

直交異方性材としての木質系はりの HPM による破壊解析

Fractural Analysis of Timber Beams with the Orthotropic Anisotropy by using HPM

大木裕久*, 竹内則雄**, 辻野哲司***

Hirohisa Ohki, Norio Takeuchi, Tetsuji Tsujino

* 修(工) 法政大学大学院, 工学研究科建設工学専攻 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2)

**工博, 法政大学教授, 工学部土木工学科 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2)

*** 農博, 岩手大学教授, 教育学部技術科 (〒020-8550 岩手県盛岡市上田 3-18-33)

This paper presents fractural analysis of timber beam with orthotropic anisotropy by using Hybrid-type Penalty Method (HPM). In RBSM, we set the effect of orthotropic anisotropy against to the spring on element boundary. So, it is necessary to regard the meshing division. On the other hands in HPM, It is possible to deal with the orthotropic anisotropy on each element because of having element stiffness. On the other word, we can treat the orthotropic anisotropy without regarding the meshing division. And also, in experimental result, it is said that tensile crack is arise from the corner at the notch along the fiber. In RBSM, it is obtained the same result to the experiment. As a result of comparing the RBSM and experiment, we obtained the similer cracking pattern.

Key Words: anisotropy, HPM, timber beam, tensile crack, compressive failure

1. はじめに

木材は通常, 3 軸直交異方性材料とみなされ, 繊維(L)方向, 半径(R)方向, 接線(T)方向の 3 つの基本軸を定めて, LR, LT, RT 面をそれぞれ, まさ目面, 板目面, 木口面と呼んでおり, これらに対して力学的な考察がされる。しかし, 実大材では, 年輪が明瞭な円弧状になり, 節や繊維走行の乱れなどによって, 特に心持ち材(髄を含む材)のような場合には, 純粋な 3 軸直交異方性材料とはみなしにくくなる。そこで, 実際は繊維方向を縦方向(繊維方向), 半径, 接線方向の 2 方向を一括して単に横方向(繊維直角方向)と呼んでいる[1]。木材は繊維に対しては強い材で特に引張強さは優れており, 鋼と木材を比強度で比較すると圧倒的に重さのわりに強い材であり, 圧縮に対してもコンクリートと比強度で比較して, 木材の方が数倍強いことが知られている。

ところで, 木材は, 切欠きを持つ部材が外力を受けると, 切欠き部に応力集中が生じ, 著しく強度低下が起き, 破壊に至る。このため, 切欠きを有する木材は, はり材として使用するのとは好ましくない。杉山ら[2]は切欠きの存在によって耐力がどの程度減少するかといった観点から, えぞまつを用いた実物大の実験を行い, 欠き込みの影響について検討を行っている。また, 平井ら[3]は切欠き深さによる強度の低下を実験的に検討しており, 増田[4]は破壊力学の立場から解析的な検討を行っている。さらに, 竹内[5]は切欠

き深さが大きい場合, 強度低下の要因の 1 つは繊維方向に沿った引張クラックによるものと考え, 小規模実験と RBSM (Rigid Bodies-Spring Model)[6]による解析を行い, 破壊モードとクラック発生荷重について検討を行っている。RBSM は, 要素境界面上でエネルギーを評価するため, 引張破壊やすべりなどの不連続性の導入が容易であるが[7], 要素を剛体と仮定しているため, 異方性の表現には工夫が必要である。竹内らの解析では, 要素境界辺に設けられたばねに異方性を持たせ, 要素分割を工夫することで, 木材における繊維構造によって生ずる異方性を取り入れている。

一方, ハイブリッド型の変分原理では, 変位の連続性を若干緩め, 付帯条件を Lagrange の未定乗数によって変分表示に導入している。この未定乗数は要素境界面上の表面力という物理的な意味を有しており, 変位場は要素毎に独立に仮定することができる[8]。竹内らはこのハイブリッド型変位モデルの考え方に着目し, Lagrange の未定乗数にばねの考え方を導入し, ばね定数としてペナルティを用いる方法としてハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type Penalty Method)を開発した[9]。この方法は, RBSM と同様に要素境界辺上で破壊を取り扱えるばかりでなく, 要素内剛性も評価することができる。

そこで, 本研究では, 異方性を有する木質系材料の破壊解析を行うため, この HPM の要素内剛性に直交異方性の概念を取り込む方法を提案する。さらに, 要素間での引張

破壊に加え、要素内での圧縮破壊を考慮した非線形解析法を提案し、簡単な模型実験や RBSM による解析と比較検討を行う。

2. 実験方法

(1) 実験供試体

杉山ら[2]はえぞまつを用い、一方、増田ら[4]はべいまつを用いて実物大実験を行っている。本研究では、増田らの行った実験と同様にべいまつを用いた。

本研究で用いた実験供試体を図-1 に示す。供試体は、まさ目木取りを行ったまさ目板を、上下面が板目、側面がまさ目となるよう、裂いて作成した。供試体の寸法は、幅 $b=20\text{mm}$ 、高さ $h=30\text{mm}$ 、長さ 500mm (スパン $L=450\text{mm}$) とし、スパン中央部に高さ $h_n=15\text{mm}$ (梁たけの $1/2$)、幅 6mm (スパン方向) の直方体状の切欠きを引張側に設けた。この時、梁せい(h)から切欠き高さ(h_n)を引いた高さ $h_e(h_e=h-h_n)$ を有効梁せいと呼ぶ。荷重方法に関しては、はりの両支点からスパン $1/3(750\text{mm})$ の距離のところに集中荷重(2点)を与え、荷重板と供試体の間に丸鋼を挿入して荷重が供試体に伝わるようにした。また、たわみに関しては、切欠き部に設置した変位計より測定する。

