

たるみ性と非抗圧性のあるネットの計算技法

Computational Techniques for Flexible and Incompressive Nets

犬飼佳幸*, 木村昭雄**, 藤井文夫***, 野口裕久****

Yoshiyuki INUKAI, Akio KIMURA, Fumio FUJII and Hirohisa NOGUCHI

*岐阜大学大学院工学研究科 (〒501-1193 岐阜市柳戸 1-1)

**国土交通省中部地方整備局 (〒460-8514 名古屋市中区三の丸)

*** Dr.-Ing., 岐阜大学工学部数値デザイン工学科 (〒501-1193 岐阜市柳戸 1-1)

**** 工博, 慶応義塾大学理工学部システムデザイン工学科 (〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1)

Cable structures will usually be discretized into truss elements in finite displacement analysis and the geometric stiffness matrix may be activated by pre-tension to avoid the singular stiffness matrix at the beginning of equilibrium iteration. The resulting equilibrium solution at the end of iteration is a tension-only stress state, when the pre-tensioning is strong enough to exclude compressed truss elements. However, flexible nets for hammock and soccer goal, for example, are not pre-tensioned and will not resist against compression. Some net segment may sag in the deformed equilibrium configuration. The present study features this particular, but interesting issue and proposes computational techniques to simulate the static and dynamic large displacement response of compression-free flexible nets with sags. The proposed computational ideas well work in numerical examples.

Key Words: Finite Displacement, Singular Stiffness Matrix, Stability, Dynamic Buckling, Sag, Compression-free

キーワード: 有限変位, 特異剛性行列, 安定性, 動的座屈, たるみ, 非抗圧性

1. はじめに

ケーブル構造の解析手法においては一般に, 弾性カテナリーの平衡解を用いたり¹⁾²⁾, 離散化手法として有限要素法が用いられるなど, 様々な理論展開が試みられ, 数多くの研究論文が発表されている³⁾⁹⁾. しかしながら, 一方では簡単なトラス要素を用いても, 計算上の工夫により, ケーブル構造の複雑で多様な問題の解法が可能であることは, あまり知られていない.

実際の構造工学におけるケーブル(鋼)の多くは, 事前に初期張力を導入することにより, 幾何剛性部分を活性化し, トラス要素の接線剛性行列が特異行列となるのを回避することができる. しかし, ハンモックやサッカーゴールのように, 初期張力を与えることができず, たるみ性の極端に大きなネット(糸)については, 初期変位をまだ与えていない入力形状の時点での剛性行列は特異行列となるのが通常である.

さらには, 大きなプレストレスを与えることができるケーブル構造においては, 平衡状態でケーブルに圧縮力が発生することは全く危惧する必要はないが, たるみ性ネットにおいては, 圧縮力が発生することは許されず(非

抗圧性), 引張力と圧縮力に対して同等の剛性を示すトラス要素を適用するには, それなりに計算上の工夫が必要となる. 本論文はこれらの工夫を, 計算例題を交えながら述べていく.

2. 非線形平衡方程式と剛性方程式

静的解析における非線形平衡方程式は, 一般に次のようである.

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = 0 \quad (1)$$

ここに, $\mathbf{E}$: 非平衡力ベクトル, $\mathbf{u}$: 節点自由度ベクトル, p : 荷重変数である. また変位 $\mathbf{u}$ に依存した構造系の内部抵抗力を $\mathbf{R}(\mathbf{u})$, 荷重モードを $\mathbf{e}$ とすると, 比例載荷された弾性保存系モデルの場合について, 式(1)の左辺は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - p\mathbf{e} \quad (2)$$

となる. 式(1)で定義される平衡路を追跡する予測子計算では, $\mathbf{K}$ を接線剛性行列として, 式(1)を線形化した剛性方程式

$$Kdu - dpe = 0 \quad (3)$$

を、荷重制御の条件などを付加して解く。ここに、

$$K = \frac{dR}{du} \quad (4)$$

である。また修正子計算では

$$K\delta u - \delta pe = -E \quad (5)$$

により反復計算し、非平衡点から平衡路上に収束させる。

たるみ性ネットの解析にトラス要素を用いた場合、初期張力を与えていない状態では、入力データの読み込み直後の段階で、接線剛性行列は特異行列となってしまう。しかし節点変位（初期変位）を適当に与えることにより内部応力が発生し、接線剛性行列の特異性が解消できる。

