

2 方向に変厚を有する直交異方性斜め厚板の振動解析

Vibration of orthotropic Mindlin skew plates varying thickness in two directions

水澤富作* 名木野晴暢** 田仲八重***
Tomisaku Mizusawa Harunobu Nagino Yae Tanaka

*大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学大学院 建設工学専攻 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

***大同工業大学 非常勤講師 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

This paper presents vibration of orthotropic Mindlin skew plates with varying thickness in two directions by the spline element method. To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods. Good accuracy is obtained. Frequencies of orthotropic Mindlin skew plate with varying thickness are analyzed for the different thickness ratios, the aspect ratios, the ratio of the width to thickness and skew angles.

Key Words: orthotropic, Mindlin skew plate, varying thickness, spline element method, vibration

キーワード: 直交異方性, Mindlin 斜板, 変厚, スプライン要素法, 振動

1. まえがき

近年, 構造物の合理的な設計やメンテナンスの観点から, 板厚を変化させた変断面板が多用されるようになってきている。また, 航空機の翼や斜スラブ橋などに用いられる斜板は異方性構造を成し, また板厚を1方向または2方向にテーパ状に変化させる場合がある。板厚や剛性値を任意に変化させれば, 最適な剛性や断面形状が求められるので, 2方向に変厚な直交異方性斜板の振動特性を明らかにすることは, 設計上重要な課題である。

任意の変断面を有する直交異方性斜板の振動問題では, 厳密な解を求めることが困難になるので, Ritz法や有限要素法などの数値解析法の適用性に関する研究¹⁾が報告されている。Dokainishら²⁾は, 薄板理論に基づく Galerkin法を用いて, 一方向に変厚を有する直交異方性斜板の振動解析を行っている。Singhら³⁾は, 薄板理論に基づく Ritz法を用いて, 板厚が2方向に直線的に変化する等方性斜板の振動解析を行っている。また, せん断変形や回転慣性の影響を考慮した Mindlin板理論を用いた研究として, spline要素法を用いた, 水澤ら⁴⁾による一方向に変厚な Mindlin斜板の振動解析などがある。

しかしながら, 2方向に変厚を有する直交異方性斜め厚板の振動解析は, さほど多く報告されていないように思われる⁵⁾。著者らが知る限りでは, Dokainishら²⁾が薄板理論に基づく Galerkin法を用いて, 一方向に変厚な直交異方性斜板の振動解析を行っている。また,

Matsudaら⁶⁾は, Mindlin板理論に基づく離散化積分方程式法を用いて, 一方向に変厚を有する比較的薄い斜板の振動解析を行っている。

強い異方性を示す積層板や木質板の振動問題では, 板厚が薄くても, 横せん断変形や回転慣性の影響が無視できなくなる⁷⁾。しかしながら, 変厚を有する直交異方性斜め厚板の振動特性に与える変断面性状の影響については, 明らかにされていないように思われる。

本研究では, Mindlin板理論に基づく spline要素法を用いて, 2方向に変厚を有する直交異方性斜板の振動解析を行い, 解の収束性と精度比較を行っている。また, 異方性の大きなシトカスプルス材から成る変厚斜板の振動数パラメータに与える変厚比, 幅厚比, 辺長比や斜角などの影響について明らかにしている。

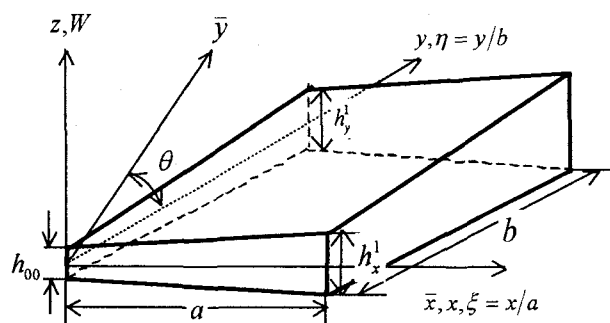


図-1 2方向変厚斜板と斜交座標系

2. 式の定式化

Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1に示すような2方向に変厚なスプライン要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される斜交座標系と偏微分の関係式を用いる。

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} - \bar{y} \tan \theta, y = \bar{y} \sec \theta \\ \partial(\bullet)/\partial \bar{x} &= \partial(\bullet)/\partial x, \\ \partial(\bullet)/\partial \bar{y} &= -\partial(\bullet)/\partial x \tan \theta + \partial(\bullet)/\partial y \sec \theta \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{x}-\bar{y}$ は直交座標系、 $x-y$ は斜交座標系であり、また θ は図-1に示すように $\bar{y}$ 軸と y 軸で挟まれる斜角である。

直交座標系の $\bar{y}$ 軸と $\bar{x}$ 軸回りの回転角 $\phi_{\bar{x}}, \phi_{\bar{y}}$ を斜交座標系で表すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) &= \phi_x(x, y) \cos \theta, \\ \phi_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\phi_x(x, y) \sin \theta + \phi_y(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 ϕ_x, ϕ_y はそれぞれ斜交座標系の y 軸と x 軸回りの回転角を表す。

ここでは、次式で示す無次元斜交座標系を用いて、式の定式化を行う。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, W' = W/b \quad (3)$$

ここで、 W はたわみであり、 a と b はそれぞれ斜板の長さと同幅である。

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮したMindlin板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W' &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化されたB-spline関数であり、 W' は無次元化したたわみである。また $i_x = k-1+M_x$, $i_y = k-1+M_y$, $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi)N_{1,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi)N_{i_y,k}(\eta)]$ である。未定係数ベクトルはそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \{A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{i_x i_y}\}^T \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \{B_{11} \ B_{12} \ \dots \ B_{i_x i_y}\}^T \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \{C_{11} \ C_{12} \ \dots \ C_{i_x i_y}\}^T \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $k-1$ はspline関数の次数であり、また M_x と M_y は x -方向と y -方向の要素分割数である。したがって、式(4)をマトリックスで表すと次式で与えられる。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (6)$$

ここで、

$$[S]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $\{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn} \ \{\delta_B\}_{mn} \ \{\delta_C\}_{mn}\}^T$,

