $\varphi_0 \sim \varphi_2$ 、 $\eta_0 \sim \eta_2$ を用いれば、式(c-4)から $\bar{T}_{nm}(t)$ が満たさなければならぬ微分方程式が次のような形で得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\kappa_{nm}r) \cosh \kappa_{nm}H \cos n\theta (\bar{T}_{nm}'' + p_{nm}^2 \bar{T}_{nm}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [J_n(\kappa_{nm}r), \cosh \kappa_{nm}H, \sinh \kappa_{nm}H, \cos n\theta \\ & \quad , \sin n\theta \text{ から構成された式 }] + [J_1(r), \cosh H, \\ & \quad , \sinh H, \cos \theta, \sin \theta \text{ から構成された式 }] \end{aligned} \quad (44)$$

(ii) で述べたと同様に、上式の右辺の3角関数及びベッセル関数をそれぞれ cosine フーリエ級数、及びベッセル級数に展開して、両辺の $J_n(\kappa_{nm}r) \cos n\theta$ の各項に対する係数を互いに等置することによって、 $\bar{T}_{nm}$ をそれぞれ独立に定めることができる微分方程式が得られる。(n=1, m=1)の場合、すなわち、 T_{11} を除けば、これらの微分方程式はすべてその解析解を容易に求めることができる。 T_{11} については次式に示すように、それを定める微分方程式中に永年項が含まれている。

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}'' + \frac{1}{4} \bar{T}_{11} &= \sum_{s=1}^{\infty} \cosh \kappa_{0s} H [4 \bar{\beta}_{s11} \tanh H (\kappa_{0s} \tanh \kappa_{0s} H \\ & \quad + \tanh H) (T_0'' T_{0s}' + T_0' T_{0s}'') \\ & \quad - \kappa_{0s} \{ \bar{\beta}_{s11} (\tanh H \tanh \kappa_{0s} H - \kappa_{0s}) + 2 \bar{\beta}_{s12} \} T_0' T_{0s}' \\ & \quad - \kappa_{0s} \{ \bar{\beta}_{s11} (\tanh H \tanh \kappa_{0s} H - 1/\kappa_{0s}) + 2 \bar{\beta}_{s12} \} T_0 T_{0s}'] \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \cosh \kappa_{2s} H [4 \bar{\beta}_{s13} \tanh H (\kappa_{2s} \tanh \kappa_{2s} H \\ & \quad + \tanh H) (T_0'' T_{2s}' + T_0' T_{2s}'') \\ & \quad - \kappa_{2s} \{ \bar{\beta}_{s13} (\tanh H \tanh \kappa_{2s} H - \kappa_{2s}) + 2 \bar{\beta}_{s14} \} T_0' T_{2s}' \\ & \quad - \kappa_{2s} \{ \bar{\beta}_{s13} (\tanh H \tanh \kappa_{2s} H - 1/\kappa_{2s}) + 2 \bar{\beta}_{s14} \} T_0 T_{2s}'] \\ & \quad + \frac{1}{8} \sinh^2 H [8 \{ 3(3 + 4 \tanh^2 H) \gamma_{11} + 4 \gamma_{12} \} T_0 (T_0')^2 \\ & \quad - 3 \{ (2 + \tanh^2 H) \gamma_{11} + \gamma_{12} \} T_0^3] \\ & \quad + \frac{1}{8} \cosh^2 H [-8 \tanh^2 H (3 \gamma_{11} - 2 \gamma_{12}) T_0 (T_0')^2 \\ & \quad + \{ 3 \gamma_{11} \tanh^2 H + (1 - 2 \tanh^2 H) \gamma_{12} - \gamma_{13} \} T_0^3] \\ & \quad + 4 \tanh H (T_0'' \cos t - T_0' \sin t) + 4 \lambda T_0'' \end{aligned} \quad (45)$$

