

曲げ試験による木材梁のせん断弾性係数推定の精度

Accuracy of estimation of shear modulus by bending test of wood beams

後藤 文彦*・麓 貴行**・薄木 征三***・佐々木 貴信****

GOTOU Humihiko, FUMOTO Takayuki, USUKI Seizo, SASAKI Takanobu

*博(工) 秋田大学工学資源学部 助手 (〒010-8502 秋田県秋田市手形学園町 1-1)

**秋田大学大学院鉱山学研究科

***工博 秋田大学工学資源学部 教授

****博(工) 秋田県立大学 木材高度加工研究所 講師 (〒016-0876 能代市字海詠坂 11-1)

Shear coefficient k derived for isotropic materials is often used for estimation of shear modulus by bending tests of wood beams. However, since woods are orthogonally anisotropic (orthotropic) materials, the use of k derived for isotropic materials is not always appropriate to treat the orthogonally anisotropic materials. In this study we simulate bending tests of steel and wood beams by FEM using rectangular solid elements for orthogonally anisotropic materials and investigate influences of orthogonal anisotropy for shearing deformation.

Key Words : rectangular solid element, Timoshenko's beam, shear modulus

キーワード：立体要素、ティモシェンコ梁、せん断弾性係数

1. はじめに

アメリカ材料試験協会の基準 (ASTM D198¹⁾) では、木材梁の曲げ試験で得られる梁長と曲げヤング率の関係から、せん断補正係数 k を用いて木材のせん断弾性係数を推定する方法を提案しており、ねじり試験よりも簡単に行えるこの方法は、せん断弾性係数の推定に多く用いられている²⁾。ASTM D198¹⁾ が k として与えているのは、Cowper³⁾ が3次元弾性論から等方性材料の矩形梁に対して導いたもので、ポアソン比のみで決まる値である。Cowper の文献では、振動モードなどから k を求めているいくつかの文献も紹介されているが、 k の導出方法や値には他にもいくつかの提案がある。例えば、Timoshenko⁴⁾ は、 k として、最大せん断応力と平均せん断応力の比を用いており、西野と長谷川⁵⁾ は、せん断流の分布を考慮してせん断応力による補正係数から k を導いている。

いずれにせよ、木材や集成材は等方性材料ではなく、むしろ直交異方性材料と見なせる材料なので、等方性材料に対して求められた k を用いてせん断弾性係数を推定することは、必ずしも厳密とは言えない。もちろん、木材など、ばらつきを許容する材料においては、等方性材料に対する k を用いても十分に実用の範囲に収まるのかも知れないが、異方性の影響を定量的に確認しておくことは重要である。とはいえ、Cowper の方法を直交異方性材料に拡張して k を求めることは困難であるので、本研究では、立体要素の有限要素法で等方性材料と直交異方性材料それぞれの梁の曲げ問題を解き、荷重とたわみの関係から逆算される k の値が、等方性材料の矩形梁に

対する Cowper 他 の k の値とどのような対応関係にあるのかを調べてみる。また、梁の曲げ試験を数値シミュレーションし、曲げ試験からせん断弾性係数を推定する方法の精度を考察する。

2. 等方性梁の曲げ

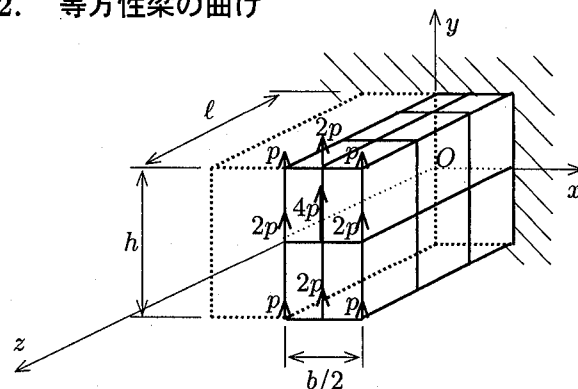


図-1 解析モデル

2.1 直方体要素の精度

まず、等方性材料の片持ち梁の曲げ問題を Melosh⁶⁾ の直方体要素の剛性方程式で解析し、収束精度を確認する。木材などの梁の曲げ試験は単純支持条件で行われることが多いが、ここでは立体要素の要素数の節約のため、対称条件から単純梁の半分とみなせる片持ち梁の曲げを解析する。尚、Melosh の剛性行列は、付録のように修正して用いる。解析に用いる梁の材料定数は、ヤング率 $E = 200 \text{ GPa}$ 、せん断弾性係数 $G = 75 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = \frac{1}{3}$ とする。梁の断面形状は、幅 $b \times$ 桁高 h の矩形断面、梁長は l とする。図-1 に示すように、片持

