

走行荷重を受ける Timoshenko ばりの 静的基本解を用いた積分方程式解法

Integral equation method using static fundamental solution for Timoshenko beams
subjected to moving dynamic loads

阿部和久*, 紅露一寛**
Kazuhisa Abe, Kazuhiro Koro

*工博, 新潟大学助教授, 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

**博 (工), 新潟大学助手, 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

An integral equation method is developed for Timoshenko beams, within the framework of application to the wheel/rail dynamic interaction problems. The integral equation is derived using a fundamental solution for static deflection. Although the domain integration arises associated with the inertia, owing to the simplicity of the static kernel, the evaluation of slope deflection, shearing force and bending moment can be achieved readily. Furthermore the employment of a fundamental solution for a distributed load is attempted to suppress the unwonted impulsive wheel load which is induced by the passage of wheel over nodes. Through numerical experiments, the performance of the developed method is examined, and it is found that the method leads to good accuracy for very coarse discretization.

Key Words : *integral equation method, Timoshenko beam, wheel/rail dynamic interaction*
キーワード : 積分方程式法, Timoshenko ばり, 車輪・レール動的相互作用

1. はじめに

列車走行時の軌道振動特性の把握は, 列車の乗心地の改善, 振動・騒音の低減, 軌道の保守・管理など様々な問題の対策を講じる上で重要となる. 特に, 車輪走行下でのレールの動的応答解析は, これらの問題に対する基礎的知見を得るための有効な手段となり得る.

レールのモデル化には, Euler ばりと Timoshenko ばりの 2 つのはりモデルが一般に用いられている. 両モデル間の差異はレール断面の回転慣性とせん断たわみの考慮の有無にあるが, その影響は 500Hz より高周波数域において顕著となる¹⁾. したがって, レール・車輪周辺の動的相互作用解析のように, 高周波振動が重要となる問題においては Timoshenko ばりによるレールのモデル化が必須となる.

著者の一人は文献 2) において時間域積分表現式に基づく Timoshenko ばりの定式化を試みた. 当該手法による場合, 有限要素解析に見られるようなせん断ロッキングの問題も無く, 移動荷重下でのレールの応答を極めて高精度に求めることが可能となる. しかし, 定式化に当り, はりに周期条件を課し Fourier 級数により時間域 Green 関数を構成している. そのため, 解析精度を確保し得る項数まで基本解を計算する必要がある. 場合によっては相当な計算時間を費やすことがある. さらに, たわみ角や断面回転角などの評価には別途積分表現式を導出する必要があり, 計算の煩雑化が不可避となる. なお, 無限長 (半無限長) Timoshenko ばりに対する時間域 Green 関数は, Boley & Chao³⁾ により与えられているが, 逆 Laplace 変換に数値積分を要し, 十分な精度と計算効率の両者を維持したアルゴリ

ズムの構築はやはり困難に思われる.

一方, 有限要素法による Timoshenko ばりの定式化も多く研究者により試みられてきている. 有限要素法による Timoshenko ばりの解析では, 前述のせん断ロッキングへの対処が最も重要な課題となる. これまでにせん断ロッキングを生じない要素の開発^{4),5)}や, 次数低減積分によるロッキングおよび応力振動の回避^{6),7)}などの検討がなされてきており, 当該問題は既に概ね解決されている.

有限要素法によるレールの離散化においても, せん断ロッキングを生じない要素の使用が一般的となっている^{8),9),10)}. しかし, レールのように移動荷重を受ける Timoshenko ばりの解析に有限要素法を用いる場合, 本論文中的解析例でも示すように, 輪重変動に不自然な振動が現れることがある. これは, 荷重作用位置におけるたわみ角の不連続性が有限要素によって適切にモデル化されていないことに因るものであり, レールに対する高精度な解法の構成には, せん断ロッキング以外にも解決すべき課題が内在していることを示している.

上述のように, 時間域積分表現式に基づく方法や有限要素法など, これまでに提案された解法にはいずれにおいても一長一短があり, レールの動的応答を容易且つ適切に解析し得る新たな解法の構築が望まれる. 本研究では, 走行する変動輪重下でのレールの振動応答解析を対象に, 積分方程式法に基づいた解法の構成を試みる. 具体的には, 時間域基本解の適用が難しいことから, Antes¹¹⁾により導出された静的たわみの基本解を用いる方法について検討する. なお, その際に慣性項をはりに分布する物体力項と同様に扱い, その結

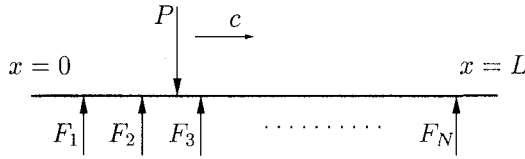


図-1 解析対象の概要

果として生ずる領域積分を有限要素法と同様に離散近似して評価する。この場合、離散節点におけるたわみと断面回転角とが未知量として付加されることとなる。さらに、基本解を集中荷重に対するものから分布荷重に対するものに変更し、提案手法のさらなる精度改善を図る。具体的な解析を通し提案手法のレール振動応答解析への適用可能性について検討する。