上式で、 $\bar{\beta}_{sli}, \gamma_{li}$ はいずれもベッセル級数展開における係数で、これについては付録に示している。

式(45)の微分方程式の一般解は自由振動解と強制振動解の和によって与えられる。自由振動解は $\cos(t/2)$ と $\sin(t/2)$ の項から成っている。他方、式(45)の右辺の強制力を表す項中の時間項 $T_0'' T_{0s}', T_0 (T_0')^2, T_0'' \cos t$ 等は、式(32)及び(41)を用いて変形を行ってみれば明らかなように、 $\cos(t/2)$ 及び $\sin(t/2)$ から成る項を含んでいる。したがって、強制振動解にはこれらの項に由来する永年項が存在することになる。これらの永年項の処理については次節に述べる。

2.4 未知定数 C_0, D_0 の決定及び C_{nm}, D_{nm} について

式(32)中の未知定数 C_0, D_0 は、式(45)の微分方程式の解が永年項を含まないという条件を課することによってこれを求めることができる。すなわち、式(45)の右辺の時間項中の $\cos(t/2)$ 及び $\sin(t/2)$ に掛かる係数をそれぞれ0と置けばよい。これより、次式に示すような C_0, D_0 に関する連立方程式が得られる。

$$D_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\tanh H} - \tilde{A}(C_0^2 + D_0^2) \right\} = 0 \quad (46)$$

$$C_0 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\tanh H} + \tilde{A}(C_0^2 + D_0^2) \right\} = 0 \quad (47)$$

$$\text{ここに, } \tilde{A} = A_1 + A_2 - (B_1 + B_2) \quad (48)$$

$$A_1 = \frac{\sinh^2 H}{32 \tanh H} (15\gamma_{11} \tanh^2 H - \gamma_{12}) \quad (49)$$

$$A_2 = \frac{\cosh^2 H}{32 \tanh H} \{ 3\gamma_{11} \tanh^2 H + \gamma_{12} (3 - 2 \tanh^2 H) - 3\gamma_{13} \} \quad (50)$$

$$B_1 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^{\infty} \{ 4(\kappa_{0s} \tanh \kappa_{0s} H + \tanh H) - 2 \frac{\kappa_{0s}^2 - 1}{\tanh H} \} \bar{\beta}_{s11} \frac{E_{0s}}{4(p_{0s}^2 - 1)} \cosh \kappa_{0s} H \quad (51)$$

$$B_2 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^{\infty} \{ 2(\kappa_{2s} \tanh \kappa_{2s} H + \tanh H) - \frac{\kappa_{2s}^2 - 1}{\tanh H} \} \bar{\beta}_{s13} \frac{E_{2s}}{4(p_{2s}^2 - 1)} \cosh \kappa_{2s} H \quad (52)$$

式(46),(47)の連立方程式を解くことによって C_0, D_0 が得られて、次式のように表される。

$\tilde{A} > 0$ のとき、 $\delta > -\varepsilon \tanh H / 2$ の条件の下に

$$C_0 = 0$$

$$D_0 = \sqrt{\frac{1}{\tilde{A}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon \tanh H} + \frac{1}{2} \right)} \quad (53)$$

$\tilde{A} < 0$ のとき、 $\delta < \varepsilon \tanh H / 2$ の条件の下に

$$C_0 = \sqrt{\frac{1}{\tilde{A}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon \tanh H} - \frac{1}{2} \right)} \quad (54)$$

$$D_0 = 0$$

次に、式(42)の未知定数 C_{nm}, D_{nm} については、それを定めるためには ε^1 の項までを考慮することが必要である。しかし、先に述べたように、本論では $\varepsilon^{1/2}$ の項までを考慮した解を求めることにしているので、 C_{nm}, D_{nm} に関

してはこれ以上言及しないことにする。

2.5 波高及び動水圧

(a) 波高について

波高については、それを水深で基準化して表せば、式(13),(25)を用いて

$$\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{H}} = \frac{\varepsilon}{H} (\varepsilon^{-1/2} \eta_0 + \varepsilon^0 \eta_1 + \dots) \quad (55)$$