表-1 たわみの収束性 (2cm × 2cm × 5cm)

分割数 $n_x, n_y, \frac{n_z}{10}$	たわみ v ($\times 10^{-2}$ mm)		
	$n_x \times 10 \times 100$	$6 \times n_y \times 100$	$6 \times 10 \times n_z$
1	3.5661	3.1692	3.4728
2	3.5869	3.4203	3.5515
3	3.5913	3.4982	3.5716
4	3.5929	3.5357	3.5807
5	3.5936	3.5555	3.5857
6	3.5941	3.5692	3.5888
7		3.5778	3.5909
8		3.5848	3.5923
9		3.5898	3.5933
10		3.5941	3.5941

表-2 たわみの収束性 (2cm × 2cm × 20cm)

分割数 $n_x, n_y, \frac{n_z}{10}$	たわみ v (mm)		
	$n_x \times 10 \times 100$	$6 \times n_y \times 100$	$6 \times 10 \times n_z$
1	1.9873	1.7831	1.4619
2	2.0006	1.9326	1.8389
3	2.0033	1.9723	1.9313
4	2.0043	1.9878	1.9660
5	2.0048	1.9949	1.9825
6	2.0051	1.9991	1.9916
7		2.0015	1.9971
8		2.0032	2.0008
9		2.0042	2.0033
10		2.0051	2.0051

表-3 たわみの収束性 (2cm × 20cm × 50cm)

分割数 $n_x, n_y, \frac{n_z}{10}$	たわみ v ($\times 10^{-2}$ mm)		
	$n_x \times 10 \times 100$	$6 \times n_y \times 100$	$6 \times 10 \times n_z$
1	3.5987	3.1811	3.4806
2	3.5990	3.4270	3.5584
3	3.5991	3.5049	3.5778
4	3.5991	3.5419	3.5864
5	3.5991	3.5611	3.5912
6	3.5991	3.5744	3.5942
7		3.5830	3.5961
8		3.5899	3.5975
9		3.5948	3.5984
10		3.5991	3.5991

ち梁の固定端側の断面の図心を原点とし、梁軸方向に z 軸、幅厚方向に x 軸、桁高方向に y 軸をとる。曲げを受ける片持ち梁の対称性を考慮し、図-1のように、 yz 面で二分割された梁の半分を解析対称とする。この幅 $b/2$ の梁の x, y, z 軸方向をそれぞれ、 n_x, n_y, n_z 個に要素分割する。境界条件は、固定端断面 (xy 面) 上にある節点の z 方向変位を拘束、固定端 x 軸上にある節点の y 方向変位を拘束、対称面 (yz 面) 上にある節点の x 方向変位を拘束する。載荷は、自由端面の図心載荷や中立

表-4 たわみの収束性 (2cm × 20cm × 200cm)

分割数 $n_x, n_y, \frac{n_z}{10}$	たわみ v (mm)		
	$n_x \times 10 \times 100$	$6 \times n_y \times 100$	$6 \times 10 \times n_z$
1	2.0063	1.7858	1.4635
2	2.0065	1.9347	1.8408
3	2.0065	1.9744	1.9331
4	2.0065	1.9897	1.9677
5	2.0065	1.9966	1.9841
6	2.0065	2.0007	1.9932
7		2.0030	1.9987
8		2.0047	2.0023
9		2.0057	2.0047
10		2.0065	2.0065