2. 積分方程式法による定式化

2.1 Timoshenko ばりの運動方程式

図-1 に示すように、速度 c で走行する荷重 $P(t)$ の作用の下、 N 個の離散点で支持されている長さ L のはりを考える。Timoshenko ばりによりモデル化した場合の鉛直方向変位と断面回転角に関する運動方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{u} + GAK \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \\ P(t) \delta(x - x_0 - ct) - \sum_{j=1}^N F_j(t) \delta(x - x_j), & \quad (1) \\ \rho I \ddot{\psi} + GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 u ははりのたわみ、 ψ は断面回転角、 $(\cdot)$ は時間微分、 ρ ははりの質量密度、 A は断面積、 I は断面二次モーメント、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 K は Timoshenko ばりのせん断係数である。また、はりの左右端座標はそれぞれ $x = 0, L$ とする。 x_0 は走行荷重 $P(t)$ の $t = 0$ における作用位置、 x_j は離散支持点位置であり、 $F_j(t)$ は j 番支持点での反力、 δ は Dirac のデルタ関数である。

2.2 静的基本解に基づく積分方程式

式(1)に対応した静的な基本解 $u_i^*(x, \xi)$, $\psi_i^*(x, \xi)$ ($i = 1, 2$) を、次式をみたす解として定義する。

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi_i^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi} \right) &= \delta_{1i} \delta(\xi - x), \\ GAK \left(\psi_i^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi} \right) - EI \frac{\partial^2 \psi_i^*}{\partial \xi^2} &= \delta_{2i} \delta(\xi - x) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。なお、 $i = 1$ は $\xi = x$ に単位集中荷重が作用した場合の、 $i = 2$ は単位集中モーメントが作用した場合のつり合い式にそれぞれ対応している。

式(2)をみたす基本解は次式で与えられる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} u_1^*(x, \xi) &= \frac{|\xi - x|^3}{12EI} - \frac{|\xi - x|}{2GAK}, \\ \psi_1^*(x, \xi) &= \frac{(\xi - x)|\xi - x|}{4EI}, \\ u_2^*(x, \xi) &= -\psi_1^*(x, \xi), \\ \psi_2^*(x, \xi) &= -\frac{|\xi - x|}{2EI} \end{aligned} \quad (3)$$

式(1),(2)の解 (u, ψ) , (u_i^*, ψ_i^*) に対して次の積分をとる。

$$\begin{aligned} \int_0^L [\rho A \ddot{u}(\xi, t) + GAK \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi(\xi, t) - \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi}) \\ - P(t) \delta(\xi - x_0 - ct) + \sum_{j=1}^N F_j(t) \delta(\xi - x_j)] u_i^*(x, \xi) d\xi \\ + \int_0^L [\rho I \ddot{\psi}(\xi, t) + GAK (\psi(\xi, t) - \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi}) \\ - EI \frac{\partial^2 \psi(\xi, t)}{\partial \xi^2}] \psi_i^*(x, \xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)を部分積分し、式(2)の関係をを用いて次の積分表現式を得る。

$$\begin{aligned} u(x, t) + [u(\xi, t) Q_1^*(x, \xi) - \psi(\xi, t) M_1^*(x, \xi) \\ - Q(\xi, t) u_1^*(x, \xi) + M(\xi, t) \psi_1^*(x, \xi)]_0^L \\ + \int_0^L \rho A \ddot{u}(\xi, t) u_1^*(x, \xi) d\xi + \int_0^L \rho I \ddot{\psi}(\xi, t) \psi_1^*(x, \xi) d\xi \\ - P(t) u_1^*(x, x_0 + ct) + \sum_{j=1}^N F_j(t) u_1^*(x, x_j) = 0, \\ \psi(x, t) + [u(\xi, t) Q_2^*(x, \xi) - \psi(\xi, t) M_2^*(x, \xi) \\ - Q(\xi, t) u_2^*(x, \xi) + M(\xi, t) \psi_2^*(x, \xi)]_0^L \\ + \int_0^L \rho A \ddot{u}(\xi, t) u_2^*(x, \xi) d\xi + \int_0^L \rho I \ddot{\psi}(\xi, t) \psi_2^*(x, \xi) d\xi \\ - P(t) u_2^*(x, x_0 + ct) + \sum_{j=1}^N F_j(t) u_2^*(x, x_j) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 Q, M はせん断力と曲げモーメントであり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} Q &= -GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ M &= -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

また、 Q_i^*, M_i^* についても基本解 u_i^*, ψ_i^* に対して同様に定義されるものとする。

以下では簡単のため、はり端部に断面力が作用しない場合を対象に議論を進める。なお、はり端部に断面力が作用する場合においても、式(5)に基づき以下に示す手順で定式化を進めれば良い。

式(5)における慣性項の領域積分に際し、補間関数 $\phi_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) を導入し、 $\ddot{u}(x, t), \ddot{\psi}(x, t)$ をはりの長さ方向に離散近似する。

$$\begin{aligned}\ddot{u}^N(x) &= [\phi(x)]\{\ddot{u}^N\}, \\ \ddot{\psi}^N(x) &= [\phi(x)]\{\ddot{\psi}^N\}\end{aligned}\quad (7)$$