$\{d\} = \{\phi_x \ \phi_y \ W'\}^T$ である。

次にMindlin板理論で定義される曲げひずみ $\{\epsilon\}_b = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\epsilon\}_s = \{\gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}_s$ を無次元斜交座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\{\epsilon\}_b = \begin{Bmatrix} (1/a)\partial\phi_x/\partial\xi \\ (1/b)\sin\theta \tan\theta \partial\phi_x/\partial\xi - (1/a)\tan\theta \partial\phi_y/\partial\xi \\ - (1/b)\sec\theta \sin\theta \partial\phi_x/\partial\eta + (1/b)\sec\theta \partial\phi_y/\partial\eta \\ - 2(1/a)\sin\theta \partial\phi_x/\partial\xi + (1/a)\partial\phi_y/\partial\xi + (1/b)\partial\phi_x/\partial\eta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\{\epsilon\}_s = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \phi_x + \phi_y - (b/a)\tan\theta \partial W'/\partial\xi + \sec\theta \partial W'/\partial\eta \\ \cos\theta \phi_x + (b/a)\partial W'/\partial\xi \end{Bmatrix} \quad (9)$$

したがって、式(6)を式(8)と(9)に代入すれば、ひずみベクトル $\{\chi\}$ は次式で与えられる。

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon\}_b \\ \{\epsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (10)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、また、ひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a)\partial/\partial\xi & 0 & 0 \\ (1/a)\sin\theta \tan\theta \partial/\partial\xi & -(1/a)\tan\theta \partial/\partial\xi & 0 \\ -(1/b)\sec\theta \sin\theta \partial/\partial\eta & + (1/b)\sec\theta \partial/\partial\eta & 0 \\ -2(1/a)\sin\theta \partial/\partial\xi & (1/a)\partial/\partial\xi & 0 \\ + (1/b)\partial/\partial\eta & & \\ -\sin\theta & 1 & -(b/a)\tan\theta \partial/\partial\xi \\ \cos\theta & 0 & +\sec\theta \partial/\partial\eta \\ & & (b/a)\partial/\partial\xi \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
[B]_{mn} &= [T][S]_{mn} \\
&= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} (1/a)\cos\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & 0 & 0 \\ (1/a)\sin\theta\tan\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & -(1/a)\tan\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & 0 \\ -(1/b)\sec\theta\sin\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & +(1/b)\sec\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & 0 \\ -2(1/a)\sin\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & (1/a)\dot{N}_m\dot{N}_n & 0 \\ + (1/b)\dot{N}_m\dot{N}_n & & \\ -\sin\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & N_m\dot{N}_n & -(b/a)\tan\theta\dot{N}_m\dot{N}_n \\ \cos\theta\dot{N}_m\dot{N}_n & 0 & +(b/a)\dot{N}_m\dot{N}_n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{Bmatrix} \{B_b\}_{mn} \\ \{B_s\}_{mn} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \quad (12)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\dot{N}_m &= \partial N_{m,k}(\xi)/\partial \xi, \quad \dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta)/\partial \eta \\
N_m &= N_{m,k}(\xi), \quad N_n = N_{n,k}(\eta)
\end{aligned}$$

である。

斜板の板厚は、 x -方向と y -方向に直線的に変化するものと仮定する。図-1に示すように、 $\xi = 0$ と $\xi = 1$ での板厚は、それぞれ h_{00} と h_x^1 、 $\eta = 1$ での板厚は h_y^1 とすると、次式で示される。

$$h(\xi, \eta) = h_{00}H_x(\xi)H_y(\eta) \quad (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
H_x(\xi) &= (\delta_x - 1)\xi + 1 \\
H_y(\eta) &= (\delta_y - 1)\eta + 1
\end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 δ_x, δ_y は変厚比であり、それぞれ $h_x^1/h_{00}, h_y^1/h_{00}$ で表される。

直交異方性斜板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは、それぞれ次式で与えられる。

$$[D]_b = D_{\bar{x}} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{\bar{y}\bar{x}} & 0 \\ \nu_{\bar{y}\bar{x}} & E_{\bar{y}}/E_{\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{\bar{y}\bar{x}}\nu_{\bar{x}\bar{y}})G_{\bar{x}\bar{y}}/E_{\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[D]_s = \kappa h(\xi, \eta) \begin{bmatrix} G_{\bar{y}\bar{z}} & 0 \\ 0 & G_{\bar{x}\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 $D_{\bar{x}} = E_{\bar{x}}h(\xi, \eta)^3/12(1 - \nu_{\bar{y}\bar{x}}\nu_{\bar{x}\bar{y}})$ 、 κ はせん断修正係数であるが、等方性板に用いられる $\pi^2/12$ に仮定している⁸⁾。また、 $E_{\bar{x}}, E_{\bar{y}}$ はヤング係数、 $G_{\bar{x}\bar{y}}, G_{\bar{y}\bar{z}}, G_{\bar{x}\bar{z}}$ はせん断弾性係数、 $\nu_{\bar{x}\bar{y}}, \nu_{\bar{y}\bar{x}}$ はポアソン比であり、直交異方性板では、次式の関係が成り立つ。

$$\nu_{\bar{x}\bar{y}}E_{\bar{y}} = \nu_{\bar{y}\bar{x}}E_{\bar{x}} \quad (17)$$

2方向に変厚を有する直交異方性 Mindlin 斜板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、それぞれ次式で示される。

$$\begin{aligned}
U &= (abc\cos\theta/2) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \{\varepsilon\}_b^T [D]_b \{\varepsilon\}_b + \{\varepsilon\}_s^T [D]_s \{\varepsilon\}_s \right\} d\xi d\eta \\
&= (D_{\bar{x}}^{00} abc\cos\theta/2a^2) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ H_x(\xi)^3 H_y(\eta)^3 \sec^2\theta \left[\cos^4\theta (\partial\phi_x/\partial\xi)^2 \right. \right. \\
&\quad + 2\nu_{\bar{y}\bar{x}} \cos^2\theta \left\{ \sin^2\theta (\partial\phi_x/\partial\xi)^2 - \sin\theta (\partial\phi_x/\partial\xi) (\partial\phi_y/\partial\xi) \right\} \\
&\quad - (a/b) \sin\theta (\partial\phi_x/\partial\xi) (\partial\phi_y/\partial\eta) + (a/b) (\partial\phi_x/\partial\xi) (\partial\phi_y/\partial\eta) \} \\
&\quad + (D_{\bar{y}}/D_{\bar{x}}) \left\{ \sin^2\theta (\partial\phi_x/\partial\xi)^2 - \sin\theta (\partial\phi_y/\partial\xi) \right. \\
&\quad - (a/b) \sin\theta (\partial\phi_x/\partial\eta) + (a/b) (\partial\phi_y/\partial\eta) \}^2 \\
&\quad + (D_{\bar{x}\bar{y}}/D_{\bar{x}}) \left\{ -2 \sin\theta (\partial\phi_x/\partial\xi) (\partial\phi_y/\partial\xi) + (a/b) (\partial\phi_x/\partial\eta) \right\}^2 \\
&\quad + 12(1 - \nu_{\bar{x}\bar{y}}\nu_{\bar{y}\bar{x}}) \kappa (b/h_{00})^2 (a/b)^2 H_x(\xi) H_y(\eta) \\
&\quad \times \left[S_{\bar{y}\bar{z}} \{ \cos\theta\phi_x + (b/a) (\partial W'/\partial\xi) \}^2 + S_{\bar{x}\bar{z}} \{ -\sin\theta\phi_x + \phi_y \right. \\
&\quad \left. \left. - \tan\theta (b/a) (\partial W'/\partial\xi) + \sec\theta (\partial W'/\partial\eta) \}^2 \right] d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
T &= (\rho h_{00}/2) \omega^2 ab^3 \cos\theta \int_0^1 \int_0^1 \left\{ H_x(\xi) H_y(\eta) W'^2 \right. \\
&\quad \left. + (1/12) (h_{00}/b)^2 H_x(\xi)^3 H_y(\eta)^3 (\phi_x^2 - 2 \sin\theta\phi_x\phi_y + \phi_y^2) \right\} d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $D_{\bar{x}}^{00} = E_{\bar{x}}h_{00}^3/12(1 - \nu_{\bar{x}\bar{y}}\nu_{\bar{y}\bar{x}})$ 、 ρ は密度、 ω は円振動数 (rad/sec) である。また、 $S_{\bar{y}\bar{z}} = G_{\bar{y}\bar{z}}/E_{\bar{x}}$ 、 $S_{\bar{x}\bar{z}} = G_{\bar{x}\bar{z}}/E_{\bar{x}}$ である。