軸線上の載荷にした場合、応力が集中する載荷箇所付近の要素分割を細かくしないと精度が悪くなるので、ここでは 図-1 のような様な要素分割に対する収束性を確認するためもあり、荷重を自由端面の各節点に等分布に分散させて載荷する。具体的には載荷荷重を P とすると、隣接要素のない節点には $p = \frac{P}{4n_x n_y}$ を、隣接要素が二つある節点には $2p$ を、隣接要素が四つある節点には $4p$ を、それぞれ y 方向に載荷する。 $b \times h \times l$ が、それぞれ 2cm × 2cm × 5cm, 2cm × 2cm × 20cm, 2cm × 20cm × 50cm, 2cm × 20cm × 200cm の 4 種類の梁について、 $P = 1000\text{N}$ を載荷し、 $n_y = 10, n_z = 100$ で n_x を 1 ~ 6 分割まで変化させた場合、 $n_x = 6, n_z = 100$ で n_y を 1 ~ 10 分割まで変化させた場合、 $n_x = 6, n_y = 10$ で n_z を 10 ~ 100 分割まで 10 ずつ変化させた場合の載荷端図心節点の y 方向変位を、表-1 ~ 表-4 に示す。いずれの梁においても、 $n_x = 6, n_y = 10, n_z = 100$ では、有効数字 3 桁の精度で収束している。桁高が梁幅に対して十分に大きい $b \times h = 2\text{cm} \times 20\text{cm}$ の梁では、 $n_x = 1$ でも有効数字 3 桁の精度で収束している。以下のすべての解析では、 $n_x = 6, n_y = 10, n_z = 100$ の要素分割を用いる。

2.2 せん断補正係数 k

前節の片持ち梁の先端のたわみ v は、ティモシェンコ梁理論では、次式のように表される^{5), 1)}。

$$v = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell}{GkA} \quad (1)$$

ここに I は強軸回りの断面二次モーメント、 A は断面積、 k はせん断補正係数である。必ずしも式 (1) に対して導かれている訳ではないが、せん断補正係数 k として、矩形断面の場合、Timoshenko⁴⁾ は最大せん断応力と平均せん断応力の比から $2/3$ を、西野と長谷川⁵⁾ はせん断流の分布を考慮してせん断応力による補仮想仕事から $5/6$ を、Cowper³⁾ は 3 次元弾性論から、次式を与えている。

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (2)$$

尚、この Cowper の式で、 $\nu = 0$ とおくと、 $k_{(\nu=0)} = 5/6 (= 0.8333)$ が得られる。

さて、前節の片持ち梁のたわみの有限要素解を、せん断変形の影響の無視した梁理論（式(1)の第2項を無視）と、せん断変形を考慮した ティモシェンコ梁理論（式(1)の第2項を式(2)で考慮）のそれぞれに対する相対誤差で図-2 に示す。梁長-桁高比 (ℓ/h) と相対誤差との関係は、桁高の大きい $2\text{cm} \times 20\text{cm}$ の断面の梁も、 $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ の正方形断面の梁もほぼ同じで、 ℓ/h が小さくせん断変形の大きい領域では、梁理論に対する有限要素解の相対誤差は非常に大きいが、 ℓ/h が大きくせん断変形の小さい領域では、梁理論に対する有限要素解の相対誤差は小さくなっていく。一方、ティモシェンコ梁理論に対する有限要素解の相対誤差は、 ℓ/h が小さい領域ではやや大きいものの、 ℓ/h が 4 以上では、 $\pm 1\%$ 以内に留まる。