ここで、 $\ddot{u}^N(x), \ddot{\psi}^N(x)$ は第 N 時間ステップの時刻 $t_N = N\Delta t$ (Δt は時間増分) における加速度、 $\{\ddot{u}^N\}, \{\ddot{\psi}^N\}$ は節点値ベクトル、 $[\phi(x)]$ は節点値ベクトル成分に対応した n 個の補間関数より成る行ベクトルである。

式(7)を(5)に代入し、 x を節点位置 $\tilde{x}_i$ ($i = 1, \dots, n$) にとると、各節点位置におけるたわみ u_i^N と断面回転角 ψ_i^N に関する次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}u_i^N &+ [u(\xi, t_N)Q_1^*(\tilde{x}_i, \xi) - \psi(\xi, t_N)N_1^*(\tilde{x}_i, \xi)]_0^L \\ &+ \int_0^L \rho A[\phi(\xi)]u_1^*(\tilde{x}_i, \xi) d\xi \{\ddot{u}^N\} \\ &+ \int_0^L \rho I[\phi(\xi)]\psi_1^*(\tilde{x}_i, \xi) d\xi \{\ddot{\psi}^N\} \\ &- u_1^*(\tilde{x}_i, x^N)P^N + \sum_{j=1}^N u_1^*(\tilde{x}_i, x_j)F_j^N = 0, \\ \psi_i^N &+ [u(\xi, t_N)Q_2^*(\tilde{x}_i, \xi) - \psi(\xi, t_N)N_2^*(\tilde{x}_i, \xi)]_0^L \\ &+ \int_0^L \rho A[\phi(\xi)]u_2^*(\tilde{x}_i, \xi) d\xi \{\ddot{u}^N\} \\ &+ \int_0^L \rho I[\phi(\xi)]\psi_2^*(\tilde{x}_i, \xi) d\xi \{\ddot{\psi}^N\} \\ &- u_2^*(\tilde{x}_i, x^N)P^N + \sum_{j=1}^N u_2^*(\tilde{x}_i, x_j)F_j^N = 0\end{aligned}\quad (8)$$

ここで、 $P^N = P(t_N)$, $F_j^N = F_j(t_N)$, $x^N = x_0 + ct_N$ である。

また、同様に第 N ステップにおける走行荷重作用位置 x^N でのたわみ $\bar{u}^N = u(x^N, t_N)$ は次式より与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{u}^N &+ [u(\xi, t_N)Q_1^*(x^N, \xi) - \psi(\xi, t_N)N_1^*(x^N, \xi)]_0^L \\ &+ \int_0^L \rho A[\phi(\xi)]u_1^*(x^N, \xi) d\xi \{\ddot{u}^N\} \\ &+ \int_0^L \rho I[\phi(\xi)]\psi_1^*(x^N, \xi) d\xi \{\ddot{\psi}^N\} \\ &+ \sum_{j=1}^N u_1^*(x^N, x_j)F_j^N = 0\end{aligned}\quad (9)$$

なお、式(3)より $u_1^*(x^N, x^N) = 0$ となることから、式(9)には P^N に関する項が含まれていないことに注意されたい。

式(8)において、 $\{u^N\}, \{\psi^N\}$ をまとめ、節点変位ベクトルを $[u_1^N, \psi_1^N, \dots, u_n^N, \psi_n^N]^T = \{U^N\}$ と改めて定義し直し、その下でレール両端点を含む全節点に関する $2n$ 本の方程式を連立して行列表記すると次のようになる。

$$[\mathbf{K}]\{U^N\} + [\mathbf{M}]\{\ddot{U}^N\} - P^N\{\mathbf{S}^N\} + [\mathbf{C}]\{\mathbf{F}^N\} = \mathbf{0}\quad (10)$$

ここで、 $[\mathbf{K}], [\mathbf{M}]$ はそれぞれ $\{U^N\}, \{\ddot{U}^N\}$ に対応する係数行列、 $\{\mathbf{F}^N\}$ は F_j^N を成分としたベクトル、 $[\mathbf{C}]$, $\{\mathbf{S}^N\}$ は $u_i^*(\tilde{x}_i, x_j)$, $u_i^*(\tilde{x}_i, x^N)$ を成分とした行列およびベクトルである。

同様に、式(9)を行列で書き表すと次式のようになる。

$$\bar{u}^N + [\mathbf{K}^N]\{U^N\} + [\mathbf{M}^N]\{\ddot{U}^N\} + [\mathbf{C}^N]\{\mathbf{F}^N\} = \mathbf{0}\quad (11)$$

ここで、 $[\mathbf{K}^N], [\mathbf{M}^N], [\mathbf{C}^N]$ は式(10)と同様に定義された行ベクトルである。なお、その成分は車輪位置に依存するので、各ステップにおいて更新する必要がある。

2.3 時間積分

式(10),(11)の時間積分法に Newmark 法¹²⁾($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$)を用いる。このとき、式(10),(11)より次式を得る。

$$\begin{aligned}[\mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}]\{U^N\} - P^N\{\mathbf{S}^N\} + [\mathbf{C}]\{\mathbf{F}^N\} \\ = [\mathbf{M}]\{\frac{4}{\Delta t^2}U^{N-1} + \frac{4}{\Delta t}\dot{U}^{N-1} + \ddot{U}^{N-1}\}, \\ \bar{u}^N + [\mathbf{K}^N + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}^N]\{U^N\} + [\mathbf{C}^N]\{\mathbf{F}^N\} \\ = [\mathbf{M}^N]\{\frac{4}{\Delta t^2}U^{N-1} + \frac{4}{\Delta t}\dot{U}^{N-1} + \ddot{U}^{N-1}\}\end{aligned}\quad (12)$$