変厚を有する直交異方性斜板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、次式で示される。

$$\Pi = U - T \quad (20)$$

したがって、式(4)を式(20)に代入して、 Π を極値化すれば、次式の代数方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{rs} = 0 \quad (21)$$

式(21)をマトリックス表示すれば、次式のようになる。

$$([K]_{mnrs} - n^{*2} [M]_{mnrs}) \{\Delta\}_{mn} = \{0\} \quad (22)$$

ここで、 n^* は、振動数パラメータであり、次式で定義している。

$$n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_{00} / D_{\bar{x}}^{00}} \quad (23)$$

剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ と質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$[K]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [K\phi_x\phi_x] & [K\phi_x\phi_y] & [K\phi_x W'] \\ [K\phi_y\phi_x] & [K\phi_y\phi_y] & [K\phi_y W'] \\ [K W'\phi_x] & [K W'\phi_y] & [K W' W'] \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[M]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [M\phi_x\phi_x] & 0 & 0 \\ 0 & [M\phi_y\phi_y] & 0 \\ 0 & 0 & [MW'W'] \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のマトリックスの大きさは、 $3 \times (k + M_x - 1)(k + M_y - 1)$ で与えられる。前述のように、 $k-1$ は spline 関数の次数であり、また、 M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。Appendix には、これらのサブマトリックスが示してある。

3. 数値計算例および考察

ここでは、Mindlin 板理論に基づく spline 要素法を用いて、1 方向または 2 方向に変厚を有する直交異方性斜板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、辺長比、斜角や境界条件の影響について示す。ここで、斜板の境界条件は FC-CS のように表し、それぞれ y 軸に平行な 2 辺 ($\xi = 0, 1.0$) で自由辺 (F)、固定辺 (C) であり、 x 軸に平行な 2 辺 ($\eta = 0, 1.0$) で固定辺 (C)、単純支持辺 (S) に相当している。

表-1 には、計算例に用いるシトカスブルース板とメイプル合板の材料特性値が示してある。ただし、メイプル合板の材料特性値は、表-4 に示す精度比較にのみ使用している。

3.1 変厚を有する直交異方性 Mindlin 斜板の振動数パラメータの収束性と精度比較

表-2 には、2 方向に変厚である直交異方性斜板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_{00} / D_{x^{00}}}$ の収束性に与える要素分割数の影響が示してある。ここで、辺長比 $a/b = 1.0$ 、幅厚比 $b/h_{00} = 10$ 、 x 方向と y 方向の変厚比

$h_x^1/h_{00} = h_y^1/h_{00} = 2.0$ と仮定している。また、斜角 θ を 30° と 60° 、境界条件を周辺固定 (CC-CC)、周辺単純支持 (SS-SS) とし、要素分割数 $M_x = M_y$ を 8 から 24 まで変化させている。これより、要素分割数が増大するにつれ、振動数パラメータ、 n^* は、境界条件や斜角に関係なく、一定値への安定した収束状態を示している。以下に述べる計算例では、要素分割数 $M_x = M_y$ は 24 としている。

表-3 には、周辺固定された等厚な直交異方性 Mindlin 斜板の振動数パラメータ、 n^* の精度比較が示してある。ここで、幅厚比 $b/h_{00} = 100$ 、 x 方向と y 方向の変厚比 $h_x^1/h_{00} = h_y^1/h_{00} = 1.0$ と仮定する。数値計算に用いた材料特性値は、 $L = ((1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy}/E_x) = 0.845$ 、 $\nu_{xy} = 0.1206$ 、 $K = (E_y/E_x) = 0.3205$ である。また、比較のために、Dokainish ら²⁾の薄板理論に基づく Galerkin 法による結果も示してある。ただし、表中の空欄は、解が得られていないことを示す。これより、辺長比や斜角に関わらず、本手法による値は、Dokainish らの薄板理論に基づく結果とよく一致している。

次に、表-4 には、1 方向に変厚を有する斜めメイプル合板の振動数パラメータ、 n^* の精度比較が示してある。

表-1 直交異方性板の材料特性値^{9),10)}

	$E_{\bar{x}}$	$E_{\bar{y}}$	$E_{\bar{z}}$	$\nu_{\bar{xy}}$
	$G_{\bar{xy}}$	$G_{\bar{yz}}$	$G_{\bar{xz}}$	
	$[10^3 \text{ kgf/cm}^2]$			
シトカスブルース	9.2 7.7	118.0 7.3	5.1 0.34	0.37
メイプル合板	131.5 11.18	42.18 —	— —	0.38