一方、接線剛性行列の正則性は確保できたとしても、反復計算の結果、必ずしも常に物理的に意味のある安定平衡解に到達できるとは限らず、解の安定・不安定の検証が必要となる。ちなみにネットには無数の不安定平衡解が存在し、これらを避けて常に安定平衡解に到達するための工夫も必要となる。

このように、たるみ性ネット構造の非線形解析で最も重要なのは、すべての要素において圧縮応力が発生していない（Compression-free）平衡解に安定に収束させることである。以下に、このための計算技法を提案する。

3. 材料構成則（材料としての非抗圧性）

たるみ性ネットの力学的特長として、引張力に対しては抵抗するが、圧縮力には抵抗しない特性（非抗圧性）がある。すなわち圧縮力を受ける要素が、たとえ一部でも存在している平衡状態は、力学的に許容できない解となる。

最初の計算上の工夫としては、材料としての非抗圧性を考慮した構成則を仮定する。ここで軸力 $N(\Delta)$ は伸び Δ に依存し、要素レベルの構成則を次式のように仮定する。

$$N(\Delta) = \left(\frac{EA}{2L} \right) \left\{ \Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4 \left(\frac{T_0 L}{EA} \right)^2} \right\} \quad (6)$$

また無次元化表現は、

$$\frac{N(\Delta)}{EA} = \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{\Delta}{L} + \sqrt{\left(\frac{\Delta}{L} \right)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{EA} \right)^2} \right\} \quad (7)$$

となる。ここで、 EA ：引張域の伸び剛性、 L ：入力形状時の要素長さ（自然長）、および T_0 ： $\Delta=0$ の時の微小張力である。これらを要素特性値としてそれぞれ与える。

図-1 は T_0 を変化させたときの要素レベルの構成則を示す。 $T_0 \neq 0$ の場合、構成則曲線は滑らかであり、その勾配は連続となるが、 $T_0=0$ の場合は、圧縮域と引張域とで

bi-linear となってしまう。反復計算の安定性を得るためには、導関数が連続である事が必要であり、 $T_0 \neq 0$ は $\Delta=0$ 付近での反復計算に安定性を与える。また伸び Δ が自然長から遠ざかるほど $T_0=0$ の場合の構成則に漸近していく。

ここで提案する構成則を通常のトラス要素に組み込んで、これをネット要素とする。すべての要素で引張力が作用するようなネット構造において、このネット要素と通常のトラス要素との解は実質的に一致する。

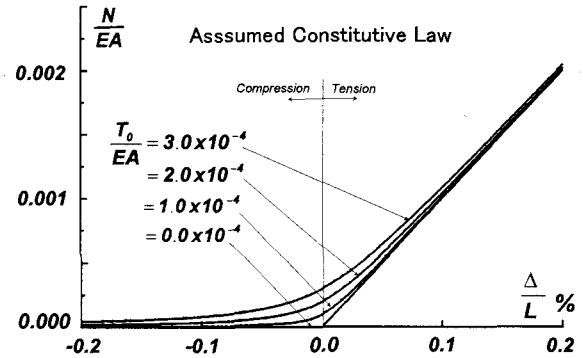


図-1 要素レベルの構成則

4. 要素細分割と微小不整荷重の導入

（構造としての非抗圧性）

たるみ性ネットを通常のトラス要素により普通に離散化した場合、圧縮力に対しても抵抗を示してしまう（通常のトラス要素は引張力と圧縮力に対して等しい剛性で節点荷重に抵抗する）。