(2) 実験結果

実験は 10 本の供試体について行った。写真-1 は、荷重後に切欠き先端から繊維方向に引張クラックが発生し、荷重部付近に到達した状態を示したものである。

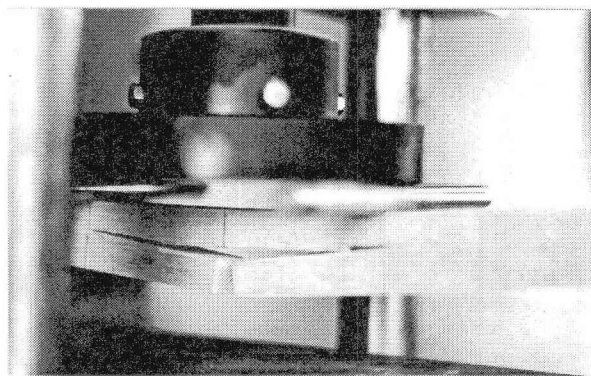


写真-1 水平（繊維）方向へのクラック発生時

また、写真-2 は除荷状態を、写真-3 は崩壊後の状態を示したものである。実験では、左右対称の破壊形状にはならず、供試体右側が切欠き先端から水平方向に引張クラックが発生し、荷重板付近で繊維直角方向にクラックが進展し、その後、破壊に至った。一方、供試体左側は切欠き先端から水平方向にクラックが進展し、荷重板付近での破壊は見られなかった。これは、実験方法の誤差によるものであり、完全な左右対称の破壊は見られなかったが、どのケースも荷重部付近で崩壊に至るという傾向を示した。

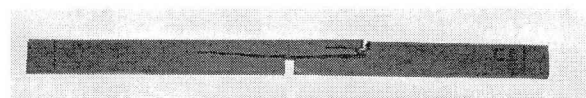


写真-2 除荷時の状態

平均的な引張クラックの破壊モードを図-2 に示す。引張クラックは切欠き先端から繊維方向に沿って $30\text{mm} \sim 40\text{mm}$ 程度進展し、その後、荷重部へ向かって有効梁せい(h_e)を減少させるように斜めに進展する傾向が見られ、荷重部付近での有効梁せい(h_e)は 13mm 程度となった。この破壊形状は杉山ら[2]の実物大実験においても同様の傾向が得られている。

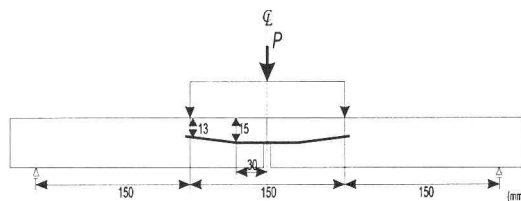


図-2 実験による破壊モード

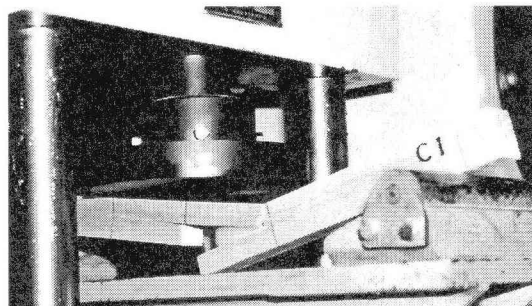


写真-3 崩壊後の状態

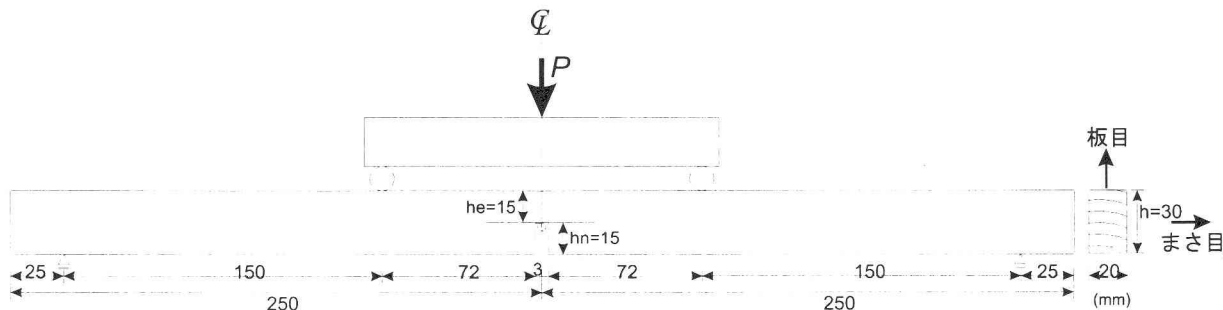


図-1 実験供試体

また、引張クラックが載荷部まで進展した時点の荷重は $490.5 \pm 49.05 \text{ N}$ であり、この時点で水平方向の破壊は進展しなくなる。その後、荷重は徐々に上昇し、最終的に $711.2 \pm 73.57 \text{ N}$ で崩壊に至った。たわみに関しては、5本の供試体より測定した結果、 $14.5 \sim 21.0 \text{ mm}$ となった。

3. 基礎方程式とハイブリッド型仮想仕事の原理

弾性問題の基礎方程式は次式で与えられる。

$$(\text{釣り合い方程式}) \quad L^t \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$(\text{応力 - ひずみ関係}) \quad \sigma = D \epsilon \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$(\text{ひずみ - 変位関係}) \quad \epsilon = L u \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