ただし、—は、与えられていない物性値を示す。

表-2 2 方向に変厚を有する直交異方性斜板の振動数パラ

メータ n^* の収束性: $b/h_{00} = 10$, $a/b = 1.0$,
 $h_x^1/h_{00} = h_y^1/h_{00} = 2.0$

Boundary conditions	$\theta(^{\circ})$	$M_x = M_y$	1st	2nd	3rd	4th	5th
CC-CC	30	8	52.91	69.20	88.13	107.5	110.5
		10	52.95	69.30	88.31	107.7	110.8
		12	52.98	69.35	88.37	107.8	111.0
		14	52.99	69.37	88.41	107.8	111.0
		16	52.99	69.39	88.42	107.8	111.1
		18	53.00	69.40	88.43	107.8	111.1
		20	53.00	69.40	88.44	107.8	111.1
		22	53.00	69.40	88.44	107.8	111.1
		24	53.00	69.41	88.45	107.8	111.1
	60	8	76.75	96.45	124.1	150.6	155.4
		10	76.92	96.75	124.3	150.9	155.5
		12	77.00	96.90	124.4	151.0	155.6
		14	77.05	96.98	124.4	151.0	155.6
		16	77.08	97.03	124.5	151.1	155.7
		18	77.10	97.06	124.5	151.1	155.7
		20	77.11	97.08	124.5	151.1	155.7
		22	77.12	97.10	124.5	151.1	155.7
		24	77.13	97.11	124.5	151.1	155.7
	30	8	27.48	42.61	50.39	60.43	69.99
		10	27.51	42.63	50.47	60.42	69.96
		12	27.52	42.64	50.51	60.42	69.96
		14	27.53	42.64	50.53	60.43	69.97
		16	27.54	42.64	50.55	60.43	69.97
		18	27.54	42.65	50.56	60.43	69.97
		20	27.54	42.65	50.56	60.43	69.97
		22	27.54	42.65	50.57	60.43	69.97
		24	27.54	42.65	50.57	60.43	69.97
	60	8	44.80	62.37	82.07	83.35	103.9
		10	44.91	62.43	82.06	83.59	103.6
		12	44.97	62.47	82.07	83.72	103.6
		14	45.01	62.49	82.08	83.80	103.6
		16	45.03	62.51	82.09	83.86	103.6
		18	45.05	62.52	82.09	83.89	103.6
		20	45.06	62.52	82.10	83.92	103.6
		22	45.07	62.53	82.10	83.93	103.6
		24	45.08	62.53	82.10	83.95	103.6

ここで、幅厚比 $b/h_{00} = 100$ 、 y 方向の変厚比 $h_y^1/h_{00} = 1.0$ 、斜角 $\theta = 0^\circ$ 、辺長比 $a/b = 1.0$ と仮定している。また、境界条件は、CC-SS、CS-SS とし、 x 方向の変厚比 h_x^1/h_{00} を 1.1, 1.3, 1.5 と変化させている。比較のために、Lal ら¹⁰⁾の薄板理論に基づく spline 関数法による結果も示してある。これより、境界条件や x 方向変厚比に関わらず、本手法による値は、薄板理論を適用した Lal らの値と良く一致した結果を示している。

3.2 1方向に変厚を有する直交異方性 Mindlin 斜板の振動特性

図-2には、 x 方向に変厚を有し、周辺固定された斜めシトカスブルース柃目板の基本振動数パラメータ、 n_1^* に与える幅厚比 b/h_{00} と変厚比 h_x^1/h_{00} の影響が示されている。ここで、辺長比 $a/b=1.0$ 、斜角 $\theta=45^\circ$ である。また、幅厚比 b/h_{00} は5, 10, 100であり、変厚比 h_x^1/h_{00} は1.0から2.5まで変化させている。これより、 x 方向の変厚比 h_x^1/h_{00} が増大すると、 n_1^* に与える b/h_{00} の影響が現れ、その影響は、 b/h_{00} の増大とともに顕著に見られる。

表-5は、 x 方向に変厚を有する周辺固定された直交異方性斜板の振動数パラメータ、 n^* に与える斜角、辺長比、幅厚比と x 方向の変厚比の影響を示している。ここで、斜角 θ は 0° 、 30° 、 60° 、幅厚比 b/h_{00} は5, 10, 100であり、変厚比 h_x^1/h_{00} は1.0から2.0まで変化させている。これより、 b/h_{00} が小さくなると、 n^* に与える h_x^1/h_{00} の影響はさほど見られないが、 θ が増大するとその影響は大きくなる。

表-6は、 x 方向に変厚である直交異方性片持ち斜板の振動数パラメータ、 n^* に与える固定辺の位置、斜角、幅厚比および変厚比の影響を示している。ここで $a/b=1.0$ 、斜角は 30° 、 60° 、幅厚比は5, 10, 100であり、変厚比は1.0, 1.5, 2.0としている。

これより、変厚を有する片持ち直交異方性斜板では、い異方性の大きな方向に垂直な辺が固定されると、 n^* に与える変厚の影響が大きく現れてくる。

表-7には、周辺単純支持された直交異方性斜め変厚板の振動数パラメータ、 n^* に与える辺長比、斜角、幅厚比および変厚比の影響が示されている。ここで、 a/b は1.0, 1.5, 2.0、 θ は 0° 、 30° 、 60° であり、 b/h_{00} は5, 10, 100、 h_x^1/h_{00} は1.0から2.0まで変化させている。

これより、変厚方向の辺長が大きくなると、振動数パラメータ、 n^* に与える変厚比の影響は小さくなり、また斜角が大きいほど、変厚比の影響が小さく現れている。

3.3 2方向に変厚を有する直交異方性 Mindlin 斜板の振動特性

表-8は、2方向(x 方向および y 方向)に変厚を有する周辺固定された直交異方性斜板(シトカスブルース柃目板)の振動数パラメータ、 n^* に与える斜角、幅厚比、変厚比の影響について示している。ここで、 $a/b=1.0$ と仮定している。また、斜角は 30° 、 45° 、 60° 、幅厚比は5, 10, 100であり、 x 方向および y 方向の変厚比は1.0から2.0まで変化させている。

図-3には、変厚を有するシトカスブルース柃目斜板の基本振動数パラメータ、 n_1^* に与える変厚方向の影響が示してある。

表-3 周辺固定された直交異方性斜板の振動数パラメータ、 n^* の精度比較: $b/h_{00}=100$, $h_x^1/h_{00}=h_y^1/h_{00}=1.0$
 $K=0.3205$, $L=0.845$, $\nu_{xy}=0.1206$

a/b	$\theta(^{\circ})$	Reference	modes			
			1st	2nd	3rd	4th
0.5	0	SEM	4.092	4.500	5.490	7.594
		Galerkin ²⁾	4.104		5.504	
	15	SEM	4.178	4.653	5.741	7.971
		Galerkin	4.190		5.766	
	30	SEM	4.531	5.230	6.626	9.245
		Galerkin	4.545		6.707	
1.0	0	SEM	4.811	7.946	11.60	13.76
		Galerkin	4.813			13.74
	15	SEM	4.988	8.361	11.92	13.78
		Galerkin	4.989			13.75
	30	SEM	5.660	9.762	13.26	15.07
		Galerkin	5.659			15.01