式(12)における作用力 P^N および $\{\mathbf{F}^N\}$ を与える方程式は、走行荷重やレール支持部のモデル化に依存する。なお、その具体例については次章に示す。

3. 解析例に基づく検討

3.1 解析条件

2.に構成した解法の基本特性について検討することを目的に、図-2に示す比較的簡易な車輪・軌道系モデルを解析対象に設定した。図-2において、 m_w は1車輪当りのバネ下質量、 P_w は静的上載荷重、 k_w は車輪・レール間の接触バネ定数、 k, η はレール支持点におけるパッドのバネ定数と減衰係数、 a は支持点間隔である。なお、解析における各種物性値等を表-1にまとめて示す。また、以下の解析では支持点総数 $N = 10$ とし、初期条件は静止状態で与えた。さらに、レール頭頂面は平坦であるものとし、凹凸は一切設定していない。

3.2 レール作用力等の評価式

図-2の車輪・軌道系モデルの時間積分法に Newmark 法を用いる場合、車輪の運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}P^N + \frac{4}{\Delta t^2}m_w u_w^N \\ = P_w + m_w(g + \frac{4}{\Delta t^2}u_w^{N-1} + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_w^{N-1} + \ddot{u}_w^{N-1})\end{aligned}\quad (13)$$

ここで、 u_w^N は第 N ステップにおける車輪の鉛直変位、 g は重力加速度である。

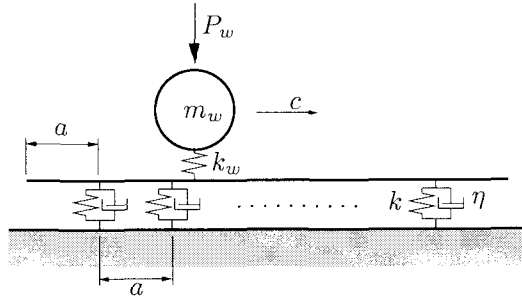


図-2 解析条件

表-1 解析における設定値

車輪走行速度	c	m/s	10
バネ下質量	m_w	kg	350
上載荷重	P_w	N	65170
接触バネ定数	k_w	MN/m	2×10^3
レール質量密度	ρ	kg/m ³	7880
レール断面積	A	m ²	64.05×10^{-4}
断面二次モーメント	I	m ⁴	1960×10^{-8}
ヤング率	E	GPa	206
せん断弾性係数	G	GPa	77.3
せん断係数	K		0.34
支持点間隔	a	m	0.6
支持点総数	N		10
パッドバネ定数	k	MN/m	110
パッド減衰係数	η	kN·s/m	100
時間増分	Δt	s	1/8000

車輪・レールの接触力に関する式は次のようになる。

$$P^N + k_w(\bar{u}^N - u_w^N) = 0 \quad (14)$$

また、レール支持点反力 F_j^N に関する式は次のようになる。

$$F_j^N - (k + \frac{2}{\Delta t}\eta)u_j^N = -\eta(\frac{2}{\Delta t}u_j^{N-1} + \dot{u}_j^{N-1}) \quad (15)$$

解析においては、各節点におけるたわみ u_i^N と断面回転角 ψ_i^N 、車輪鉛直変位 u_w^N 、車輪直下のレールたわみ $\bar{u}^N$ 、車輪・レールの接触力 P^N 、レール支持点反力 F_j^N を未知量とし、式(12)～(15)を連立して求解方程式を構成する。

3.3 有限要素法を用いた場合の解析結果

本研究で構成した積分方程式法による解析に先立ち、比較のため、有限要素法による解析結果の一例を示す。有限要素方程式の構成において、たわみ u に3次 Hermite 多項式を、また断面回転角 ψ に2次の Lagrange 補間を用いる、Nickel & Secor¹³⁾により提案された TIM7 要素を採用した。なお、当該要素は要素端のたわみとたわみ角、断面回転角および要素中央点の断面回転角の7成分を自由度に持つ、せん断ロッキングを起こさない要素である。