ここで、 u , ϵ , σ は、それぞれ、変位、ひずみ、応力ベクトルであり、 D は構成行列、 f は物体力を表している。また、 L は微分作用素であり、 Ω は境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ で囲まれた領域、もしくは体積である。ただし、 Γ_u は変位が与えられる境界、 Γ_σ は表面力が与えられる境界で、以下の力学的条件および幾何学的境界条件を満たしている。

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (4)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (5)$$

ここで、 T は単位面積当りの表面力で、 $T = n \sigma$ であり、 n は境界上の外向き法線ベクトルである。また、上付の $\bar{\cdot}$ は既知量を表している。

いま、図-3 の領域 Ω は境界 $\Gamma^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)}$ から構成されているものとする。すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (6)$$

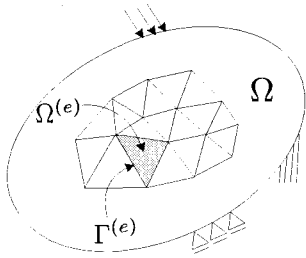


図-3 部分領域 $\Omega^{(e)}$ とその境界 $\Gamma^{(e)}$

このとき、仮想仕事式は各部分領域の和として以下のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [L \delta u]^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma \right) = 0 \quad (7)$$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、境界において、付帯条件

$$\hat{u}^{(a)} = \hat{u}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (8)$$

を Lagrange の未定乗数 λ を用いて

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda^t (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

と表し、仮想仕事式に導入する[8]。ただし、 $\hat{u}^{(a)}$, $\hat{u}^{(b)}$ は図-4 に示すように部分領域 $\Omega^{(a)}$, $\Omega^{(b)}$ の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の変位を表している。

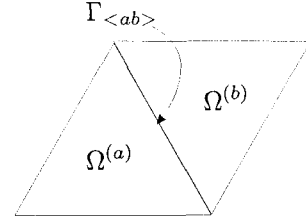


図-4 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

いま、隣接する2つの要素境界面数を N とするとハイブリッド型の仮想仕事式は式(10)のように表せる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [L \delta u]^t D [L u] d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda^t (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma \right) = 0 \quad (10)$$

4. HPM の定式化

(1) 変位場と Lagrange の未定乗数

本手法では、部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の任意点における剛体変位、剛体回転 $d^{(e)}$ に加え、部分領域内で一定なひずみ $\epsilon^{(e)}$ を自由度とし、要素毎に独立に設定する。仮定する変位場 $u^{(e)}$ を以下に示す。

$$u^{(e)} = N_d^{(e)} d^{(e)} + N_\epsilon^{(e)} \epsilon^{(e)} \quad (11)$$

このように、本論文で用いる変位場は、従来の FEM とは異なり、節点において変位を共有しない。すなわち節点は領域形状を認識するために用いるのであって、自由度を設けるための節点ではない。

一方、Lagrange の未定乗数は、物理的には表面力を意味している。いま、境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力 $\lambda_{<ab>}$ と相対変位の関係を式(12)のように表す。

$$\lambda_{<ab>} = k \cdot \delta_{<ab>} \quad (12)$$

ここで、 $\delta_{<ab>}$ は部分領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対変位を表しており、 k はばね定数に対応する係数行列である。ハイブリッド型の仮想仕事式では、近似的に部分領域境界面上で変位の連続性を確保するため、極めて堅いばねを設ける必要がある。そこで本手法では、ばね定数をペナルティ関数と考え、式(13)のように仮定する。

$$k = p \quad (13)$$

(2) HPM の離散化方程式

離散化方程式は、式(10)に対して、式(11)で示す線形変位場の関係を代入することによって得られる。ただし、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ は、次式のように表す。

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_d \delta \mathbf{d} + \mathbf{N}_\varepsilon \delta \varepsilon \quad (14)$$

離散化方程式の誘導に先立ち、式(11),(14)を次のように整理する。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}, \quad \delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (15)$$

ただし、

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}]$$

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \varepsilon^{(e)}]^t, \quad \delta \mathbf{U}^{(e)} = [\delta \mathbf{d}^{(e)}, \delta \varepsilon^{(e)}]^t$$

それぞれの係数より以下の関係が得られる。

$$\mathbf{L} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (16)$$

以上の関係と式(2),(3)の関係をを用いると、式(10)における左辺第一項は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta \mathbf{u}]^t \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega \\ = (\delta \mathbf{U}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathbf{U}^{(e)} \end{aligned} \quad (17)$$

いま、全部分領域における自由度を並べた 1 次元配列を $\mathbf{U}$ とすると、部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $\mathbf{U}^{(e)}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{U} \quad (18)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(e)}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域における自由度を関係付ける行列である。同様に、仮想変位についても、

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta \mathbf{U} \quad (19)$$

とすると、式(10)の左辺第一項は次のように整理できる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta \mathbf{u}]^t \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U} \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \quad (21)$$

また、式(10)の左辺第 2 項および 3 項は同様に以下のように表すことができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{T} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{P}^{(e)} \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{P}^{(e)}$ は以下の関係にある。

$$\mathbf{P}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{T} d\Gamma \right) \quad (23)$$

最後に式(10)の左辺第 4 項の離散化を行うにあたり、付帯条件を部分領域境界面に沿った局所座標系の成分に変換する。

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列であり、次の関係がある。

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} = -\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad (25)$$

$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$, $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ は部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの部分領域境界から見た座標変換行列である。

ここで、式(9)は式(24)(25)の関係をを用いて次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} H_{\langle ab \rangle} &= \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} (\mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} - \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)}) d\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^2 \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(l)} d\Gamma \end{aligned} \quad (26)$$