1次固有振動のみを考慮した場合には、上式は式(30),(35)を用いて

$$\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{H}} = -\frac{2}{H} \left[2\varepsilon^{1/2} J_1(r) \sinh H \cos \theta T'_0(t) + \varepsilon \sinh H \cosh H \cos^2 \theta \left\{ (J'_1(r))^2 + (J_1(r) \tan \theta / r)^2 + (J_1(r) \tanh H)^2 \right\} T_0^2(t) - 8(J_1(r) \tanh H T'_0(t))^2 \right] \quad (56)$$

と表される。壁面における波高を求めるには、上式で $r = \mu_{11}$ とすればよい。

(b) 動水圧について

$$\text{動水圧を } \tilde{\sigma} \text{ とすれば, } \tilde{p} = -\rho g \tilde{z} + \tilde{\sigma} \quad (57)$$

と書くことができるから、この $\tilde{p}$ を式(2)に代入することによって、 $\tilde{\sigma}$ を求める式が得られる。いま、動水圧を、底面における静水圧 $\rho g \tilde{H}$ を用いて基準化し、さらに ε の項までを採用した場合について示せば、次の通りである。

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\rho g \tilde{H}} = -\varepsilon \frac{\tanh H}{H} \left(\frac{\omega}{\omega_{11}} \right)^2 \left\{ \varepsilon^{-1/2} \varphi_{0r} + \varphi_{1r} + \frac{1}{2} (\varphi_{0r}^2 + \varphi_{0\theta}^2 / r^2 + \varphi_{0z}^2) + z \cos t \right\} \quad (58)$$

水平方向の全壁面動水圧 $\tilde{P}_H$ は

$$\tilde{P}_H = \int_{-\tilde{H}}^{\tilde{\eta}} \int_0^{2\pi} \tilde{\sigma}(r = \mu_{11}) \tilde{R} \cos \theta d\theta d\tilde{z} \quad (59)$$

底面上の全動水圧 $\tilde{P}_V$ は

$$\tilde{P}_V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\tilde{R}} \tilde{\sigma}(\tilde{z} = -\tilde{H}) \tilde{r} d\tilde{r} d\theta \quad (60)$$

で与えられる。いま、これを、内容液をすべて固定水と見なした場合の慣性力の最大値 $\rho \pi \tilde{R}^2 \tilde{H} \tilde{\alpha} \omega^2$ で基準化して表せば、上式はそれぞれ次式のようにになる。

$$\frac{\tilde{P}_H}{\rho \pi \tilde{R}^2 \tilde{H} \tilde{\alpha} \omega^2} = -\frac{\varepsilon^{-1/2}}{\mu_{11} H} J_1(\mu_{11}) \sinh H T'_0(t) \quad (61)$$

$$\frac{\tilde{P}_V}{\rho \pi \tilde{R}^2 \tilde{H} \tilde{\alpha} \omega^2} = -\frac{1}{8H} \left\{ J_0^2(\mu_{11}) + J_1^2(\mu_{11}) + J_2^2(\mu_{11}) - J_1(\mu_{11}) J_3(\mu_{11}) \right\} T_0^2(t) + \cos t \quad (62)$$

3. 数値計算及び実験値との比較

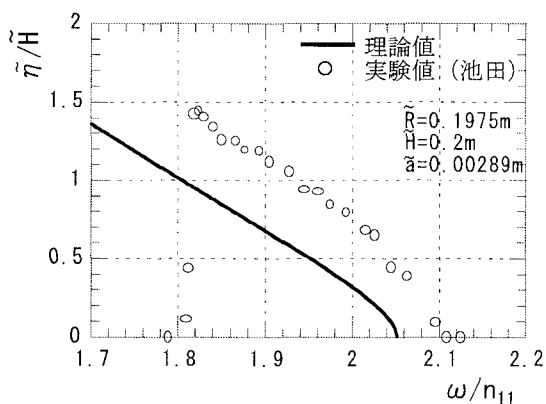
本章においては、まず、本論で導いた理論式を用いて数値計算を行い、得られた結果を既に他の著者によって公表されている実験結果と比較することによって、本理論式が、円筒容器内容液の鉛直方向加振時に生じる非線形動的現象をどの程度説明することができるかについて検討を行った。公表された実験結果としては（１）池田等²⁾によるものと（２）Dodge 等³⁾によるものを取り上げた。なお、実験値については、当該論文からの図面から直接読み取った値を用いた。