そこで、もうひとつの計算上の工夫は、ネットを構成する1つのセグメントを複数本の要素に分割すると共に、式(2)の中で次のような微小不整荷重 f を導入する方法である。

$$E(u, p) = R(u) - pe - f \quad (8)$$

この手法を図-2 に図解する。図-2(a) は1本のネット（糸）を単純に2本のトラス要素に分割した場合であり、中央部分に水平荷重が作用している。このような離散化では、左側の要素には引張力、右側の要素には圧縮力が発生する。そこで分割数を増やし（図-2(b)）これを入力形状とする。入力形状に微小不整荷重 f を作用させ、さらにたるむ方向に微小変位（初期変位）を与えた状態が図-2(c)である。これを初期形状とする。初期形状に水平荷重を作用させ、反復計算が収束後の形状が図-2(d)であり、ネットの右半分は圧縮力の作用しないたるみ性ネット構造となり、左半分では微小不整荷重 f と初期変位の効果は、反復計算の結果、消滅する。

ここで注意すべきは、微小不整荷重 f が必ずしもネット構成材料の自重である必要がない点である。たるみを生み出すためなら任意の微小荷重でよく、風荷重のような非重力方向の荷重でもかまわない。また初期変位として

与える微小変位は一般に、ベクトル f のモードと同じモードの節点変位を仮定する。この仮定により、圧縮力を含まない弾性カテナリー解も反復計算で同時に計算することができる。

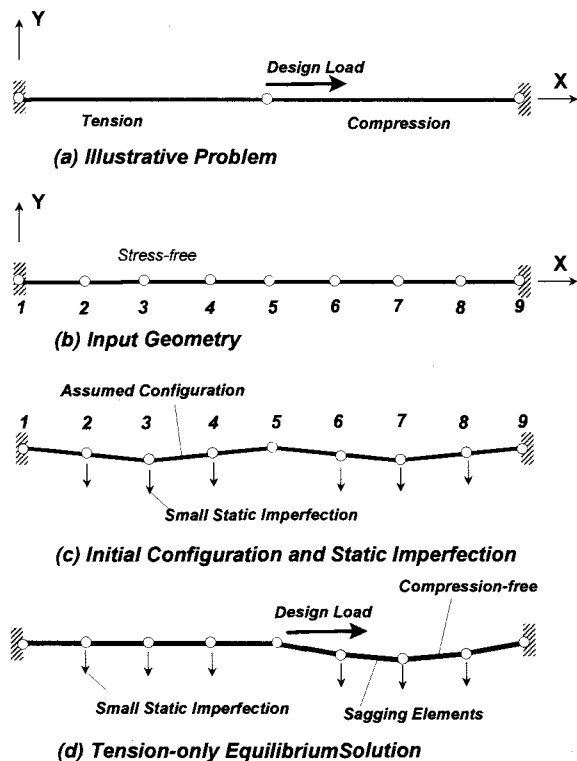


図-2 要素細分割と微小不整荷重の図解

5. 動的応答

最後は動的解析の導入である。動的解析における運動方程式は次式で与えられる。

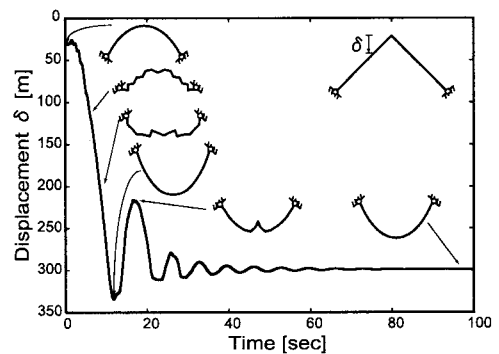
$$M\ddot{u} + C\dot{u} + E(u, p) = Q(t) \quad (9)$$

ここに、 M ：質量行列、 $\ddot{u}$ ：加速度ベクトル、 C ：減衰行列、 $\dot{u}$ ：速度ベクトル、 $Q(t)$ ：動的外力である。図-3は、例としてカテナリーの時刻歴応答を表す。また本論文では、減衰としてレイリー減衰を与えている。