SEMは、spline要素法、Galerkinは、Galerkin法である。

表-4 1方向に変厚なメイプル正方形合板の振動数パラメータ、 n^* の精度比較: $h_y^1/h_{00}=1.0$,
 $b/h_{00}=100$, $a/b=1.0$, $\theta=0^\circ$

Boundary conditions	h_x^1/h_{00}	Reference	modes			
			1st	2nd	3rd	4th
CC-SS	1.1	SEM	25.24	36.26	61.68	66.08
		spline関数法 ¹⁰⁾	25.33			66.65
	1.3	SEM	27.53	39.56	67.23	72.02
		spline関数法	27.65			72.73
	1.5	SEM	29.75	42.76	72.54	77.73
		spline関数法	29.90			78.60
CS-SS	1.1	SEM	18.47	31.88	54.13	59.27
		spline関数法	18.52		54.46	
	1.3	SEM	19.88	34.89	58.71	65.00
		spline関数法	19.94		59.10	
	1.5	SEM	21.25	37.82	63.13	70.49
		spline関数法	21.31		63.60	

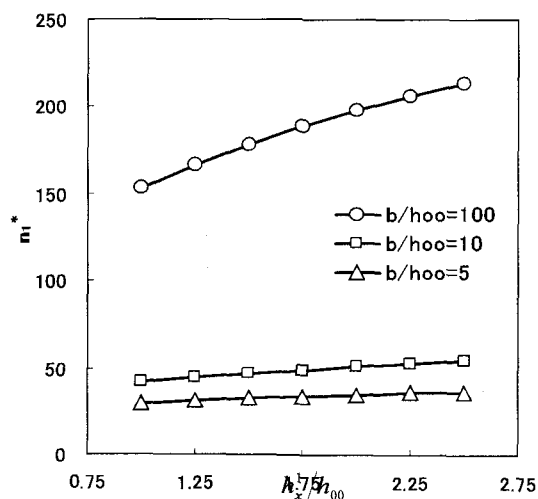


図-2 x 方向に変厚を有する直交異方性斜板の n_1^* に与える変厚比と幅厚比の影響:
 $a/b=1.0$, $\theta=45^\circ$, $h_y^1/h_{00}=1.0$

表-5 1方向に変厚な直交異方性 Mindlin 斜板の n^* に与える辺長比, 斜角, 幅厚比と x 方向変厚比の影響: $h_y^1/h_{00}=1.0$, CC-CC

a/b	$\theta^{(e)}$	b/h_{00}	h_x^1/h_{00}	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	0	100	1.0	80.36	105.3	154.4	193.2	212.2
			1.5	95.61	127.2	188.0	220.6	247.8
			2.0	108.1	146.2	217.9	240.3	275.8
		10	1.0	29.99	46.68	62.16	65.79	75.57
			1.5	34.11	50.53	69.49	72.93	86.10
			2.0	37.88	54.05	72.81	81.88	91.93
		5	1.0	23.13	30.80	39.86	49.07	50.09
			1.5	26.33	33.66	42.30	51.05	56.05
			2.0	28.86	35.84	44.03	52.34	60.22
	30	100	1.0	105.8	139.1	191.2	242.4	255.7
			1.5	125.0	165.8	227.2	280.3	297.7
			2.0	140.5	188.3	256.7	307.9	332.6
		10	1.0	34.85	51.37	70.66	72.11	86.28
			1.5	39.11	55.74	75.64	82.56	96.15
			2.0	42.97	59.56	79.56	91.23	101.0
		5	1.0	25.69	33.69	43.48	53.54	54.86
			1.5	28.85	36.53	45.92	55.78	60.26
			2.0	31.29	38.62	47.57	57.03	64.12
	60	100	1.0	273.0	337.5	400.1	463.3	528.6
			1.5	307.3	379.8	449.0	520.0	592.6
			2.0	331.9	411.1	485.7	563.3	642.0
		10	1.0	58.96	77.65	100.6	119.6	125.4
			1.5	63.83	83.29	108.4	129.4	135.7
			2.0	67.96	87.86	114.3	136.7	143.0
		5	1.0	38.06	47.99	61.86	75.19	77.35
			1.5	40.72	50.55	64.47	78.83	80.33
			2.0	42.52	52.24	66.05	80.84	82.33
2.0	0	100	1.0	74.96	78.51	85.89	98.40	116.9
			1.5	86.18	94.44	103.7	118.8	141.5
			2.0	94.17	107.1	119.1	136.5	163.0
		10	1.0	19.97	25.74	37.05	38.55	44.11
			1.5	20.79	28.63	39.61	43.00	47.14
			2.0	21.59	31.35	40.55	48.30	49.92
		5	1.0	11.77	18.94	21.32	28.26	30.12
			1.5	12.69	21.61	22.22	30.86	31.83
			2.0	13.56	22.99	23.83	32.43	32.95
	30	100	1.0	97.39	101.4	109.7	123.4	143.2
			1.5	111.5	120.7	130.9	147.3	171.2
			2.0	121.6	135.7	148.6	167.4	194.8
		10	1.0	23.17	29.30	40.19	44.79	51.76
			1.5	24.03	32.23	45.43	46.10	55.67
			2.0	24.88	34.97	47.09	49.99	59.44
		5	1.0	13.46	20.60	24.88	29.38	34.25
			1.5	14.42	22.94	26.15	32.28	36.35
			2.0	15.30	24.57	27.48	34.29	37.33
	60	100	1.0	247.1	251.7	261.0	276.6	299.7
			1.5	272.0	283.4	295.2	313.5	340.6
			2.0	288.9	305.2	319.7	340.9	371.7
		10	1.0	40.21	47.95	59.89	72.52	80.15
			1.5	41.29	51.41	65.73	77.70	84.29
			2.0	42.34	54.57	70.66	80.12	89.52
		5	1.0	22.36	30.65	40.28	41.72	50.92
			1.5	23.38	33.14	42.73	43.65	54.71
			2.0	24.23	35.01	43.53	45.98	56.77

表-6 1方向に変厚な直交異方性片持ち Mindlin 斜板の n^* に与える固定辺の位置, 斜角, 幅厚比と x 方向変厚比の影響: $a/b=1.0$, $h_y^1/h_{00}=1.0$