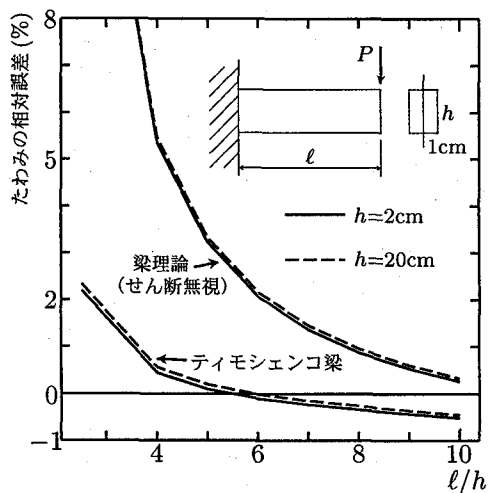


図-2 各梁理論に対するたわみの相対誤差

ところで、式(1)を k について解くと次式が得られるが、

$$k = \frac{P}{GA} \cdot \frac{\ell}{v - \frac{P\ell^3}{3EI}} \quad (3)$$

有限要素解析で得られる荷重 P とたわみ v の関係を上式に代入して逆算した k を図-3 に示す。 ℓ/h が 7 以下の領域では、この逆算した k は、式(2)の k に対してせいぜい $\pm 20\%$ 程度の相対誤差の範囲内にはあるが、 ℓ/h の増加とともに、指数関数的に大きくなっていく。このように荷重とたわみから逆算される k に関しては、 ℓ/h が大きくなるほど Cowper の k とはかけ離れていくけれども、Cowper の k で求めた ティモシェンコ梁理論のたわみに対する有限要素解の相対誤差は、図-2 を見る限り ℓ/h が大きくなっても、そうは増えない ($\pm 1\%$ 以内の相対誤差に収束しそうである)。これは、 ℓ/h が大きくなるにつれて、式(1)の第2項が第1項に比べてどんどん小さくなっていくために、Cowper の k で求め

た第2項が、荷重とたわみから逆算される値からはかけ離れていく影響が相殺されているためだと考えられる。

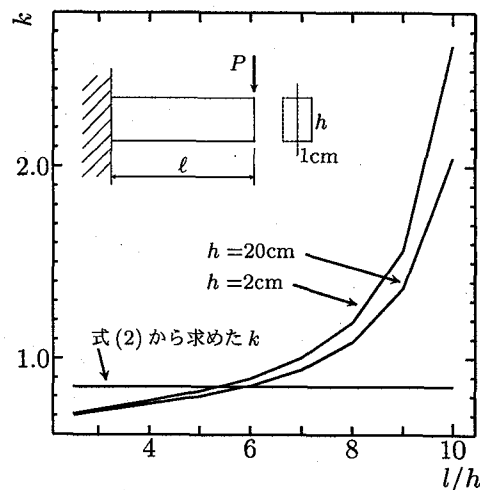


図-3 荷重-たわみ関係から逆算した k

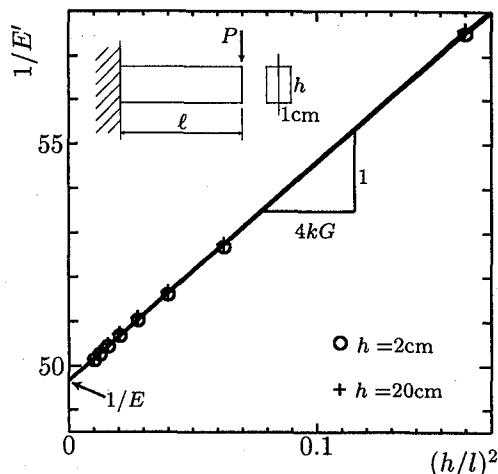


図-4 せん断弾性係数算定プロット

さて、このような有限要素モデルの荷重-たわみ挙動から、木材の曲げ試験^{1),2)}と同じやり方で、ヤング率とせん断弾性係数を推定できるかどうか調べてみる。式(1)の第2項を無視して荷重とたわみの関係から求める（せん断変形の影響が分離されていない）見かけ上のヤング率（曲げヤング率）を $E' = \frac{P\ell^3}{3Iv}$ とおくと、式(1)は矩形梁では次式のように変形できるので、

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{4kG} \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \quad (4)$$

曲げ試験から得られる $\frac{1}{E'}$ と $(h/\ell)^2$ の関係をプロットすれば、回帰直線の切片と傾きとから試験体のヤング率とせん断弾性係数が推定できる^{1),2)}。有限要素解から得られる $\frac{1}{E'}$ と $(h/\ell)^2$ の関係を図-4 に示すが、 $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ の断面も、 $2\text{cm} \times 20\text{cm}$ の断面もほぼ同様の線形分布が得られた。この回帰直線の切片と傾きとから $k_{(\nu=0)}$