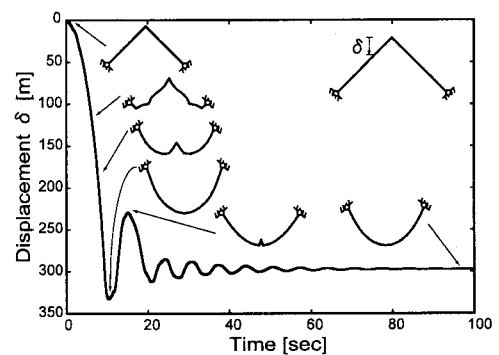
静的解析により、数値解析上は平衡がとれるが、物理的には受け入れられない解（すべての要素で圧縮力が発生）に収束する場合がある。これは不安定な平衡解であるため、節点に微小なかく乱を与えることにより動的座屈が発生し、安定状態（すべての要素で張力が発生）へ動的に移行する（リアプノフの安定性に関する定理¹⁰⁾）。この動的過程をシミュレートしたのが図-3(a)である。また一部の要素のみに圧縮力が発生した平衡解についても同様に、節点に微小なかく乱を与えることにより、目的の安定解に収束する。ただしここで微小なかく乱とは、初速度と初期変位を与えることである。

図-3(b)は、作用する荷重（自重）を動的荷重として与えた場合の時刻歴応答である。この場合も、不安定解に収束することなく、安定解に収束する。また構造系に作

用する外力（自重）は図-3(a)の場合と等しいため、当然のことながら両者の安定平衡解の形状は等しくなる。



(a) 動的座屈



(b) 動的荷重

図-3 時刻歴応答

6. 例題

6.1 鎖の自由落下 (Free Fall of Chain)

静的および動的解析の例題として、鎖の自由落下解析を行った。各要素を互いにピン結合とし¹¹⁾、長さのごく短く、3章で提案したモデルを用いて離散化することで、鎖と同様の力学的性質を再現することができる。鎖の長さ1.0m、要素数100、節点数101、節点自由度数200、ヤング率 $2.0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 、伸び剛性15710kN、密度 7870 kg/m^3 および重力加速度 9.8 m/sec^2 がモデルのデータであり、初期形状の鎖は上端でつり下げられ、下端でたれ下がっている（図-4）。

図-4(a)は鎖の下端を常に右上 45° の方向に外力 $\sqrt{2}P$ で持ち上げたときの静的荷重変位曲線であり、荷重 P を縦軸に、下端の水平変位 u および鉛直変位 v を横軸に示す。

$P=3.0\text{N}$ （鎖の全重量=6.1N）のとき、上端と下端とがほぼ等しい高さにある弾性カテナリーとなる。また荷重 P と鉛直変位 v とは、ほぼ線形関係を示すが、これは鉛直成分である P と、鎖の自重のうち、鎖の最下点より外力の作用点（自由端）までの部分（長さはほぼ v に比例する）の自重とがつり合うためである。

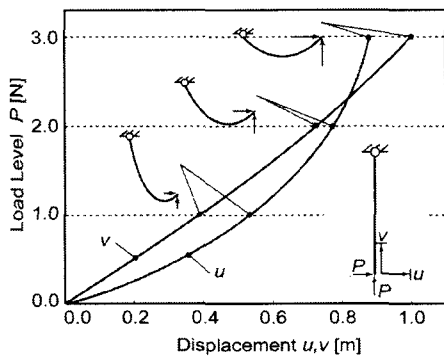


図-4(a) 鎖の有限変位挙動（静力学）

荷重制御法で $P=3.0\text{N}$ の荷重レベルに到達したのち、静的外力を瞬間的に取り除く ($P=0.0\text{N}$) と共に、静的解析から動的解析へ切り換える。鎖の自重による自由落下運動を示したのが図-4(b)である。ただし減衰力はゼロとして解析を行った。