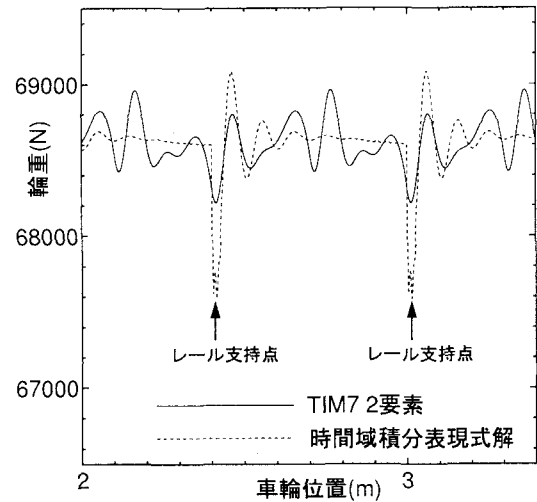


図-3 有限要素 (TIM7 2 要素) による輪重応答解析結果。

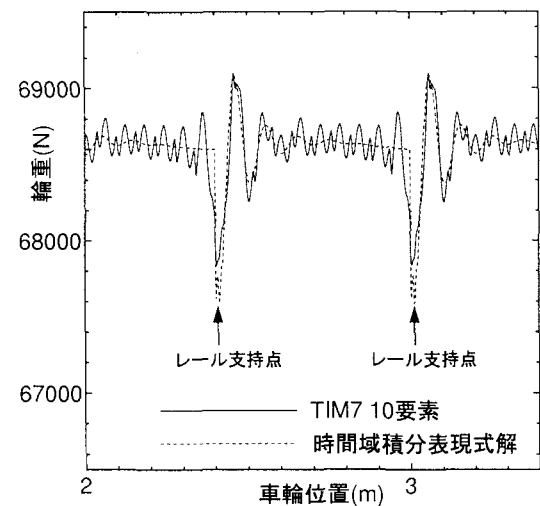


図-4 有限要素 (TIM7 10 要素) による輪重応答解析結果。

解析結果の検討は、解法の差異に最も鋭敏な車輪・レール接触力 (輪重) P の応答に基づいて行う。レール支持点間を2要素および10要素で離散化した場合の輪重変動の様子を、それぞれ図-3,4に示す。図には時間域 Green 関数を用いた積分表現式²⁾による解析結果も合わせて示した。なお、文献2)の方法による解析は前述のように周期解を与える。ここでは周期長を200mと十分に長く設定した。したがって、その解は無窮長のほりに対する解に概ね一致しているものと考えられる。一方、有限要素解析では、レールを自由端を有する有限長 (6.6m) のほりで与えている。しかし、各レール支持点に設けられているパッドの減衰性により、これらの解析条件の違いが輪重に及ぼす影響は無視し得る程度にまで減衰しているものと思われる。

図-3,4より、有限要素解には振幅の比較的大きな輪重振動の発生が認められる。要素分割をレール支持点間2分割から10分割に細分化することにより、この振動振幅は減少しており、時間域積分表現式解に収束し

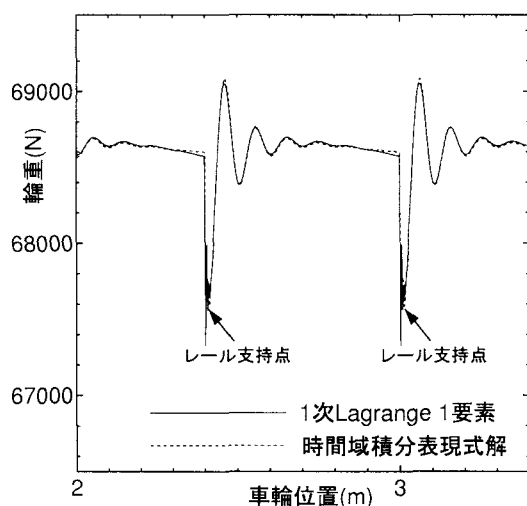


図-5 積分方程式法 (1 次 Lagrange 1 要素) による輪重応答解析結果.

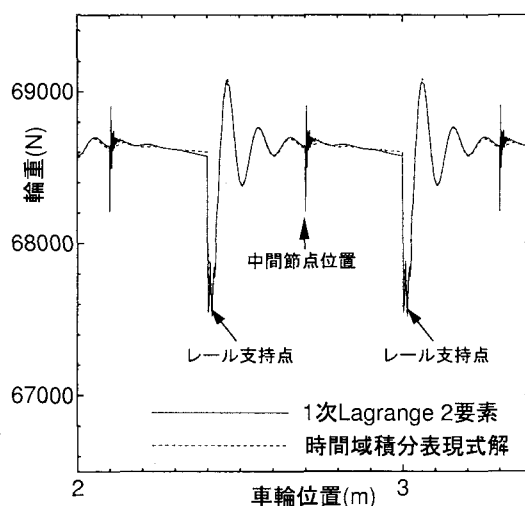


図-6 積分方程式法 (1 次 Lagrange 2 要素) による輪重応答解析結果.

て行く様子が窺える. しかし, 10 分割の下でも, 振動振幅はまだ無視し得ないレベルにあり, 良好な結果を得るためには, さらなる細分割が必要となり, 実用上効率性に欠ける. なお, 有限要素解を他の高精度な解と比較した例が無いこともあり, この不自然な挙動に言及している報告は著者らの知る限り無い.

有限要素解に見られるこの振動は, はりのたわみ形状の連続性に起因するものである. 本来, Timoshenko ばりモデルでは, はりのたわみにせん断変形の影響が考慮されている. そのため, レール支持点や輪重作用点のような集中荷重が作用する位置において, はりのたわみ角は不連続なものとなる. しかし, TIM7 要素のように, はりのたわみ形状を C^1 級の区間多項式で与えた場合, このたわみ角の不連続性が表現できない. この不適合性は, 定点加振の問題においてはそれ程深刻なものとならないが, 本解析例のような走行車輪との連成問題においては, 輪重変動に明確なかたちで影響を及ぼすこととなる. 当該問題の解決には, レール支持点のみならず, 走行輪重の作用点におけるたわみ角の不連続性をも新たな自由度として追加した要素の採用が不可欠である¹⁴⁾. なお, 本研究の目的は積分方程式法に基づく解法の構成にあるので, この新たな要素の検討については特に言及しない. 詳細については文献 14) を参照されたい.