= 0.8333 を用いて推定される解析モデルのヤング率とせん断弾性係数は、それぞれ 201 GPa (+0.69%), 60.8 GPa (-18%) となった (但し、括弧内は解析モデルの $E = 200$ GPa, $G = 75$ GPa に対する相対誤差)。ヤング率に関しては 1% 以内の精度で推定できているが、図-3 の k のばらつきからも予測されるように、せん断弾性係数は 20% 近く低い値が推定されている。

3. 直交異方性梁の曲げ

この章では、前章と同様の手法で、直交異方性梁の曲げを有限要素解析するが、はじめに、材料定数を表す記号を説明しておく。 x, y, z 方向の垂直ひずみ成分と、 xy 面、 xz 面、 yz 面のせん断ひずみ成分をそれぞれ、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 、それに対応する応力成分をそれぞれ、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 、とくと、直交異方性材料のひずみ-応力関係は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに、 E_x, E_y, E_z は、それぞれ x, y, z 方向の圧縮・引張に対するヤング率、 G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} は、それぞれ xy 面、 xz 面、 yz 面のせん断変形に対するせん断弾性係数、 ν_{xx}, ν_{yy} は、 x 方向の単軸圧縮・引張に対し、それぞれ $-\frac{E_x \varepsilon_x}{E_x \varepsilon_x}$ 、 $-\frac{E_y \varepsilon_y}{E_x \varepsilon_x}$ で定義されるポアソン比、 ν_{xy}, ν_{zy} は、 y 方向の単軸圧縮・引張に対し、それぞれ $-\frac{E_x \varepsilon_x}{E_y \varepsilon_y}$ 、 $-\frac{E_z \varepsilon_z}{E_y \varepsilon_y}$ で定義されるポアソン比、 ν_{xz}, ν_{yz} は、 z 方向の単軸圧縮・引張に対し、それぞれ $-\frac{E_x \varepsilon_x}{E_z \varepsilon_z}$ 、 $-\frac{E_y \varepsilon_y}{E_z \varepsilon_z}$ で定義されるポアソン比である。

さて、具体的な直交異方性梁を解析する前に、直交異方性梁では、各材料定数が片持ち梁のたわみにどれくらい影響を及ぼすかを調べてみる。前章の等方性材料の材料定数が与えられた片持ち梁に対して、特定の材料定数のみを変化させ、等方の場合に対するたわみの相対誤差を示したのが表-5、表-6である。表-5が $2\text{cm} \times 10\text{cm} \times 25\text{cm}$ の梁、表-6が $2\text{cm} \times 10\text{cm} \times 100\text{cm}$ の梁で、それぞれ、荷重-たわみ関係から逆算した k の値についても、等方の場合に対する相対誤差を示す。例えば、表中に $E_x \rightarrow 2E_x$ とある場合、式(5)の E_x を $2E_x$ に置き換えた後、行列の対称性を満たすように ν_{yx} と ν_{zx} も変更している。表-5、表-6を見ると、特定の材料定数によって異方性が卓越しても、梁のたわみに大きい影響を及ぼすのは、梁軸方向の圧縮・引張に対するヤング率 E_x ぐらいで、梁長の短い梁では、曲げ面内のせん断変形に対するせん断弾性係数 G_{yz} もある程度の影響を及ぼすが、それ以外の材料定数による異方性の卓越は、曲げによるたわみには殆ど影響しないことが分かる。荷

表-5 異方性の影響 ($2\text{cm} \times 10\text{cm} \times 25\text{cm}$)

材料定数	たわみの誤差 (%)	k の誤差 (%)
$E_x \rightarrow 2E_x$	0.10	-
$E_y \rightarrow 2E_y$	-0.73	5.91
$E_z \rightarrow 2E_z$	-43.62	1.55
$G_{xy} \rightarrow 2G_{xy}$	0.00	0.03
$G_{xz} \rightarrow 2G_{xz}$	0.00	0.01
$G_{yz} \rightarrow 2G_{yz}$	-5.93	-
$\nu_{xy} \rightarrow 0$	0.15	-
$\nu_{xz} \rightarrow 0$	0.08	-
$\nu_{yz} \rightarrow 0$	-0.50	3.92
$E_x \rightarrow 0.5E_x$	-0.35	2.75
$E_y \rightarrow 0.5E_y$	0.65	-
$E_z \rightarrow 0.5E_z$	86.44	3.06
$G_{xy} \rightarrow 0.5G_{xy}$	0.00	-
$G_{xz} \rightarrow 0.5G_{xz}$	0.00	-
$G_{yz} \rightarrow 0.5G_{yz}$	11.49	6.80
$\nu_{xy} \rightarrow 0.5$	-0.21	1.64
$\nu_{xz} \rightarrow 0.5$	-0.10	0.80
$\nu_{yz} \rightarrow 0.5$	-0.11	0.81