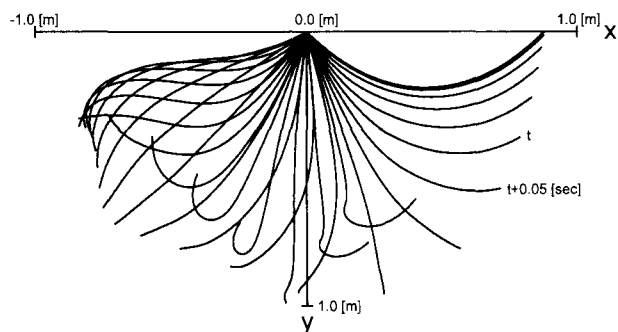


図-4(b) 鎖の自由落下（動力学）

参考文献 12)では、実際の鎖を用いた実験の結果が記されており、変形の時間的推移を示した図も描かれている。参考文献 12)には、実験モデルの詳細なデータは記述されていない。しかし本解析モデルによる変形の時間的推移は、参考文献 12)の結果と定性的に一致した。

6.2 2D 対称ネット解析

Polkowski¹³⁾ (1990) が行った二次元対称ネット解析の再解析を行うことにより、本論文で提案する計算上の工夫の有効性を確認する。まず要素数 29, 節点数 22, および節点自由度数 36 であり、3 章で提案したモデルで計算した。入力形状を図-5(a)に示す。また図中から読み取ることができない Y 座標値を表-1 に示す。

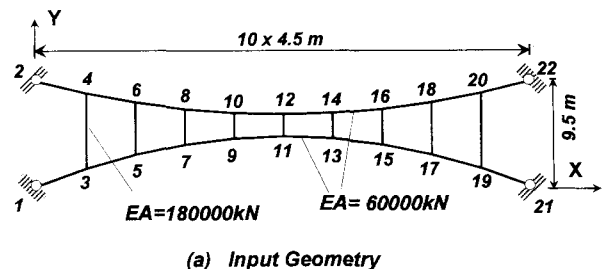
表-1 2D 対称ネットの Y 座標

Node	1	2	3	4	5	6
Y(m)	0.00	9.50	1.62	8.42	2.88	7.58
	7	8	9	10	11	12
	3.78	6.98	4.32	6.62	4.50	6.50

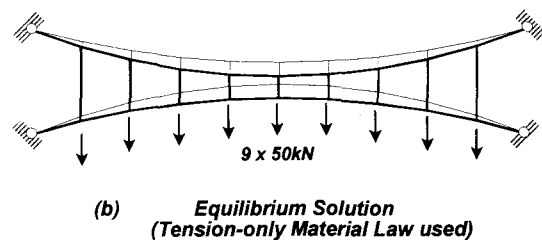
3 章で提案した構成則の特性値である微小張力 T_0 で、二次元対称ネットの接線剛性行列が特異行列となるのを回避することができ、図-5(a)の入力形状の段階からただ

ちに荷重制御法により解析可能となる（初期変位は不要）。解析結果として、節点変位および各要素の引張力は、Polkowski¹³⁾ (1990) の近似計算の結果と良好な一致を示した。しかし図-5(a)内にある一部のセグメント（1-3-5 および 17-19-21）において、本来は変形後にサグが発生しなければならないが、図-5(b)では幾何学的にサグを見ることができない。これは、1 セグメントを 1 要素として離散化したため、サグは 2 節点間の距離の短縮として表現されるためである。しかし力学的には、3 章で提案したネット要素は圧縮力に抵抗しないため、内部応力は実質ゼロである。

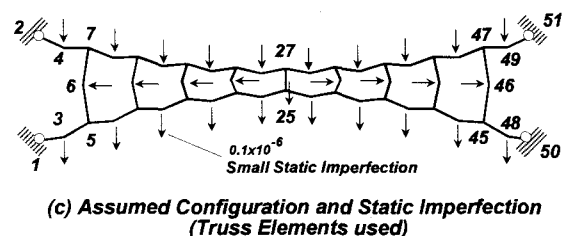
つぎに同じ二次元対称ネットについて、今度は通常のトラス要素を用いて解析を試みた。1 セグメントを 2 トラス要素に細分割し、微小不整荷重と微小初期変位とを作用させたときの形状を図-5(c)に示す。計算の規模は、トラス要素数 58, 節点数 51, 節点自由度数 94 である。トラス要素を用いた解析でも、圧縮応力が発生していない（Compression-free）平衡解に収束し、図-5(d)に示すように、サグを持つセグメントを変形図の中で、幾何学的に確認することができる。