一方、

$$\begin{aligned} \delta_{\langle ab \rangle} &= \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} + \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \\ &= \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \end{aligned} \quad (27)$$

であるので、式(26)は以下のように書くことができる。

$$H_{\langle ab \rangle} = \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} d\Gamma \quad (28)$$

いま、相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ を次のように表す。

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (29)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{\langle ab \rangle}$, $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}] \quad (30)$$

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t \quad (31)$$

この関係と式(12)の関係をを用いれば、式(28)は次のように表せる。

$$H_{ab} = -\delta U_{<ab>}^t \int_{\Gamma_{<ab>}} B_{<ab>}^t k B_{<ab>} d\Gamma U_{<ab>} \quad (32)$$

いま、式(18)と同様に、全部分領域における自由度を並べた 1 次元配列を U とすると、部分領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$ に関する自由度 $U_{<ab>}$ は、以下のように関係付けられる。

$$U_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} U \quad (33)$$

ここで $\mathcal{M}_{<ab>}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域境界面に関する自由度を関係付ける行列である。同様に、仮想の相対変位についても、

$$\delta U_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} \delta U \quad (34)$$

とする。これらの関係を用いると、式(28)は次のように書くことができる。

$$H_{ab} = -\delta U^t K_{<s>} U \quad (35)$$

ここで、 $K_{<s>}$ は以下のとおりである。

$$K_{<s>} = \mathcal{M}_{<s>}^t \int_{\Gamma_{<s>}} B_{<s>}^t k B_{<s>} d\Gamma \mathcal{M}_{<s>} \quad (36)$$

以上のようにして求めた式(20)(22)(35)より、式(10)は以下のように書くことができる。

$$\delta U^t \left(\sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \right) U - \delta U^t \left(\sum_{e=1}^M P^{(e)} \right) = 0 \quad (37)$$

ここで、仮想変位 δU は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$KU = P \quad (38)$$

ただし、 K および P は以下のとおりである。

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \quad , \quad P = \sum_{e=1}^M P^{(e)} \quad (39)$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(38)に示す連立 1 次方程式に帰着し、左辺の係数行列 K は、各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。

5. 異方性要素の取り扱い

木質系材料は、一般に直交異方性によってモデル化できると言われている[10]。RBSM では図-5 に示すように要素内剛性を剛体で表しているため異方性の影響を要素境界面つまり、ばねで表している。これに対して、HPM では要素境界边上でペナルティ関数を用いており、剛性は要素内で評価する。したがって、この要素内剛性に異方性の概念を取り込むことで、木材のような異方性を表現することができる。

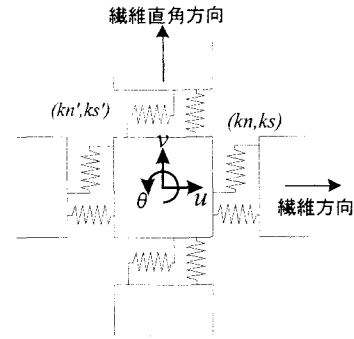


図-5 RBSM による異方性の設定

本研究では、図-6 に示すように弾性主方向を L, T 座標とする直交異方性板によって木材のモデル化を行う[10]。このとき、直交異方性体の構成則は次のように表される。

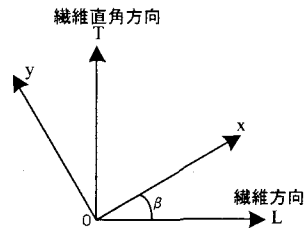


図-6 HPM による異方性の設定

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = D' \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{(1-\nu_L\nu_T)} & \frac{\nu_T E_L}{(1-\nu_L\nu_T)} & 0 \\ \frac{\nu_L E_T}{(1-\nu_L\nu_T)} & \frac{E_T}{(1-\nu_L\nu_T)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad (41)$$

ここで、 E_L, ν_L は繊維方向の弾性係数、ポアソン比であり、 E_T, ν_T は繊維直交方向の弾性係数、ポアソン比である。また、 G_{LT} はせん断弾性係数であり、

$$G_{LT} = \frac{1}{\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_L}{E_L}} \quad (42)$$

と表される。ここで、

$$\frac{\nu_T}{E_T} = \frac{\nu_L}{E_L} \quad (43)$$

より、直交異方性問題において現れる独立な弾性係数は E_L, E_T, ν_L, G_{LT} の 4 つとなる[10]。

図-6 のように L, T 座標と x, y 座標をとったとき、応力の座標変換は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} \quad (44)$$

ここで、 β は L, T 座標に対する x, y 座標の傾きであり、 T は座標変換マトリックスである。

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -2 \sin \beta \cos \beta & 2 \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (45)$$

同様にひずみに関して整理すると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (46)$$

したがって、式(44)に式(40)代入し、さらに式(46)を代入すると、

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (47)$$

が得られる。ここで、異方性の弾性マトリックス D は以下の通りである。

$$D = T D' T^t \quad (48)$$

本論文では上記の弾性マトリックス D を前述したHPMの要素剛性行列(17)の $D^{(e)}$ に適用する。このようにHPMにおいて異方性要素を取り扱う場合、RBSMとは異なり、ペナルティに関しては前述した式(13)をそのまま使い、要素内の弾性マトリックスに対してのみ式(48)を用いることで、容易に表現できる。

6. 破壊条件と非線形解析法

(1) 破壊条件

RBSMによる木材の解析では要素間の単位面積あたりの表面力(σ_n)に対して、図-7に示すように引張、圧縮破壊を考慮する[5]。ここで、 F_t は引張強度、 F_c は圧縮強度である。