また, レール頭頂面に凹凸を設定した場合の解析では, それによる輪重変動のレベルが上述の輪重振動のレベルより一般に大きなものとなることが予想される. したがって, このような条件下での解析においては, たわみ角の不連続性に配慮しない従来の有限要素によっても概ね妥当な結果が得られるものと期待できる. しかし, レール継目部で発生する衝撃輪重のように, レール頭頂面の凹凸に起因しない現象の解析には, 凹凸の無いレールに対し不自然な輪重変動を生じない解法の構成が必要となることは言うまでもない.

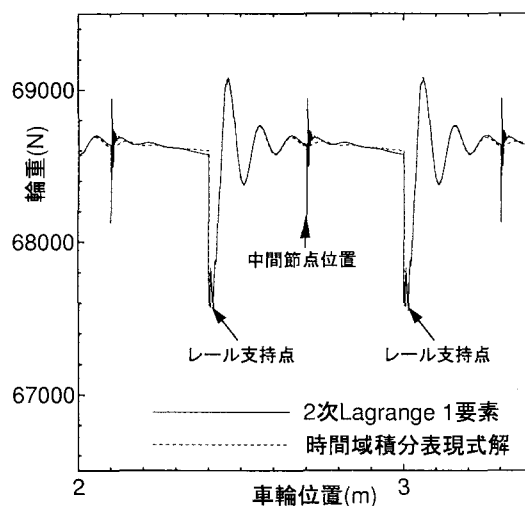


図-7 積分方程式法 (2 次 Lagrange 1 要素) による輪重応答解析結果.

3.4 積分方程式法を用いた場合の解析結果

式(5)における慣性項の領域積分に関連して導入した, 式(7)のたわみと断面回転角の加速度項の離散化に, 1 次の Lagrange 補間を用いた場合の結果を図-5,6 に示す. なお, 図-5,6 はそれぞれ, レール支持点間を 1 要素および 2 要素で分割した場合の結果を示したものである. 図-5 より, 慣性項の評価に相当粗い近似を用いても, 有限要素解に比べ, 時間域積分表現式解との対応が格段に向上していることが確認できる. しかし, レール支持点に位置する節点上を通過する際の輪重変動が, 時間域積分表現式解に比べ 30%程度大きな値となっている. この傾向は, レール支持点の間にも節点が存在している図-6 の中間節点位置での輪重応答においてより明瞭に現れている.

なお, 1 次要素によるたわみ補間では, 節点でたわみ角が不連続となるが, 節点通過時に発生しているこの

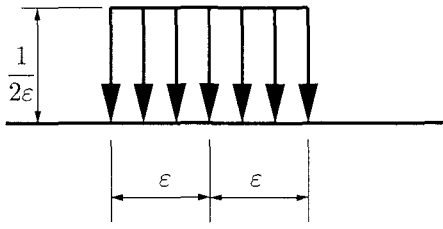


図-8 基本解における荷重条件

不自然な輪重変動は、節点位置においてたわみ角が連続となる補間によっても同様に発生する。例えば、図-7 はレール支持点間を2次のLagrange補間1要素で離散化した場合の結果を示したものである。この場合、レール支持点間の中央に置かれた中間節点ではたわみ角も連続となっているが、図-6と同様に節点通過時に不自然な輪重変動が発生している。

以上の結果より、この輪重変動に対して、節点におけるたわみの連続性は直接関与していないことがわかる。なお、車輪が節点に近接して位置している場合、車輪直下のレールたわみを与える式(9)は、節点のたわみ式(8)を近似する。それに伴う求解方程式の安定性の低下が懸念されたため、車輪直下のレールたわみに関する式を、式(5)第1式を微分して得られるたわみ角に関する積分方程式に基づき構成する方法を試みたが、上述の不自然な輪重変動の除去には至らなかった。

4. 分布荷重に対する基本解による改善

提案手法においては、Timoshenko ばりの静的基本解を用いることで、集中荷重の作用位置におけるたわみ角の不連続性が表現可能となったものの、それに対応する慣性項までは正確に考慮されていない。そのため、節点位置におけるたわみ解 u_i^M と節点近傍における車輪直下のたわみ $\bar{u}^M$ とにわずかな差が生じ、その結果として節点通過時の不自然な輪重変動が引き起こされた可能性が考えられる。ここでは、一つの改善策として、基本解におけるたわみ角の不連続性を許容し得る範囲内で緩和する方法について検討する。具体的には、式(3)の集中荷重に対する基本解を分布荷重に対するものに置き換えることを試みる。

4.1 分布荷重に対する基本解

図-8に示すように、区間 2ϵ において、単位長さ当たり $1/2\epsilon$ の等分布荷重が作用する場合を考える。この等分布荷重を Δ_ϵ と書き表すと、これに対する静的基本解 u_3^*, ψ_3^* は次式をみたすものとして与えられる。