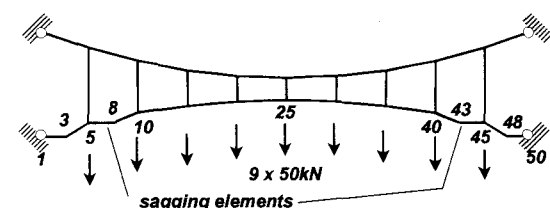
(a) Input Geometry



(b) Equilibrium Solution
(Tension-only Material Law used)



(c) Assumed Configuration and Static Imperfection
(Truss Elements used)



(d) Equilibrium Solution
(Truss Elements used)

図-5 2D 対称ネット

6.3 3D HP ネット解析

3章で提案した構成則モデルを、三次元のネット解析にも応用してみる。1セグメントを4要素として離散化した三次元HPネットは、要素数96、節点数93、節点自由度数243の離散化モデルであり、各節点の座標値(X, Y, Z)を図-6(a)に示す。また節点73において3方向に荷重が作用する場合の平衡解の形状を図-6(b)に示す。

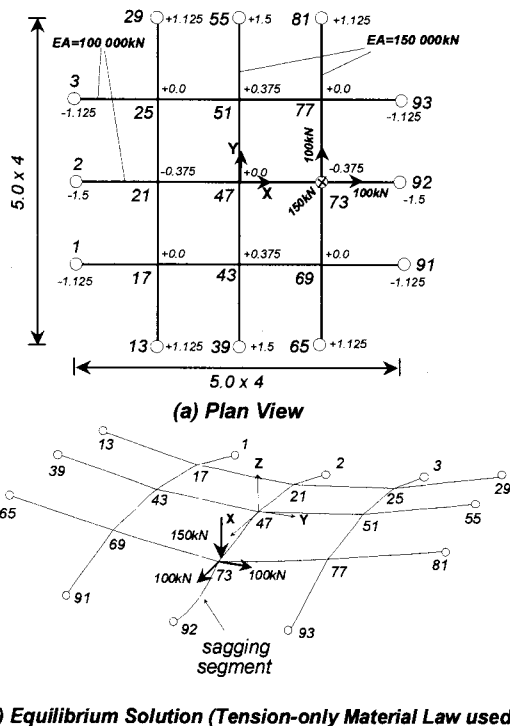


図-6 3D HP ネット

ネットを構成する要素の内部応力や節点変位は、Polkowski^[3] (1990) の結果と精確に一致した。また図-6(b)より、ゆるくたるんだセグメント (73-92) を除いて、ほとんどのネットセグメントに引張力が発生し、硬く張っている (Tension-stiff) 様子がわかる。

さらに静的荷重を動的荷重 (ステップ関数) として作用させ、運動が減衰した状態では、静的平衡解と一致することを確認した。図-7は、最終的に節点73のたわみが、静的平衡解と一致する模様を示した時刻歴応答である。

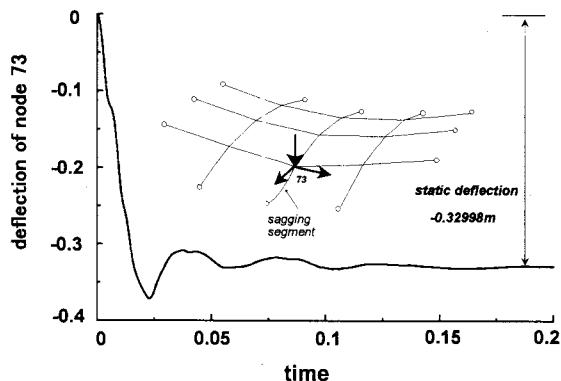


図-7 時刻歴応答

6.4 ゴールネット解析

最後の例題として、たるみ性サッカーゴールネットの動的解析 (ゴールシーンの再現) を行った。解析するゴールネットおよび目合いの寸法を図-8(a)および図-8(b)に示す。ゴールネットは、一辺が3.0mの正方形固定フレームに張られている。また固定フレームはZ軸からXY平面に向けて25°傾斜している。1セグメント (六角形の一辺) を1要素 (3章で提案した構成則を使用) とし、要素数1786、節点数1192、節点自由度数3276、ヤング率 $2.40 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ 、伸び剛性 16.96kN, 密度 960 kg/m^3 および重力加速度 9.8 m/sec^2 が離散化モデルのデータである。