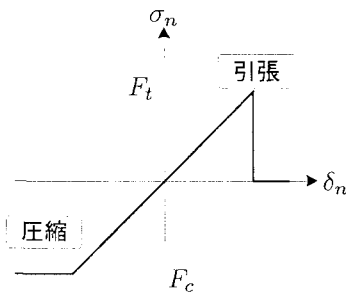
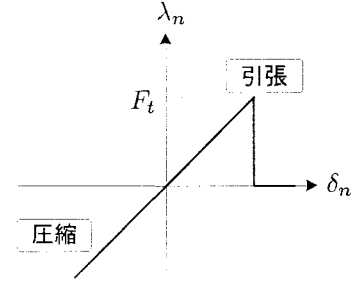


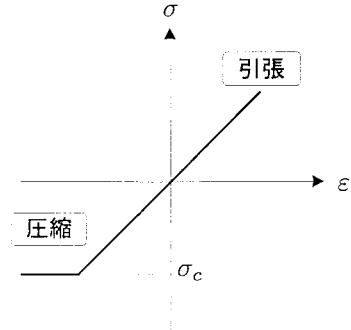
図-7 従来の表面力—相対変位関係

これに対して、本論文では、要素境界辺で引張破壊を、要素内で圧縮破壊を表現する方法を提案する。図-8は本

論文で使用する応力(表面力)—ひずみ(相対変位)関係を表したもので、(a)が表面力に対する引張破壊、(b)が要素内応力に対する圧縮破壊の関係を示している。図のように、要素内応力に関しては弾性主方向に対する一軸状態により評価する。図中 σ_c は圧縮強度であり、 σ が σ_L のときは $\sigma_c = \sigma_{cL}$ 、 σ が σ_T のときは $\sigma_c = \sigma_{cT}$ である。



(a) 表面力と相対変位の関係



(b) 要素内応力とひずみの関係

図-8 本論文の応力(表面力)—ひずみ(相対変位)関係

(2) 非線形解析法

FEMの非線形解析法として、 $r_{\min}$ 法がある[11]。この方法によれば、順次破壊の進展を追跡することができるが、引張破壊などのように応力解放が伴う場合、その解放力によってさらに破壊が進展し、計算が収束しにくくなるという問題点がある。この問題に対して、竹内らは $r_{\min}$ 法を応力解放が伴う問題に対して適用できるように拡張し、HPMの非線形解析に適用した[9]。この方法は、要素境界辺の破壊に対する手法であるが、本論文では、これを拡張し、要素内の圧縮破壊も容易に考慮することができる非線形解析法を提案する。

いま、表面力の降伏関数を f 、要素内応力の降伏関数を g 、現在の表面力と要素内応力を λ, σ とし、増分表面力、増分要素内応力に関して、 $\Delta\lambda, \Delta\sigma$ とすると、次式を満たす r が存在する。

$$f(\lambda + r \cdot \Delta\lambda) \leq 0 \quad (49)$$

$$g(\sigma + r \cdot \Delta\sigma) \leq 0 \quad (50)$$

この r を増分率と呼び、これを考えている様々な破壊条件に基づき、すべての表面力、要素内応力に対して求める。

本論文では、引張、すべり、圧縮破壊および引張破壊後の再接触について、この荷重増分率を求める。すべりに関する荷重増分率は文献[9]に掲載されている。引張、圧縮破壊については次のようになる。

$$(\lambda_n + r \cdot \Delta\lambda_n) = F_t \quad (51)$$

$$(\sigma + r \cdot \Delta\sigma) = \sigma_c \quad (52)$$

ただし、式(52)において、 σ が σ_L のときは $\sigma_c = \sigma_{cL}$ 、 σ が σ_T のときは $\sigma_c = \sigma_{cT}$ である。

一方、引張破壊後の再接触については、相対変位を用いて次のように考える。

$$(\delta_n + r \cdot \Delta\delta_n) = 0 \quad (53)$$

すなわち、相対変位が0のとき再接触したものとする。

このようにして求めた増分率のうち、最小のものを今回の荷重増分率とする。このとき、現在の値と増分後の値を、それぞれ、 n と $n+1$ をつけて表すと、

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + r \cdot \Delta\lambda \quad (54)$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + r \cdot \Delta\sigma \quad (55)$$

として増分後の値を求めることができる。この結果、増分後の表面力、要素内応力は、降伏曲面を越えることはなく、降伏曲面上もしくはその内側に必ずあることになる。

非線形解析にあたり、荷重 P を幾つかの増分荷重 ΔP に分割する。このとき、ある荷重増分段階における現在の荷重を $\Delta P^{(i)}$ とし、荷重増分率を r_i とすれば、残りの荷重 $\Delta P^{(i+1)}$ は次式によって与えられる。

$$\Delta P^{(i+1)} = (1 - r_i) \Delta P^{(i)} \quad (56)$$

したがって、第 n ステップ目における残りの増分荷重は、始めに与えた増分荷重を ΔP として以下のようになる。

$$\Delta P^{(i+1)} = \prod (1 - r_i) \Delta P \quad (r_o = 0) \quad (57)$$

いま、 $(k-1)$ 回目で、ある境界に引張破壊が発生した場合、その境界におけるペナルティの値を0として力の伝達を遮断し、その境界において所有していた表面力を解放力 $\Delta F^{(k-1)}$ として、関連部分に分配する。s番目の境界における解放力は次式によって求める。

$$F_{<s>} = - \int_{\Gamma_{<s>}} B_{<s>} \lambda_{<s>} d\Gamma \quad (58)$$

分配された解放力は、次式のように、残りの荷重に加え、次のステップにおける増分計算を行う。

$$\Delta P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) \Delta P + \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=k}^{n-1} (1 - r_i) \Delta F^{(k-1)} \right\} \quad (59)$$