さらに、２、３の数値解析を行って、内容液の非線形振動現象に関して若干の考察を行った。

3.1 池田等による実験結果との比較

池田等は、直径の異なるいくつかの円筒容器を用いて、水深をいろいろ変えた場合について、水平方向及び鉛直方向加振実験を行っている。鉛直加振実験においては、直径 39.5 cm の円筒容器を振動台上に設置して、水深を 20 cm とした場合について定常加振を行い、波高及び壁面動水圧の振動数応答と波高分布及び壁面動水圧分布を計測している。

図－２は、加振振幅が 0.289 cm の場合における壁面の最大波高の振動数応答曲線を示したもので、○印が池田等の実験結果、実線が本論による理論値である。加振振動数は内容液の１次の固有円振動数を用いて、波高は水深を用いてそれぞれ基準化している。理論値は実験値に比べてその値は小さいが、振動数に対する波高応答の変化の傾向はよく一致しているといえる。なお、実験においては、 ω/n_{11} が 1.82 付近で応答に跳びが生じており、それより小さな振動数では応答が 0 になっている。

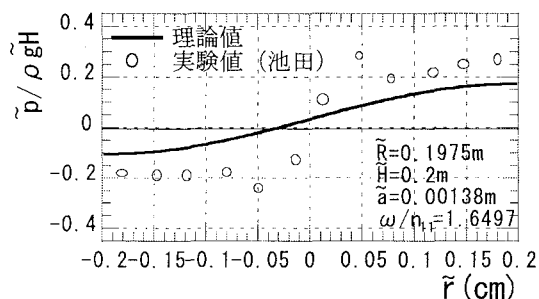


図－２ 壁面波高の振動数応答曲線

しかし、理論ではこの跳びが生ずる振動数を特定するこ

とができない。また、同図から、応答値が 0 から立上りを生ずる振動数に関して、理論値の方が実験値に比べて小さいことがわかる。このことは後述の Dodge 等の実験結果と比較した場合についても同じことが云える。

図－３は $\omega/n_{11}=1.6497$ における底面動水圧の分布曲線を示したもので、底面動水圧が最大となる $\theta=0$ の直径上における値をプロットしている。この場合についても、全体として分布曲線の変化の形は似ているといえるが、その絶対値については理論値の方が実験値よりも小さくなっている。



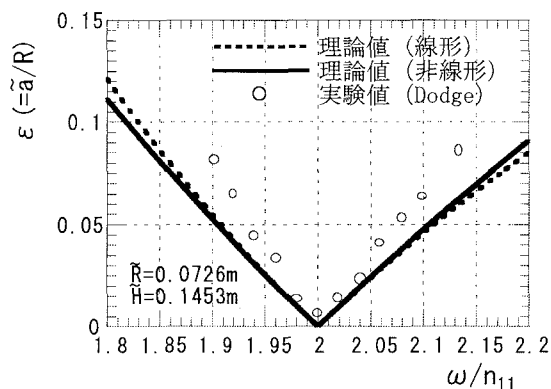
図－３ 底面動水圧の分布曲線

なお、本解析よりさらにもう 1 つ高次の振動項までを採用した場合には、その結果得られる波高及び動水圧の理論値はより大きな値となり、実験値に近付くと考えられる。

3.2 Dodge 等による実験結果との比較

Dodge 等は直径 5.72 in の円筒容器を用い、水深が 5.72 in と 1.43 in の 2 通りの場合について、鉛直方向定常振動実験を行って、表面波高応答及びその安定・不安定境界を求めている。

図－４は $\omega/n_{11}=2$ 近傍において応答に安定並びに不安定現象が生ずる境界線を示したものである。図の横軸は 1 次の固有円振動数で基準化した加振振動数比であり、