図-8(a)は、自重が作用している状態での静的平衡解であり、ネット下部で自重によるたるみによりネットが重なっている。また3章の構成則により、この静的解析では、どの要素にも圧縮力は発生していない。

静的解析の後、ゴールネット中心の6節点に、運動量保存則により計算される動的外力 $Q(t)$ を仰角 30° で作用させる。サッカーボールの重さ 0.42 kg 、速さ 100 km/hour 、接触時間 0.2 sec とした。また $Q(t)$ のベクトル成分を図-8(c)に示す比率により配分した。

図-9に時間を追ったゴールネットの変形図を示す。図-9(a)は横からの視点であり、サッカーボール (動的外力) は紙面向かって右から左へ飛び込んでいく。サッカーボールはネット下部のたるみ部分を引張り込みながら、ネットに包み込まれるように直進していく様子を見ることができる。また図-9(b)は斜め角度からの視点であり、衝撃波がボールを中心に同心円状に伝播していく様子を見ることができる (本論文では掲載していないが、正方形ネットの場合は縦方向に割れる)。

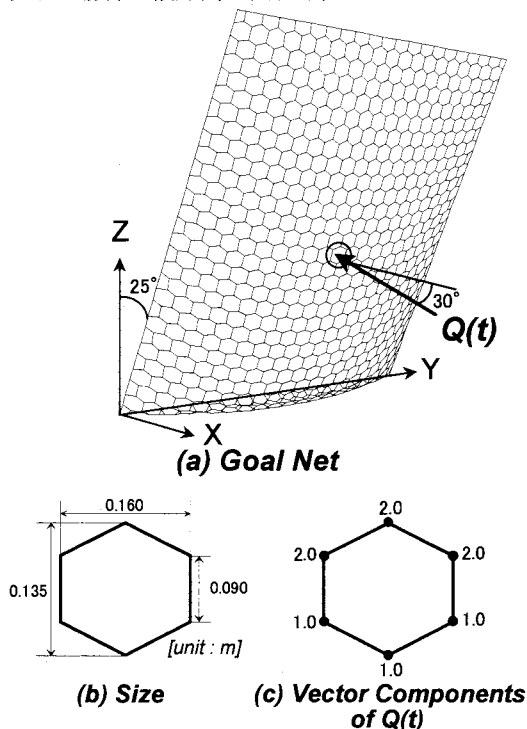


図-8 ゴールネット

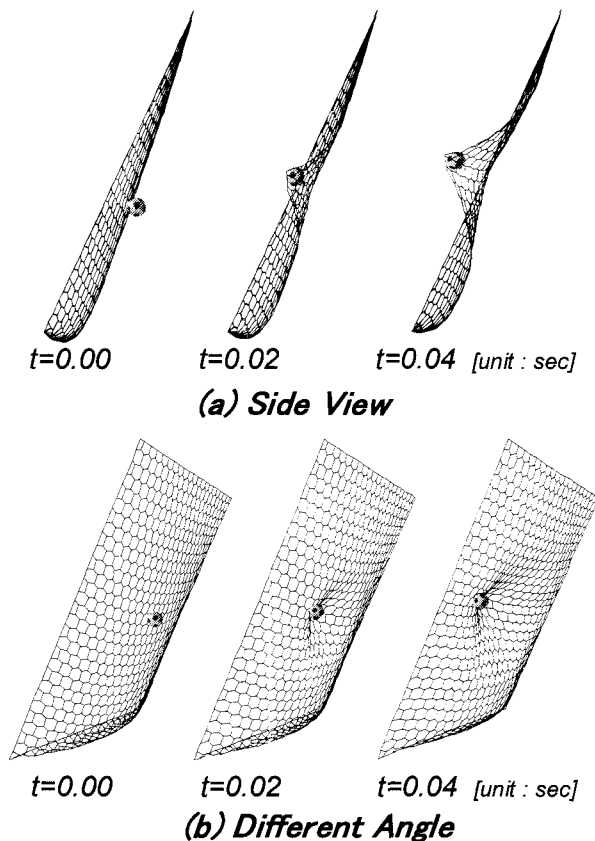


図-9 ゴールシーン (変形図)