表-6 異方性の影響 ($2\text{cm} \times 10\text{cm} \times 100\text{cm}$)

材料定数	たわみの誤差 (%)	k の誤差 (%)
$E_x \rightarrow 2E_x$	0.03	-
$E_y \rightarrow 2E_y$	0.06	-
$E_z \rightarrow 2E_z$	-49.45	-
$G_{xy} \rightarrow 2G_{xy}$	0.00	0.44
$G_{xz} \rightarrow 2G_{xz}$	0.00	0.03
$G_{yz} \rightarrow 2G_{yz}$	-0.77	-
$\nu_{xy} \rightarrow 0$	0.04	-
$\nu_{xz} \rightarrow 0$	0.03	-
$\nu_{yz} \rightarrow 0$	0.11	-
$E_x \rightarrow 0.5E_x$	-0.12	62.09
$E_y \rightarrow 0.5E_y$	-0.41	-
$E_z \rightarrow 0.5E_z$	97.66	-
$G_{xy} \rightarrow 0.5G_{xy}$	0.00	-
$G_{xz} \rightarrow 0.5G_{xz}$	0.00	-
$G_{yz} \rightarrow 0.5G_{yz}$	0.98	-
$\nu_{xy} \rightarrow 0.5$	-0.07	26.19
$\nu_{xz} \rightarrow 0.5$	-0.03	12.11
$\nu_{yz} \rightarrow 0.5$	-0.33	-

重とたわみから逆算される k の値は、式(3)を見れば分かるように、たわみ v が (せん断変形の影響を分離しない) 見かけ上のたわみ $\frac{P\ell^3}{3E_z I}$ に近づくほど、値が大きくなる。 v が $\frac{P\ell^3}{3E_z I}$ よりも小さくなると、 k は負値を取り、相対誤差の大小の意味が変わってくるので、 k が負値になるものについては、- と記した。梁長が長くせん断変形の小さい梁の方が、 k の相対誤差は大きくなるようだ。梁のたわみに関しては、曲げ変形に関する E_z と G_{yz} 以外の材料定数によって卓越させた異方性の影響は殆どないが、荷重とたわみから逆算される k に関しては、他の様々な材料定数によって卓越させた異方性の影響も受けているようだ。ところで、Cowper³⁾ が k の導出に用いた調和関数は、 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$ と $G =$

$\frac{E}{2(1+\nu)}$ の条件を用いて、材料定数のパラメータをポアソン比 ν だけにしているが^{7),8)}、これらの条件は直交異方性材料に対しては成り立たないので、式(2)の ν を単純に、 ν_{yz} や ν_{zy} に置き換えても直交異方性梁に対する k は求まらない。表-5、表-6から、直交異方性梁であっても、梁軸方向の圧縮・引張ヤング率 E_z と曲げ面内のせん断弾性係数 G_{yz} のほぼ二つの材料定数だけが、面内曲げによるたわみに関係していることより、ここでは、試みに、式(2)を $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ を用いて書き換え、 yz 面内の曲げに対して、次式で与えられるせん断補正係数 k_{EG} を参考値として定義する。