図－４ 安定・不安定境界

縦軸は摂動項として選んだ $\varepsilon (= \tilde{a}/R)$ である。図中、○印は表面波高の定常応答実験によって求められた境界値であり、実線は式(53),(54)に対する条件式として示した $\delta = \pm \varepsilon \tanh H/2$ を用いて求めた直線、点線は振動現象を線形として取扱ったときに導かれるマシュウの方程式を用いて求めた境界線である。V 字形を示す境界線の内部が不安定領域を、外部が安定領域を示している。

理論的に求めた境界線については (i) V 字形の下端は両者共に $\omega/n_{11}=2$ において $\varepsilon=0$ である (ii) ε が小さいとき、すなわち加振振幅が小さいときには両者はほとんど一致しているが、 ε が大きくなると両者の差が少しずつ大きくなっていき、本論によって求めた境界線が線形解析によって求めたそれに対し、V 字の下端を中心として左回りに僅かに回転したような形になる。

実験値を連ねた境界線によって生ずる不安定領域は、理論値によるものと比べてその領域が狭いこと、また、前者の V 字形の下端は丸みを帯びており、さらにその先端は $\omega/n_{11}=2$ 近傍において $\varepsilon=0$ とはならず、 $\varepsilon>0$ であることがわかる。本論では示さなかったが、上記のことは、理論式の中で内容液の振動に減衰を考慮した場合、(i) 不安定領域が狭くなる (ii) V 字形の先端が丸みを帯びる (iii) $\omega/n_{11}=2$ 近傍において $\varepsilon=0$ とはならず、 $\varepsilon>0$ であるという結果が得られることと符合している⁴⁾。

図-5 は加振振幅をいろいろ変えた場合について、壁面波高の振動数応答曲線を描いたもので、それぞれ直線、一点鎖線、点線が理論値を、△、□、○が実験値を示している。縦軸の波高 $\tilde{\eta}$ としては、測点 $\tilde{r}/\tilde{R}=0.871$ 、 $\theta=0$ において、波高応答が最大値を取る位相のときとそれと π だけ位相が異なるときの波高応答の絶対値との平均値を採用している。

理論値と実験値とを比較すれば、図-2 の場合と同様

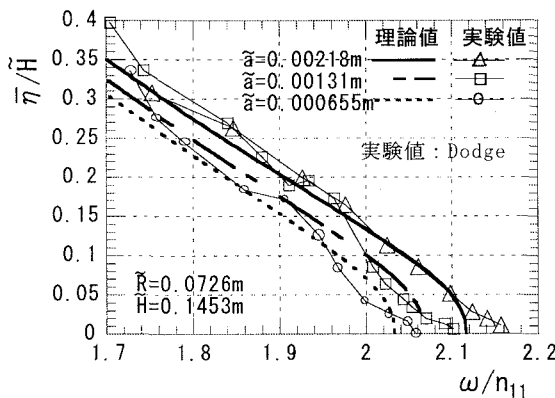


図-5 波高の振動数応答曲線

に、全体として前者の方が後者より小さいが、その差は図-2 の場合ほど大きくはない。それは、図-5 においては、図-2 の場合と違って波高として互いに逆位相となる波高の絶対値の平均を採用したことで、算出された実験値が図-2 の場合の表現と比べて多少小さ目の値となったために、理論値との差があまり強調されない結果をもたらしたのであろうと考えられる。

図-6 は $\varepsilon=0.0165$ 、 $\omega/n_{11}=2$ の場合に、 $\theta=0$ の直径上における表面波高の形状を示したものである。図の縦軸には、図-5 の場合と同じ方法で算出した平均波高 $\tilde{\eta}$ をその最大値 $\tilde{\eta}_{\max}$ で基準化した平均波高比を取っている。図から判断すれば、理論値と実験値とは比較的よく一致しているといってもよいであろう。

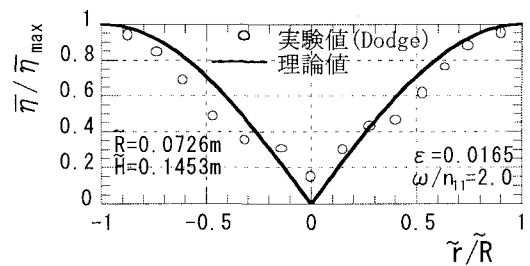


図-6 表面波高の分布曲線

3.3 数値計算例

図-7 は、池田等の実験と同じ円筒容器及び水深（直径 39.5 cm、水深 20 cm）の場合について、加振振幅をいろいろ変えたときの水平方向（実線）及び底面（点線）