Boundary conditions	$\theta^{(c)}$	b/h_{00}	h_z^1/h_{00}	1st	2nd	3rd	4th	5th
CF-FF	30	100	1.0	4.253	13.36	28.66	37.80	66.41
			1.5	4.253	14.79	33.55	45.85	82.18
			2.0	4.281	16.06	37.98	53.50	96.66
		10	1.0	3.963	11.77	24.49	29.82	43.81
			1.5	3.878	12.63	27.33	33.70	46.11
			2.0	3.827	13.32	29.58	36.58	47.46
		5	1.0	3.743	10.19	20.74	22.29	28.02
			1.5	3.606	10.63	22.07	23.40	28.70
			2.0	3.512	10.96	22.73	23.96	27.96
	60	100	1.0	5.825	22.70	42.12	65.76	81.49
			1.5	6.567	26.63	49.58	81.56	97.57
			2.0	7.293	29.96	56.81	95.61	112.9
		10	1.0	5.120	17.76	30.82	45.27	52.94
			1.5	5.405	19.24	34.74	48.75	60.73
			2.0	5.628	20.40	37.95	51.08	66.51
		5	1.0	4.699	14.37	23.90	32.26	39.45
			1.5	4.785	15.01	25.36	31.27	39.89
			2.0	4.836	15.52	24.18	30.56	38.65
FC-FF	30	100	1.0	4.253	13.36	28.66	37.80	66.41
			1.5	6.426	18.40	37.28	47.87	81.37
			2.0	8.663	23.38	45.60	57.58	95.13
		10	1.0	3.963	11.77	24.49	29.82	43.81
			1.5	5.961	15.66	31.10	35.44	48.25
			2.0	8.007	19.20	36.65	40.45	52.68
		5	1.0	3.743	10.19	20.74	22.29	28.02
			1.5	5.617	12.97	23.78	26.66	32.08
			2.0	7.486	15.25	25.82	30.61	35.37
	60	100	1.0	5.825	22.70	42.12	65.76	81.49
			1.5	7.983	29.20	54.84	80.53	102.6
			2.0	10.23	35.42	67.21	95.32	122.2
		10	1.0	5.120	17.76	30.82	45.27	52.94
			1.5	7.142	22.57	36.77	54.40	61.66
			2.0	9.234	27.11	41.94	61.76	69.47
		5	1.0	4.699	14.37	23.90	32.26	39.45
			1.5	6.626	17.90	27.65	36.44	43.03
			2.0	8.541	20.89	30.70	39.03	44.57
FF-CF	30	100	1.0	9.239	20.73	38.35	57.60	73.12
			1.5	12.36	27.11	48.13	75.77	90.79
			2.0	15.47	33.47	57.60	91.90	107.0
		10	1.0	6.353	12.01	24.40	26.57	38.14
			1.5	7.330	13.29	28.14	28.86	42.38
			2.0	8.053	14.34	29.60	32.21	46.19
		5	1.0	4.290	7.668	15.33	18.40	25.89
			1.5	4.645	8.402	15.77	20.91	26.74
			2.0	4.870	9.086	16.02	22.98	27.04
	60	100	1.0	6.972	27.96	50.42	76.63	83.34
			1.5	8.929	38.02	69.15	101.78	110.1
			2.0	10.95	47.91	87.34	125.78	136.3
		10	1.0	5.611	17.57	29.30	40.62	47.76
			1.5	6.922	20.14	34.87	43.80	55.57
			2.0	8.177	21.89	39.86	45.47	61.69
		5	1.0	4.649	11.44	21.72	24.41	34.44
			1.5	5.546	12.35	24.16	25.52	35.92
			2.0	6.277	12.93	23.19	28.51	33.78

表-7 周辺単純支持された1方向に変厚な直交異方性 Mindlin 斜板の n^* に与える辺長比, 斜角, 幅厚比と x 方向変厚比の影響: $h_y^1/h_{00}=1.0$

a/b	$\theta(^{\circ})$	b/h_{00}	h_x^1/h_{00}	1st	2nd	modes 3rd	4th	5th
1.0	30	100	1.0	57.09	89.67	135.9	180.9	192.4
			1.5	69.81	109.9	165.7	216.3	231.8
			2.0	81.22	128.4	191.7	245.6	265.6
		10	1.0	28.34	46.57	59.96	65.49	78.15
			1.5	31.06	50.32	67.50	70.94	85.24
			2.0	33.45	53.58	74.27	75.16	92.20
	5	10	1.0	19.42	29.93	41.17	44.09	52.53
			1.5	21.68	32.59	43.77	49.11	54.73
			2.0	23.65	34.82	45.67	52.78	56.17
	60	100	1.0	173.1	224.5	284.6	347.0	412.7
			1.5	205.3	268.3	338.4	411.7	488.1
			2.0	231.8	305.3	383.3	465.3	550.0
1.5	30	100	1.0	54.98	74.33	96.46	113.2	120.3
			1.5	58.57	79.15	103.7	120.9	130.2
			2.0	61.10	82.96	109.4	126.6	137.6
		10	1.0	34.20	45.34	59.70	68.04	75.29
			1.5	36.22	47.87	62.67	70.08	78.59
			2.0	37.50	49.60	64.50	70.25	80.40
	60	100	1.0	49.99	62.68	84.69	114.4	149.0
			1.5	60.66	77.05	103.9	139.9	181.2
			2.0	69.68	90.31	121.3	162.5	208.5
2.0	30	100	1.0	22.94	33.28	46.37	48.32	60.15
			1.5	24.45	37.13	48.28	53.87	66.41
			2.0	25.73	40.46	50.18	58.51	70.61
		10	1.0	14.18	23.36	27.57	33.62	38.10
			1.5	15.37	25.49	30.11	36.40	40.50
			2.0	16.50	27.06	32.49	38.03	42.90
	60	100	1.0	141.6	166.3	198.0	233.0	275.3
			1.5	168.7	198.5	236.6	279.5	329.0
			2.0	190.3	225.6	269.2	318.9	374.1
2.0	30	100	1.0	42.43	56.62	72.76	82.62	91.32
			1.5	44.42	61.06	79.05	86.04	99.49
			2.0	46.08	64.64	84.06	88.94	106.2
		10	1.0	24.93	35.77	47.19	47.31	59.76
			1.5	26.33	38.10	49.26	50.64	62.20
			2.0	27.44	39.78	50.63	53.01	63.22
2.0	60	100	1.0	48.03	54.33	65.70	82.33	103.7
			1.5	57.58	66.98	80.81	101.0	127.0
			2.0	65.08	78.56	94.83	118.1	147.9
		10	1.0	21.39	26.65	36.23	44.23	49.13
			1.5	22.47	29.16	40.81	45.42	53.19
			2.0	23.33	31.41	44.76	46.47	56.22

ここで, $ab=1.0$, $\theta=45^{\circ}$, x 方向および y 方向の変厚比は 2.0 としている. また幅厚比は, 10 から 100 まで変化させている. 境界条件は, 周辺固定(CC-CC), 相対する 2 辺がそれぞれ固定と自由(CC-FF, FF-CC)である.