$$k_{EG} = \frac{10E_z}{11E_z + 2G_{yz}} \quad (6)$$

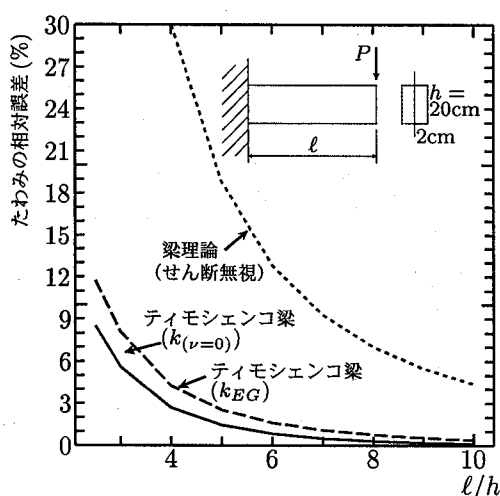


図-5 各梁理論に対するたわみの相対誤差

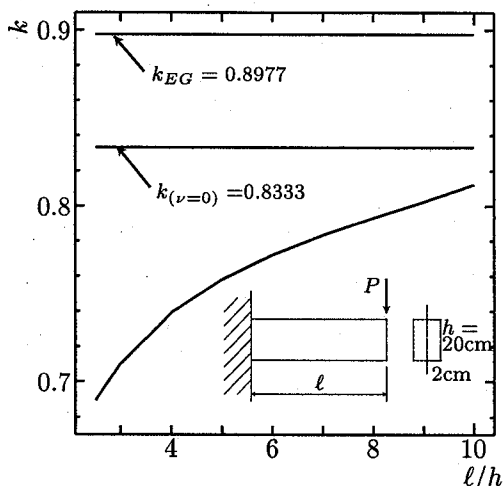


図-6 荷重-たわみ関係から逆算した k

ここで、木材工業ハンドブック⁹⁾にある木材(シトカスプルス)の材料定数を参考にして、式(5)の行列の対称性を満たすように、 $E_x = 0.5 \text{ GPa}$, $E_y = 1.0 \text{ GPa}$,

$E_z = 10.0 \text{ GPa}$, $G_{xy} = 0.03 \text{ GPa}$, $G_{xz} = 0.6 \text{ GPa}$, $G_{yz} = 0.7 \text{ GPa}$, $\nu_{xy} = 0.2$, $\nu_{yx} = 0.4$, $\nu_{xz} = 0.025$, $\nu_{zx} = 0.5$, $\nu_{yz} = 0.03$, $\nu_{zy} = 0.3$ で与えられる材料定数を有す直交異方性梁の曲げを前章と同様の方法で解析してみる。前章と同様に、たわみの有限要素解を、梁理論、ティモシェンコ梁理論のそれぞれに対する相対誤差で図-5に示す。但し、ティモシェンコ梁理論の k の値は、式(2)で $\nu = 0$ とした $k_{(\nu=0)} = 0.8333$ を用いた場合と、式(6)から求めた $k_{EG} = 0.8977$ を用いた場合の2ケースを併記する。 l/h が大きくなるにつれて、有限要素解は k_{EG} よりも $k_{(\nu=0)}$ を用いたティモシェンコ梁理論の解に収束しているように見える。但しこの材料は、 E_z に対して G_{yz} が非常に小さくせん断変形の影響がかなり大きい梁であり、 $l/h = 10$ でも梁理論に対する有限要素解の相対誤差は(図-5のスケールでは十分に収束しているように見えるものの)、それでもまだ5%程度はある。図-2の等方材料の場合から類推するなら、更に l/h を大きくしていけば、有限要素解はティモシェンコ梁理論の解よりもやや小さい値に収束するのかも知れない。

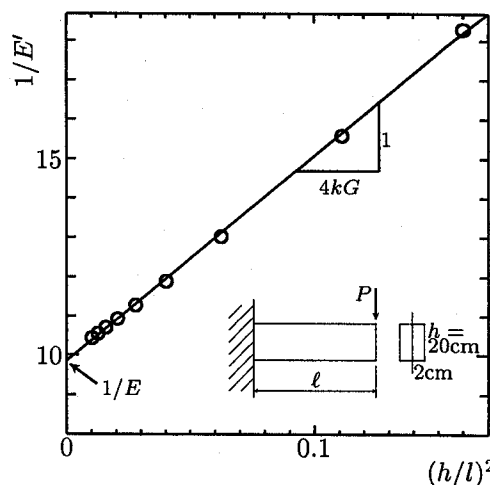


図-7 せん断弾性係数算定プロット

荷重とたわみから逆算した k を、前章と同様に図-6に示す。図-3の等方の場合、 l/h が大きくなるにつれて k の値は、どんどん大きくなり、Cowper の k の値からかけ離れていったが、この梁は、せん断変形の影響が大きい梁であるためか、この l/h の範囲では、 l/h が大きくなるにつれて、 $k_{(\nu=0)} = 0.833$ に近づいていく。