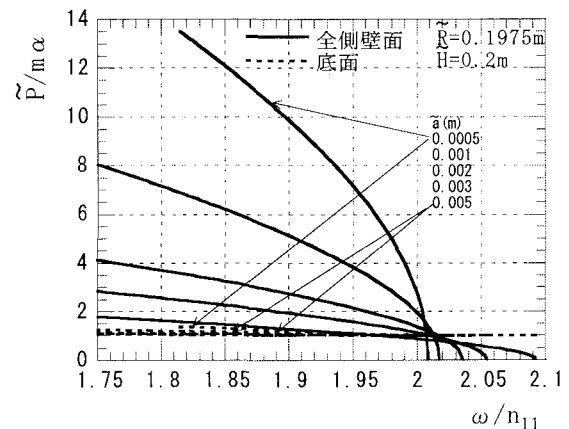


図-7 全壁面動水圧の振動数応答曲線

に対する全壁面動水圧の振動数応答曲線を示したものである。縦軸の全動水圧は内容液の質量 $m (= \rho \pi \tilde{R}^2 \tilde{H})$ に比例する慣性力 $m\alpha$ ($\alpha = \tilde{a}\omega^2$) で基準化してある。同図より、底面の全動水圧比 $\tilde{P}_b/m\alpha$ は加振振動数が変化してもその値は殆ど 1（非線形性のため、1 より極く僅か

に大きな値となっている)に保たれていることがわかる。これは、鉛直振動においては内容液は殆ど全て固定水として容器と一緒に振動しているということを表している。

加振振動数が減少して行く場合、水平方向の全壁面動水圧 $\tilde{P}_H$ はそれぞれ加振振幅の大きさに応じて跳びを生じ、その値が殆ど0になる振動数が存在する筈であるが、図-2の説明の際に既に述べたように、本理論ではこの跳びが生ずる振動数を特定することはできない。

図-8は加振振動数を $\omega/n_{11}=2$ として、加振振幅をいろいろ変えたときの壁面波高の時刻歴応答曲線を示したものである。同図から加振振動数が1次の固有振動数の2倍であるにも拘らず、表面波の応答は加振振動数と同じ振動数をもつ振動成分は小さく、加振振動数の1/2の振動数をもつ1/2分数調波が卓越していることがわかる。このことは、池田等²⁾ および Dodge 等³⁾ の論文で既に指摘されている通りである。

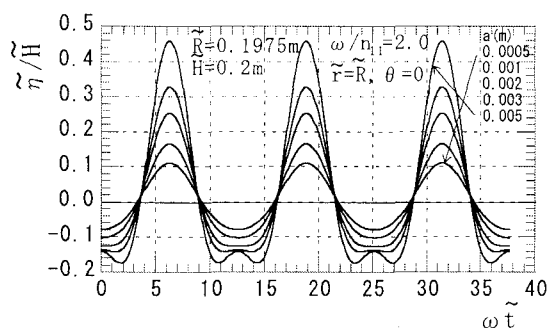


図-8 壁面波高の時刻歴応答曲線

上記の3.1, 3.2, 3.3に示したことを考慮すれば、円筒容器内容液の鉛直方向振動において、内容液の1次の固有振動を1/2分数調波としてもつ振動現象を解析するには、本論で示したように、1次の固有振動のみを採用すれば1次近似的にはそれで十分であるといえる。

4. おわりに

本論においては、円筒容器内容液がその1次の固有振動数の2倍の振動数近傍で鉛直方向定常加振を受けた場合の非線形動的挙動を、Ockendon 等が提案した摂動法を用いて解析し、内容液の振動によって生じる表面波高及び動水圧応答を容易に求めることができる解析解を導き、数値計算を行って得られた結果を既に公表された実験結果と比較して2,3の検討を行った。