これより, 変厚斜板の基本振動数パラメータ n_1^* は, 変厚方向に大きく依存し, また幅厚比が大きくなるほど,

表-8 2方向に変厚な直交異方性 Mindlin 斜板の n^* に与える斜角, 幅厚比と x 方向および y 方向変厚比の影響: $a/b=1.0$, CC-CC

$\theta(^{\circ})$	b/h_{00}	$h_x^1/h_{00}=h_y^1/h_{00}$	1st	2nd	modes 3rd	4th	5th
30	100	1.25	126.5	167.7	230.0	283.8	301.2
		1.5	145.1	194.4	265.8	317.0	344.6
		1.75	161.6	219.3	299.0	343.7	385.7
		2.0	176.1	242.5	330.0	366.0	424.1
	10	1.25	39.44	56.09	75.96	83.28	96.73
		1.5	44.12	60.76	80.65	93.31	102.1
		1.75	48.68	65.25	84.82	101.9	106.3
	5	1.25	29.08	36.75	46.11	55.94	60.61
		1.5	31.95	39.27	48.10	57.46	65.06
		1.75	34.32	41.24	49.55	58.49	67.66
		2.0	36.24	42.75	50.60	59.19	68.18
45	100	1.25	179.9	233.9	298.2	362.9	397.3
		1.5	202.7	265.1	336.6	409.6	433.7
		1.75	221.9	292.4	370.8	451.3	463.7
		2.0	238.1	316.6	401.8	485.6	493.2
	10	1.25	47.45	64.71	86.32	98.91	110.1
		1.5	52.25	69.66	91.74	108.6	116.5
		1.75	56.82	74.22	96.24	116.5	121.6
	5	1.25	33.07	41.22	51.99	63.65	67.34
		1.5	35.73	43.53	53.86	65.15	71.20
		1.75	37.82	45.26	55.16	66.10	74.07
		2.0	39.45	46.53	56.07	66.73	76.22
60	100	1.25	309.3	382.2	451.9	523.4	597.0
		1.5	337.2	417.7	494.2	573.5	655.4
		1.75	358.8	446.7	530.2	617.2	708.1
		2.0	376.0	471.4	562.1	657.3	755.5
	10	1.25	64.14	83.62	108.8	130.1	136.2
		1.5	68.99	88.89	115.4	138.8	144.5
		1.75	73.34	93.38	120.5	145.7	150.8
	5	1.25	40.90	50.71	64.62	79.04	80.53
		1.5	43.00	52.64	66.41	81.22	82.95
		1.75	44.52	53.99	67.59	82.42	84.91
		2.0	45.61	54.94	68.39	83.14	86.44

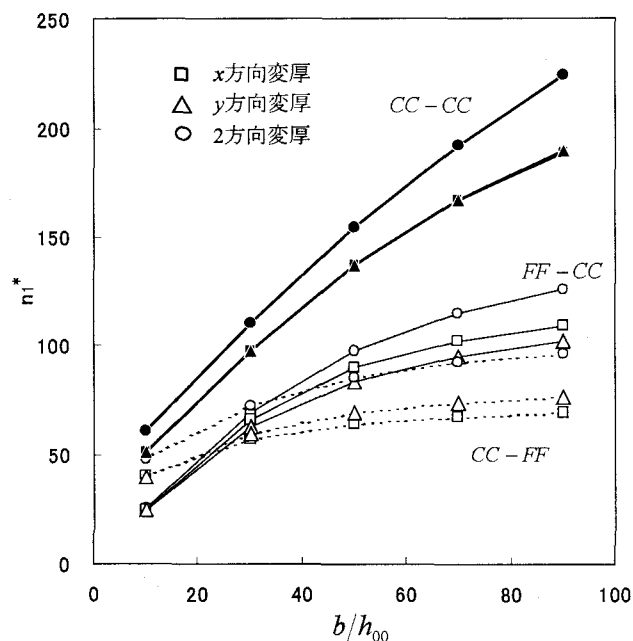


図-3 変厚を有する直交異方性斜板の n_1^* に与える変厚方向の影響: $a/b=1.0$, $\theta=45^{\circ}$

変厚方向による差が顕著に現れてくる。x 方向または y 方向に変厚を有する斜板では、周辺固定板と比較して、自由辺を有する斜板の n_1^* が、幅厚比 b/h_{00} の影響を大きく受ける。

4. あとがき

本文では、Mindlin 板理論に基づく spline 要素法を用いて、1 方向または 2 方向に変厚を有する直交異方性斜板の振動解析を行い、振動数パラメータに与える変厚比、辺長比、幅厚比、斜角や境界条件の影響について検討を行った。

本文で得られた主な結果は、以下ようになる。

- 1) 本手法を用いれば、2 方向に変厚を有する直交異方性斜板の解の安定した収束性と精度が得られる。
- 2) 1 方向に変厚である直交異方性斜板の振動数パラメータ n^* は、板厚を薄くするほど、変厚比の影響を大きく受ける。
- 3) 異方性の強い方向に垂直な辺を固定した片持ち変厚斜板の振動数パラメータは、斜角が小さいほど、変厚比の影響を大きく受ける。
- 4) 変厚斜板の基本振動数パラメータ n_1^* は、変厚方向に大きく依存し、また幅厚比が大きくなるほど、変厚方向による差が顕著に現れてくる。また x 方向または y 方向に変厚を有する斜板では、周辺固定板と比較して、自由辺を有する斜板の n_1^* が、幅厚比 b/h_{00} の影響を大きく受ける。

今後は、変厚を有する直交異方性板の最適設計についても検討して行きたい。

謝辞 本研究は、大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行っている。またプログラム開発と数値計算では、元本学大学院生木村健一君の協力を得ました。ここに、謝意を表します。