このようにして、初めに与えた荷重と解放力をすべて使い

切るまで繰り返し計算を行う。このとき、荷重増分率の合計 r_{total} を

$$r_{total} = \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=k}^{k-1} (1 - r_i) \right\} \quad (60)$$

とし、 $r_{total}=1$ で収束したものと考えることができる。

以上示したように、本アルゴリズムは、解放力を与えること以外は従来の荷重増分法における r_{min} 法と同様なアルゴリズムとなっており、要素内降伏も容易に取り扱うことができる。

7. 数値解析例

(1) 解析モデル

本研究に用いた解析モデルを図-9に示す。また、要素分割を図-10に示す。この分割はRBSMによる解析[5]と同じ分割数であるが、各四角形領域は、図中に示したように、三角形により8分割している。節点数は1429であり、要素数は2690である。RBSMと同じ分割にした理由はRBSMとの崩壊荷重の比較において要素境界で引張破壊が本手法とRBSMとで同等になるようにするためである。対称性を考慮して1/2領域を解析対象とした。スパン450mmの単純ばりとし、境界条件として支持点の鉛直方向の変位成分を拘束した。また、載荷条件に関しては、スパン間を3等分(150mm)し、両支点から1/3の距離に集中荷重を与える。

表-1に使用した材料定数を示す。この定数は、べいまつの標準的な値[12]と増田[4]の実験を参考にして仮定している。また、表中の繊維直角方向における引張強度の()内の値は文献[5]と比較するための値であり、後者は中戸ら[13]、木材工業ハンドブック[14]から引用した値である。

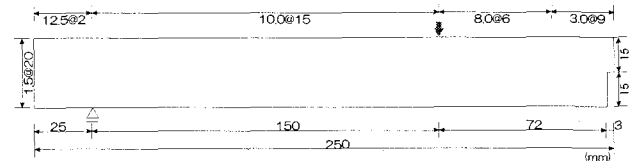


図-9 解析モデル

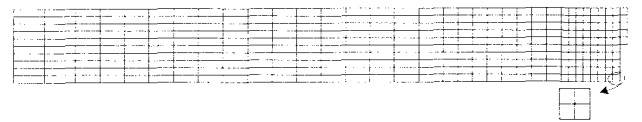


図-10 要素分割

表-1 本解析に用いた材料定数

	繊維方向	繊維直角方向
弾性係数 (GN/m ²)	10.79	0.98
ポアソン比	0.400	0.036
せん断強さ (MN/m ²)	7.85	29.43
引張強度 (MN/m ²)	137.34	2.35(4.90)
圧縮強度 (MN/m ²)	51.9	5.9

(2) 弾性解析結果

本手法による弾性解の挙動と RBSM による弾性解の比較を行った。図-11 は弾性状態を仮定し、載荷を 196.2N としたときの切欠き先端から繊維方向に沿っての σ_y の応力分布である。実線が HPM、点線が RBSM である。両モデルとも、切欠き部付近で高い応力集中が発生しているが、HPM が 5.53MN/m^2 、RBSM が 4.41MN/m^2 であり、HPM の方が高い値を示した。全体的な分布としてはほぼ一致した傾向が得られた。

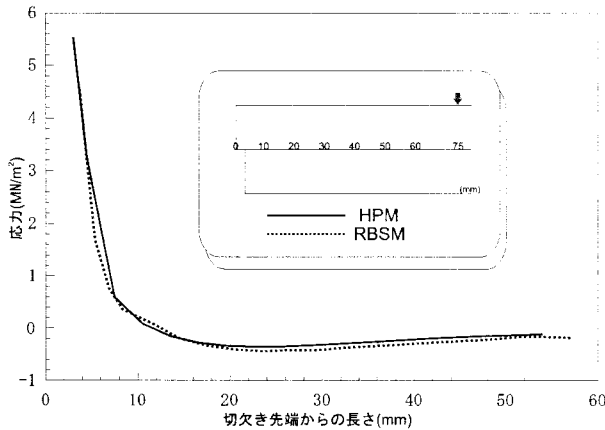


図-1 1 切欠き先端から見た応力分布 (σ_y)

図-12 は、はり断面での応力分布 (上: σ_x , 下: σ_y) を切欠き部からの距離ごとに整理したものであり、切欠き付近で高い応力が発生しているのがわかる。全体的には、RBSM と同様な傾向となっており、また、増田[4]の破壊力学による応力分布と類似の分布状況を示している。

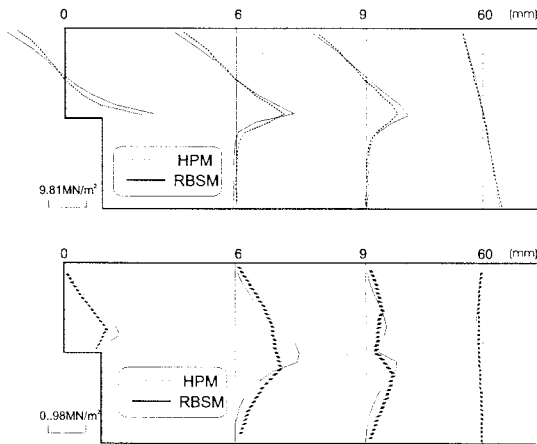


図-1 2 はり断面の応力分布

(3) 要素境界で圧縮破壊を表現した解析

ここでは、要素内圧縮破壊を考慮せず、RBSM と同様に要素間で圧縮破壊するものとして HPM による破壊解析を行った。ここで、引張強度は文献[5]と比較するため 4.90MN/m^2 とした。