サッカーゴールネットの動的解析 (図-9) は、韓国と日本において開催された FIFA World Cup'02 において、従来の正方形ネットに代わり、何故 6 角形のネットが採用されたか、その力学的根拠 (映像効果) を与えるものである。

7. まとめ

いわゆる Tension-stiff なケーブルネットに関する研究については、多くの例を見ることができる^{3),7)}。初期張力により十分な剛性が期待でき、ケーブルネットの非抗圧性も表立って問題となることもない。これに対してハンモックやスポーツ用ネットなど、たるみ性の大きなネットについては、計算力学的には興味あるテーマにもかかわらず、これまで有限要素法における接線剛性行列の特異性とも絡んで、研究例¹⁴⁾は少ないのが現状である。

本論文ではこの点に注目し、全く通常のトラス要素を用いても、計算上の工夫をするだけで、たるみ性ネットの解析が可能であることを示した。3 章の構成則は、4 章のモデリング (要素細分割と微小不整荷重) と併用して使うことも可能である。また事前に、トラス要素にカテナリーの解を組み込む必要もなく (サグのカテナリー形状は、平衡反復の中で自動的に計算される)、力学的に許容できないネット中の圧縮力は、完全に排除できる。

数多くの例題の中で、提案する計算技法が、静的解析においても、動的解析においても、破綻しないタフなア

イデアであることを示した。最後に、ケーブルネットが Eccentric な外力条件により Tension-stiff な部分と、たるみ性の大きいスラックな部分とが共存する場合、ケーブルネット全体としては、静的にも動的にも極端に複雑な非線形挙動を示す。この問題は今後、計算力学が解決すべき興味あるテーマである。

参考文献

- 1) 前田幸雄, 林正, 前田研一: サグを考慮したケーブル部材の計算式, 土木学会論文報告集, No.257, pp.123-126, 1977.
- 2) Jennings, A. : discussion of "Cable Movements under Two-Dimensional Loading" by W.T. O'Brien and A.J. Francis, J. of Str. Div., ASCE, Vol.91, No.ST1, pp.307-311, 1965.
- 3) ケーブル・スペース構造の基礎と応用, 鋼構造シリーズ 11, 社団法人土木学会, 1999.
- 4) 阿井正博, 西岡隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, No.260, pp.17-32, 1977.
- 5) 中西宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No.318, pp.41-50, 1982.
- 6) 謝旭, 伊藤学, 山口宏樹: Updated Lagrangian 手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.41A, pp.427-434, 1995.
- 7) 空間構造の数値解析ガイドライン 2001, 社団法人日本建築学会, 2001.
- 8) P. Broughton, P. Ndumbaro : The analysis of cable & catenary structures, Thomas Telford, 1994.
- 9) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適応可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.
- 10) 藤井文夫, 瀧論, 萩原伸幸, 本間俊雄, 三井和男: 非線形構造モデルの動的応答と安定性, コロナ社, 2003.
- 11) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性行列について, 土木学会論文報告集, No.270, pp.41-49, 1978.
- 12) I. Fried : Large Deformation Static and Dynamic Finite Element Analysis of Extensible Cables, Computers & Structures, Vol.15, No.3, pp.315-319, 1982.
- 13) S. Palkowski : Statik der Seilkonstruktionen, Springer, New York, 1990.
- 14) F. Fujii, H. Noguchi, P. Osterrieder : Static and Dynamic Large Displacement Response of Flexible Nets, IASS-APCS, Taipei, 2003.

(2003 年 9 月 12 日受付)