Appendix

式(24)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 K\phi_x\phi_x &= (1/a)^2 \left\{ \sec^2 \theta \cos^2 \theta \left[\alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + \nu_{xy} \sin \theta \cos \theta \left(2 \sin \theta \cos \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (a/b) \cos \theta \left(I_{mr}^{013} J_{ns}^{100} + I_{ns}^{103} J_{mr}^{013} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (E_y/E_x) \sin^2 \theta \left[\sin^2 \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{000} + (a/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{113} - (a/b) \sin \theta \left(I_{mr}^{013} J_{ns}^{103} + I_{ns}^{103} J_{mr}^{013} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \left(G_{xy}/E_x \right) \left[4 \sin^2 \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} - 2(a/b) \sin \theta \left(I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} + I_{ns}^{103} J_{mr}^{013} \right) \right] + (a/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{113} \right\} 6) \\
 &\quad + \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 \left\{ S_{xx} \cos^2 \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} + S_{yy} \sin^2 \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} \right\} \\
 K\phi_x\phi_y &= (1/a)^2 \left\{ \sec^2 \theta \left[\nu_{xy} \cos^2 \theta \left\{ -\sin \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + (a/b) I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. + (E_y/E_x) \left\{ \sin^3 \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} - (a/b)^2 \sin \theta \alpha_{mr}^{002} J_{ns}^{113} + (a/b) \sin^2 \theta \left(I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} + I_{ns}^{103} J_{mr}^{013} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \left(G_{xy}/E_x \right) \left\{ -2 \sin \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + (a/b) I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} \right\} - \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 S_{xx} \sin \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} \right\} 7) \\
 KW'\phi_x &= \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 \left\{ S_{xx} (b/a) \cos \theta \alpha_{mr}^{011} J_{ns}^{001} + S_{yy} \tan \theta \left\{ (b/a) \sin \theta \alpha_{mr}^{011} J_{ns}^{001} - I_{mr}^{001} J_{ns}^{011} \right\} \right\} \\
 K\phi_y\phi_x &= (1/a)^2 \left\{ \sec^2 \theta \left[\nu_{xy} \cos^2 \theta \left\{ -\sin \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + (a/b) I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. + (E_y/E_x) \left\{ \sin^3 \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} - (a/b)^2 \sin \theta \alpha_{mr}^{002} J_{ns}^{113} + (a/b) \sin^2 \theta \left(I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} + I_{ns}^{103} J_{mr}^{013} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \left(G_{xy}/E_x \right) \left\{ -2 \sin \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + (a/b) I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} \right\} - \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 S_{xx} \sin \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} \right\} \\
 K\phi_y\phi_y &= (1/a)^2 \left\{ \sec^2 \theta \left[E_y/E_x \right] \left[\sin^2 \theta \alpha_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + (a/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{113} \right] - (a/b) \sin \theta \left(I_{mr}^{103} J_{ns}^{013} + I_{ns}^{103} J_{mr}^{013} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \left(G_{xy}/E_x \right) \left[I_{mr}^{113} J_{ns}^{003} + \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 S_{xx} \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} \right] \right\} \\
 KW'\phi_y &= \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 \left\{ (b/a) \tan \theta \alpha_{mr}^{011} J_{ns}^{001} + \sec \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{011} \right\} \\
 KW'\phi_z &= \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 \left\{ S_{xx} (b/a) \cos \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} + S_{yy} \tan \theta \left\{ (b/a) \sin \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} - I_{mr}^{001} J_{ns}^{011} \right\} \right\} \\
 KW'\phi_z &= \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 \left\{ (b/a) \tan \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{001} + \sec \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{011} \right\} \\
 KW'W' &= \kappa(b/h_{00})^2 (a/b)^2 \left\{ S_{xx} (b/a)^2 \left[I_{mr}^{111} J_{ns}^{001} + S_{yy} \left\{ (b/a)^2 \tan^2 \theta \alpha_{mr}^{111} J_{ns}^{001} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sec^2 \theta \alpha_{mr}^{001} J_{ns}^{111} - (b/a) \tan \theta \sec \theta \left(I_{mr}^{101} J_{ns}^{011} + I_{ns}^{101} J_{mr}^{011} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、 $S_{xx} = G_{xz}/E_x$, $S_{xz} = G_{xz}/E_x$ である。

また、式(25)で示されるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 M\phi_x\phi_x &= (1/12)(h_{00}/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{003} \\
 M\phi_x\phi_y &= -\sin \theta (1/12)(h_{00}/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{003} \\
 M\phi_y\phi_y &= (1/12)(h_{00}/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{003} \\
 M\phi_y\phi_x &= -\sin \theta (1/12)(h_{00}/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{003} \\
 MW'W' &= I_{mr}^{001} J_{ns}^{001}
 \end{aligned}$$

ただし、 I_{mr}^{ijL} と J_{ns}^{ijL} は次式で表され、また数値積分には、Gauss の数値積分公式を用いている。

$$\begin{aligned}
 I_{mr}^{ijL} &= \int_0^1 \left[d^i N_{m,k}(\xi) / d\xi^i \times d^j N_{r,k}(\xi) / d\xi^j \times H_x(\xi)^L \right] d\xi \\
 J_{ns}^{ijL} &= \int_0^1 \left[d^i N_{n,k}(\eta) / d\eta^i \times d^j N_{s,k}(\eta) / d\eta^j \times H_y(\eta)^L \right] d\eta
 \end{aligned}$$

ここで、 i, j は、それぞれ導関数の次数である。また、 L はべき乗数を示す。

参考文献

- 1) 水澤富作：斜板構造の力学的挙動に関する数値解析学的研究。名古屋大学学位論文，1983。
- 2) M. A. Dokainish and Kumar. : Vibrations of orthotropic parallelogrammic plates with variable thickness. AIAA Journal, Vol. 11, pp. 1618-1621, 1973.
- 3) B. Singh, and V. Saxena: Transverse vibration of skew plates with variable thickness. J. Sound and Vibr., 206(1), pp. 1-13, 1997.
- 4) 水澤富作，近藤八重：Spline 要素法を用いた変厚 Mindlin 斜板の振動解析。構造工学論文集，Vol.46A, pp. 25-32, 2000.
- 5) 木村健一，近藤八重，水澤富作：Spline 要素法を用いた直交異方性 Mindlin 斜板の振動解析。土木学会第 57 回年次学術講演会，I-060, pp. 119-120, 2002.
- 6) H. Matsuda and T. Sakiyama: A discrete method of analyzing the bending vibration of skew Mindlin plates with variable thickness. J. Sound and Vibr., 127, pp. 179-186, 1988.
- 7) 近藤八重，水澤富作：Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析。応用力学論文集，Vol. 4, pp. 19-26, 2002.
- 8) R. D. Mindlin: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- 9) 中戸莞二，左道 健：新編木材工学，養賢堂，1985.
- 10) R. Lal, U. S. Gupta and Reena. : Quintic splines in the study of transverse vibrations of non-uniform orthotropic rectangular plates. J. Sound and Vibr., 207(1), pp. 1-13, 1997.

(2003 年 9 月 12 日受付)