得られた主な結果を示せば以下の通りである。

(1) 摂動法においては1次近似として、内容液の1次

の固有振動のみを採用して解析解を導いたが、この解による数値計算の結果は、表面波高及び壁面動水圧に関して他の著者の実験によって得られた結果と比較的よく一致しているといえる。ただし、比較を行った全ての場合について理論値の方が実験値より多少小さな値となっている。

(2) 内容液がその1次の固有振動数の2倍の振動数近傍で鉛直方向に加振された場合、内容液の応答は1/2分数調波が卓越する。したがって、内容液の1次振動のみを採用した近似的な解析法によっても、内容液の非線形動的挙動をかなりよく表現することができる。

(3) 1次の固有振動数の2倍の振動数近傍に存在する安定領域と不安定領域の境界線については、マシュエの方程式を用いて求めた線形解と本論の非線形解とは、入力振幅が小さい範囲において両者の差は小さい。他方、実験値を連ねてできるV字形境界線は、その内部の不安定領域が理論値のそれより多少狭くなっており、V字形の下端は僅かに丸みを帯びているといえる。理論と実験の結果にこのような差が生じたのは、内容液の減衰作用がその主な原因の1つであると考えられる。

(4) 鉛直方向加振を受ける円筒容器内容液は、それ自体ほとんどすべて固定水として働いているといえる。

なお、オイルタンク等が地震動を受けた場合、その水平成分によって内容液にスロッシング振動が生ずるが、しかし、また、本論で示したように、その鉛直成分によってもスロッシングが生ずる可能性がある。現実には両者の現象が重ね合わされて内容液のスロッシング波高が増大している場合もあると考えられる。このような問題を解決するためには水平方向の入力と鉛直方向のそれとを同時に考慮した解析を行う必要があるが、それについては今後に残された研究課題であると考えている。

付録

$$(a) \quad J_1^2(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{0m1} J_0(\kappa_{0m} r)$$

$$(b) \quad (J_1'(r))^2 + J_1^2(r)/r^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{0m2} J_0(\kappa_{0m} r)$$

$$(c) \quad J_1^2(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m1} J_2(\kappa_{2m} r)$$

$$(d) \quad (J_1'(r))^2 - J_1^2(r)/r^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m2} J_2(\kappa_{2m} r)$$

$$(e) \quad J_1(r) J_0(\kappa_{0s} r) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_{sm1} J_1(\kappa_{1m} r)$$

$$(f) \quad J_1'(r) J_0'(\kappa_{0s} r) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_{sm2} J_1(\kappa_{1m} r)$$

$$(g) \quad J_1(r) J_2(\kappa_{2s} r) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_{sm3} J_1(\kappa_{1m} r)$$

$$(h) \quad J_1'(r) J_2'(\kappa_{2s} r) + \frac{2}{\kappa_{2s} r^2} J_1(r) J_2(\kappa_{2s} r) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_{sm4} J_1(\kappa_{1m} r)$$

$$(i) \quad J_1^3(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m1} J_1(\kappa_{1m} r)$$

$$(j) \quad 3J_1(r)(J_1'(r))^2 + J_1^3(r)/r^2 \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m2} J_1(\kappa_{1m} r)$$

$$(k) \quad 6(J_1'(r))^2 J_1''(r) + J_1'(r)(J_1^2(r)/r^2)'$$

$$+ 2J_1(r) \left\{ (J_1'(r))^2 - J_1^2(r)/r^2 \right\} / r^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m3} J_1(\kappa_{1m} r)$$

参考文献

- 1) J.R.Ockendon and H.Ockendon: Resonant surface waves, J.Fluid Mech., vol.59, part2, 1973.
- 2) 池田駿介・秋山成興・中村広昭・白井伸一：円筒タンク内の液体動揺に関する研究，土木学会論文報告集，第290号，1979.10.
- 3) F.T.Dodge, D.D.Kana and N.Abramson: Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers, AIAA Journal, vol.3, No.4, 1965.4.
- 4) 樺木義一：非線形振動論，共立出版，pp.81-83, 1968.

(2003年9月12日受付)