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_3^* - \frac{\partial u_3^*}{\partial \xi}) &= \Delta_\epsilon, \\ GAK (\psi_3^* - \frac{\partial u_3^*}{\partial \xi}) - EI \frac{\partial^2 \psi_3^*}{\partial \xi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)をみたす基本解 u_3^*, ψ_3^* は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_3^* &= -\frac{1}{12EI} \left\{ \epsilon^2 \xi + \frac{3\epsilon}{2} \xi^2 + \xi^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\epsilon} [(\xi + \epsilon)_+^4 - (\xi - \epsilon)_+^4] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{GAK} \left\{ \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4\epsilon} [(\xi + \epsilon)_+^2 - (\xi - \epsilon)_+^2] \right\}, \quad (17) \\ \psi_3^* &= -\frac{1}{12EI} \left\{ \epsilon^2 + 3\epsilon \xi + 3\xi^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\epsilon} [(\xi + \epsilon)_+^3 - (\xi - \epsilon)_+^3] \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $(x)_+ = x(x > 0), = 0(x \leq 0)$ である。

4.2 積分方程式

式(17)を式(4)に代入すると、部分積分の後、節点位置 $\tilde{x}_i$ において次の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\tilde{x}_i - \epsilon}^{\tilde{x}_i + \epsilon} u^N d\xi + [u^N Q_3^* - \psi^N N_3^*]_0^L \\ + \int_0^L \rho A \ddot{u}^N u_3^*(\tilde{x}_i, \xi) d\xi + \int_0^L \rho I \ddot{\psi}^N \psi_3^*(\tilde{x}_i, \xi) d\xi \\ - u_3^*(\tilde{x}_i, x^N) P^N + \sum_{j=1}^N u_3^*(\tilde{x}_i, x_j) F_j^N = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)の全ての積分項において式(7)の離散近似を導入し、さらにNewmark法により時間積分を実行すれば、節点たわみに関する方程式を得る。なお、断面回転角の節点値 ψ_i^N と車輪直下のレールたわみ $\bar{u}^N$ に対しては、2.に構成した集中荷重に対する基本解に基づいた方程式をそのまま用いることとする。

4.3 解析結果

本改善手法を3.1に示した解析例に適用した。式(18)の離散化に当り1次のLagrange補間を用いた。レール支持点間を2要素で分割し、 $\epsilon = 8c\Delta t (=1\text{cm})$ とした場合の輪重変動を図-9に示す。節点通過時に発生していた不自然な衝撃輪重がほとんど除去されている様子が窺える。次に、同一の ϵ の下で、レール支持点間を4要素で分割した場合の結果を図-10に示す。不自然な輪重応答はさらに小さくなりほぼ完全に除去され、時間域積分表現式による解との極めて良い一致が得られており、本改善策の有効性が確認できる。以上に示したように、不自然な衝撃輪重は、要素分割数の増加と共に減少する傾向にある。

次に、レール支持点間4分割の下、 ϵ の値を $4c\Delta t$ と上の解析例の1/2に設定した場合の結果を図-11に示す。レール支持点間に置かれた節点を車輪が通過する際に発生する衝撃輪重が、 $\epsilon = 8c\Delta t$ とした場合に比べ幾分大きくなっている様子が確認できる。ここに示した結果を含め、 ϵ の設定値が輪重に及ぼす影響について検討したところ、レール支持点間4分割の下では、レール種別などの条件に関わらず $\epsilon = 8c\Delta t$ において概ね良好な結果が得られることがわかった。

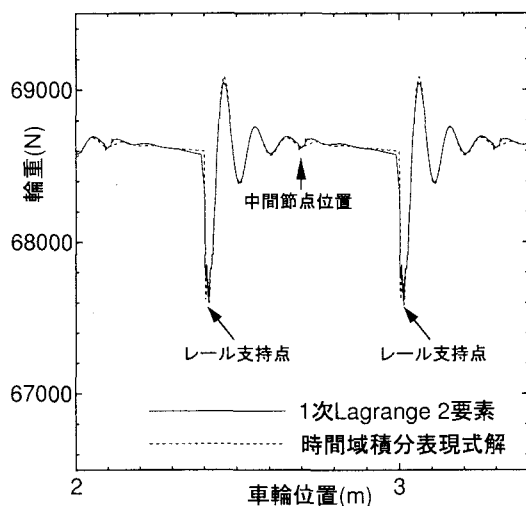


図-9 分布荷重の基本解を用いた積分方程式法 (1 次 Lagrange 2 要素) による輪重応答解析結果. $\varepsilon = 8c\Delta t$ とした場合.

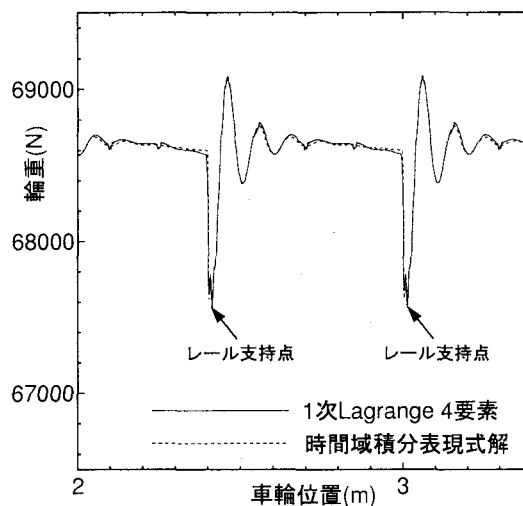


図-11 分布荷重の基本解を用いた積分方程式法 (1 次 Lagrange 4 要素) による輪重応答解析結果. $\varepsilon = 4c\Delta t$ とした場合.