図-13 は各荷重値における HPM の変位モードである。実験同様に切欠き先端から繊維方向に引張クラックが発

生し、荷重が増加するにつれ、引張クラックも水平方向に進展する傾向が得られた。しかし、 $P=686.7\text{N}$ においても載荷板付近まで引張クラックが進展しておらず、RBSM や実験とは異なる結果となった。ただし、RBSM による結果と同様に供試体中央部に圧縮破壊が見られた。また、崩壊荷重は、実験が 774N であるのに対して、本手法は、 863N であった。

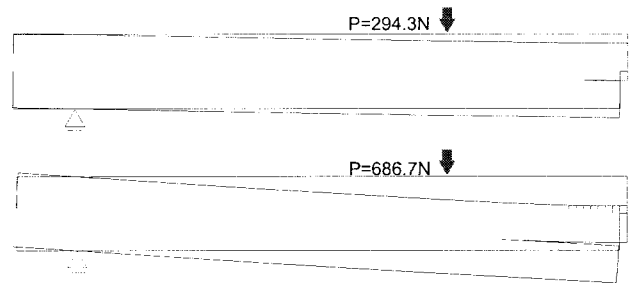


図-1 3 HPM における変位モード $F_t=4.90\text{MN/m}^2$

一方、図-14 は中戸ら[12]、木材工業ハンドブック[13]から引用した引張強度が 2.35MN/m^2 の時の $P=686.7\text{N}$ に対する変位モードである。図-13 と比較すると、切欠き先端から発生した引張クラックが載荷部直下まで進展し、さらに供試体中央部で圧縮破壊がより進展している。これは、実験と類似の傾向である。

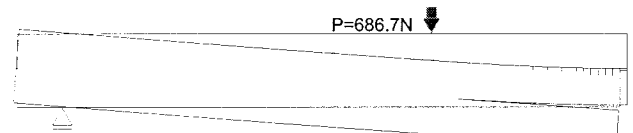


図-1 4 HPM における変位モード $F_t=2.354\text{MN/m}^2$

図-15 は各引張強度に対する解析ケースでの荷重変位関係を示したものである。実線が繊維方向 $F_t=4.90\text{MN/m}^2$ 、点線が $F_t=2.354\text{MN/m}^2$ の解析結果である。また、一点破線は RBSM による崩壊荷重を、二点破線は実験による崩壊荷重を示している。ただし、実験に関しては、崩壊荷重に幅があるため、上限と下限の二本のラインによって示している。

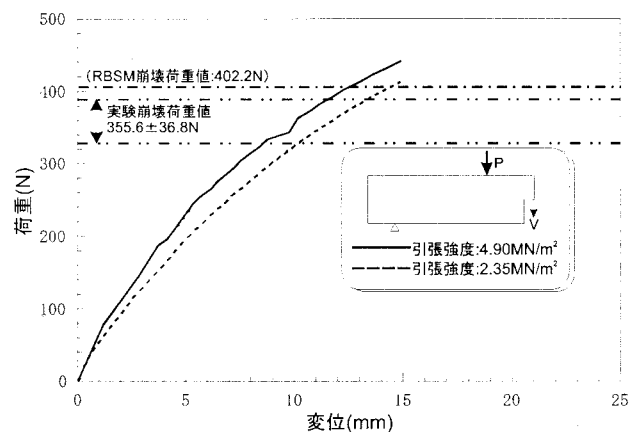


図-1 5 荷重変位曲線

表-2は崩壊荷重と崩壊時における切欠き中央下端におけるたわみを整理したものである。たわみに関しては、実験より5体から測定された値である14.5～21.0mmであるのに対して、解析値は両ケースとも約15mmであり、若干小さめであった。崩壊荷重は実験の方が解析より小さくなっている。この一因として、実験では、荷重が偏心し、右載荷位置付近で曲げ破壊を起こしたことが考えられる。

表-2 崩壊荷重とたわみ

	たわみ(mm)	崩壊(N)
実験	14.5～21.0	711.2±73.5
HPM (Ft=4.90MN/m ²)	14.9	863.2
HPM (Ft=2.35MN/m ²)	14.8	824.0
RBSM	12.5	804.4

(4) 要素内圧縮破壊を考慮した解析

ここでは、6節で述べたように、圧縮破壊が要素内で発生するものとして解析した結果を示す。ただし、引張強度に付いては文献等にしがたいFt=2.35MN/m²とした。

図-16は要素内圧縮破壊を考慮した場合の載荷重P=294.3Nにおける変位モードを示したものである。切欠き部から発生した水平方向の引張クラックが載荷点近傍まで達しており、実験と同様な結果となった。引張クラックはこれ以上横方向に進展しない。

一方、図-17は載荷重P=294.3Nにおける圧縮破壊領域を示したものである。

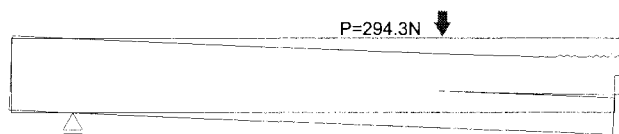


図-16 HPMにおける変位モード

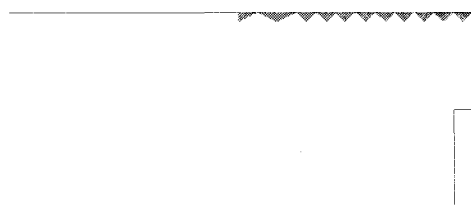


図-17 切欠き付近の圧縮破壊時の領域図

図-18は、要素間で圧縮破壊を表現した場合と、要素内で圧縮破壊を表した場合の荷重変位関係を比較した図である。ただし、引張強度はFt=2.35MN/m²とした。図中の破線は要素間で圧縮破壊を表現した結果であり、実線が、要素内圧縮破壊を用いた場合の結果である。また、一点破線がRBSMの崩壊荷重値を、二点破線が実験による崩壊荷重を表している。要素内降伏の結果は、要素間降伏の結果よりも小さな崩壊荷重を与えており、実験値と比較すると下限値と近い値となっている。要素間降伏の結果はRBSM崩壊荷重と同等の値となっている。ただし、荷重変位曲線の勾配は要素間と要素内といった破壊表現方法の