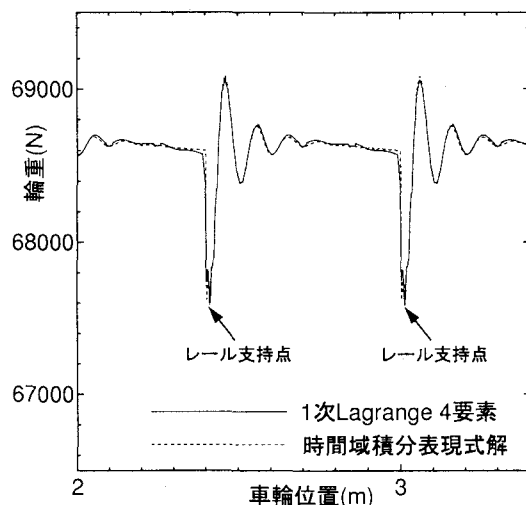


図-10 分布荷重の基本解を用いた積分方程式法 (1 次 Lagrange 4 要素) による輪重応答解析結果. $\varepsilon = 8c\Delta t$ とした場合.

なお、ここでは節点たわみに対してのみ分布荷重の基本解に基づいた定式化を適用したが、さらに走行車輪直下のたわみに対して本基本解を用いた場合についても解析を試みた。この場合、両たわみ式に対して同一の基本解を用いることとなるので、車輪がいずれかの節点近傍を通過する際に、当該節点のたわみに関する方程式と車輪直下のたわみに関する方程式とが縮退し、求解方程式の安定性の低下を招く恐れがある。しかし、解析結果には、節点通過時においても不自然な衝撃輪重は認められなかった。このことから、3.4 で既に述べたように、節点通過時の衝撃輪重の発生に、係数行列の一次独立性の低下が直接関与していないことが追認できる。

5. おわりに

走行車輪とレールとの連成問題への適用を対象に、Timoshenko ばりの振動応答解析法を積分方程式法に基づき構成した。定式化において静的基本解を用いたため、慣性項に関する領域積分が必要となるが、有限要素法において懸念されるせん断ロックや輪重振動の発生が無く、1 次要素による粗い分割でも良好な精度を確保し得ることがわかった。また、まくらぎ支持点間 4 要素分割の下、分布幅 $\varepsilon = 8c\Delta t$ の分布荷重に対する基本解を適用したものが、節点通過時に発生する不自然な衝撃輪重の除去において有効な改善策となり、良好な結果を与えることが確認できた。なお、この衝撃輪重の発生については、本論文中で述べたように様々な検討を試みた。しかし、現段階では明確な原因を見出すまでに至ってはならず、この点については今後の課題である。

なお、本解法では簡単な多項式で与えられる静的基本解を用いているので、本論文で示したたわみの定式化と同様の離散化条件の下で、たわみ角や断面力の定式化なども容易に実行できるという利点を有している。

参考文献

- 1) Knothe, K.L. and Grassie, S.L. : Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle Sys. Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.
- 2) 阿部和久, 森岡泰助, 古田 勝 : Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化, 構造工学論文集, Vol.44A, 367-374, 1998.
- 3) Boley, B.A. and Chao, C.C. : Some solutions of the Timoshenko beam equations, *Jour. Appl. Mech.*, **22**, 579-586, 1955.
- 4) Reddy, J.N. : On locking-free shear deformable beam finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **149**, 113-132, 1997.

- 5) Vermeulen,A.H. and Heppeler,G.R. : Predicting and avoiding shear locking in beam vibration problems using the B-spline field approximation method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **158**, 311-327, 1998.
- 6) Prathap,G. and Bhashyam,G.R. : Reduced integration and the shear-flexible beam element, *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, **18**, 195-210, 1982.
- 7) Prathap,G. and Babu,C. : Field-consistent strain interpolations for the quadratic shear flexible beam element, *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, **23**, 1973-1984, 1986.
- 8) Thomas,J. and Abbas,B.A.H. : Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam, *Jour. Sound. Vibr.*, **41**, 291-299, 1975.
- 9) Dong,R.G., Sankar,S. and Dukkipati,R.V. : A finite element model of railway track and its application to the wheel flat problem, *Proc. Instn. Mech. Engrs., Part F*, **208**, 61-72, 1994.
- 10) Luo,Y., Yin,H. and Hua,C. : The dynamic response of railway ballast to the action of trains moving at different speeds, *Proc. Instn. Mech. Engrs., Part F*, **210**, 95-101, 1996.
- 11) Antes,H. : Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams, *Comp. Struct.*, **81**, 383-396, 2003.
- 12) Newmark,N.M. : A method of computation for structural dynamics, *Proc. ASCE, EM*, **85**, 67-94, 1959.
- 13) Nickel,R.E. and Secor,G.A. : Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, **5**, 243-253, 1972.
- 14) 紅露一寛, 阿部和久, 石田 誠, 鈴木貴洋 : 車両・軌道系の振動解析に適した Timoshenko ばり有限要素法の提案, 第 10 回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集, 533-536, 2003.

(2003 年 9 月 12 日 受付)