違いによってあまり大きな差は生じなかった。

表-3はこれらの結果をまとめたものである。

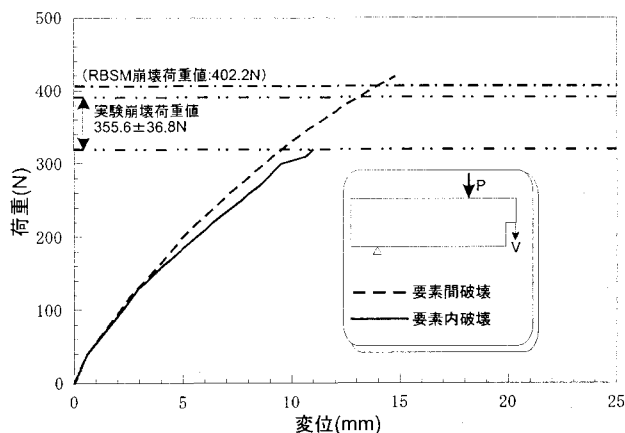


図-18 荷重変位曲線

表-3 崩壊荷重とたわみ

	たわみ(mm)	崩壊(N)
実験	14.5～21.0	711.2±73.5
HPM (要素間圧壊)	14.8	824.0
HPM (要素内圧壊)	11.0	588.6
RBSM	12.5	804.4

8. まとめ

本論文では、ハイブリッド型ペナルティ法(HPM)に直交異方性材料の概念を適用するための考え方を示し、木質系はりの崩壊解析を行った。また、要素間での引張破壊に加え、要素内での圧縮破壊を考慮した非線形解析法を提案した。さらに、簡単な模型実験やRBSMによる解析と比較検討を行い、以下の結果が得られた。

- 1) RBSMの弾性状態[5]と比較したところ、切欠き先端からの要素間におけるy方向の応力分布は本手法の方が若干高い値を示したが、分布状況は同じであった。また、断面での応力分布については増田の破壊力学に基づく結果[4]と類似した傾向が得られた。
- 2) RBSMとの非線形解析の比較においては、RBSMで用いられている引張強度4.90MN/m²[5]と比較したところ、荷重値で同等な値が得られた。また、実際の木材の引張強度である2.35MN/m²で解析を行い、実験値と比較を行ったところ、変位量に関して実験結果と同等な値が得られた。一方、崩壊荷重は実験の方が解析より小さくなっている。この一因として、実験では、荷重が偏心し、右載荷位置付近で曲げ破壊を起こしたことが考えられる。また、破壊に関しては、載荷板付近まで引張クラックが進展し、実験結果に近い破壊形状を示した。

本研究で行ったようなモデル化を行うことにより簡単に異方性を表現することができ、さらに、これを拡張する

ことにより要素内の降伏を表現できると考えられる。また、本手法は RBSM と異なり、弾性マトリックスを操作することで可能であるため、弾塑性問題に関しても弾性マトリックスを変更するだけで問題なく解析が行える。すなわち、本手法の非線形アルゴリズムを用いることで、要素境界辺での破壊と要素内での破壊を同時に考慮した破壊解析が可能であると考ええる。

参考文献

- 1) 今村祐嗣, 川井秀一, 則本京, 平井卓郎: 建築に役に立つ木材・木質材料学, 東洋書店, 1997
- 2) 杉山英男, 中田和夫: 木質系はりの曲げ耐力と合成に及ぼす欠き込みの影響について(続報), 日本建築学会論文報告集, No.200, pp15-21, 1972
- 3) 平井卓郎, 沢田稔: 切欠きを持つ木材梁の曲げ剛性と耐力, 北海道大学農学部演習林研究報告, Vol.36, NO.2, pp387-419, 1977
- 4) 増田稔: 木材の破壊条件に巻する理論的考察, 京都大学農学部演習林報告, No58, pp241-250, 1986
- 5) 竹内則雄, 辻野哲治, 川井忠彦: 切欠きを持つ木材系はりの曲げ耐力について, 土木学会構造工学論文集, Vol.40A 1994
- 6) Kawai, T.: New element models in discrete structural analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977
- 7) 竹内則雄, 川井忠彦: すべり・接触・引っ張り破壊を考慮した離散化極限解析法について, 日本鋼構造協会「構造工学における数値解析シンポジウム」論文集, Vol.12, pp311-316, 1988
- 8) 鷺津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会, 培風館, 1972
- 9) 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適応した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002), Vol.3, pp53-62, 2001
- 10) 小林繁夫, 近藤恭平: 工学基礎講座 7 弾性力学, 培風館, 1987
- 11) Y.Yamada, N.Yoshimura and T.Sakurai: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol. 10, pp323-354, 1968
- 12) 岡田清他: 土木材料学, 国民科学社, 1965
- 13) 中戸莞二編著: 新編木材工学, 1987
- 14) 木材工業ハンドブック 農林水産省林業試験場監修, 丸善

(2003 年 9 月 12 日受付)