最後に、有限要素解から得られる $\frac{1}{E'}$ と $(h/l)^2$ の関係を、前章と同様に図-7に示す。ほぼ線形分布が得られ、この回帰直線の切片と傾きとから $k_{(\nu=0)} = 0.8333$ を用いて推定される解析モデルのヤング率とせん断弾性係数は、それぞれ 10.2 GPa (+1.5%), 0.575 GPa (-18%) となった(但し、括弧内は解析モデルの $E_z = 10.0 \text{ GPa}$, $G_{yz} = 0.70 \text{ GPa}$ に対する相対誤差)。材

料定数やせん断変形の影響の大きさはかなり異なるものの、等方の場合と同じような精度で推定値が得られた。やはり、せん断弾性係数は解析モデルよりも 20% 近く低い値が推定されている。図-7を見ると $(h/l)^2$ の小さい領域のプロットのみで線形回帰をすれば、傾きがいくぶん小さくなりそうに見える。曲げ試験のシミュレーションとして $k = 0.8333$ の値を一律に使うことで、恐らく $(h/l)^2$ の大きい領域のプロットが回帰直線の傾きをつり上げていることが、せん断弾性係数がやや低めに推定されることの一因かも知れない。

4. まとめ

直方体要素の有限要素法で、等方性材料、直交異方性材料の片持ち梁の曲げを解析した。

等方性材料であれ、異方性材料であれ、有限要素解と梁理論またはティモシェンコ梁理論との誤差の大小は、曲げ面内のせん断変形の大きさに強く依存している。例えば、せん断弾性係数がヤング率に比べてそれほど小さくはない通常の等方性材料の梁では、梁長が桁高の 10 倍程度になると、せん断変形の影響が小さくなり、梁理論とティモシェンコ梁理論との差は小さくなるが、曲げ面内のせん断弾性係数が梁軸方向の圧縮・引張ヤング率に比べて 1/10 以下も小さい木材のような梁では、梁長が桁高の 10 倍程度であっても、梁理論とティモシェンコ梁理論との間には無視できない差がある。

有限要素解の荷重-たわみ関係から逆算されるせん断補正係数 k の値は、等方性材料であっても、梁長に依存して変化する。但し、この k の値は、曲げ面内のせん断変形が大きい木材のような材料の方が、梁長の変化に対するばらつきは小さい。

木材の曲げ試験からせん断弾性係数を推定するのと同じ方法で、有限要素解の荷重-たわみ関係から解析モデルのヤング率とせん断弾性係数を推定した。等方性梁でも、木材をモデルにした直交異方性梁でも、ヤング率に関しては、解析モデルに対して 1% 程度の誤差の推定値が得られたが、せん断弾性係数に関しては、解析モデルよりも 20% 近く小さい推定値が得られた。曲げ試験から材料定数を推定するような測定手法の精度に関して、今回の有限要素解析からは、等方性材料と直交異方性材料には特に大きな差がないことが示されたが、せん断弾性係数の推定の精度はあまりよくない可能性も示唆された。

但し、今回用いた直方体要素に関しては、有効数字 3 桁の収束精度に達する要素分割数を用いて解析している

に過ぎず、この立体要素がせん断変形の影響の大きい梁を正確に解いているかどうかの保証はない。今後の課題として、ポアソン比を容易に測定できるアクリルなどの等方性材料で作った梁の曲げ試験データを用いて、直方体要素などの立体要素を用いた曲げ解析の精度を確認するとともに、両端固定など拘束の強い条件でのせん断変形の影響についても調べていきたい。

付録 I 剛性行列の修正箇所

Melosh⁶⁾ の直方体要素の剛性行列のうち、誤植と思われる箇所について以下のように修正した。p.209: K_{11} 1行 1列の $4d_{11} + 4d_{44} + 4d_{55}$ を $4d_{11} + 4d'_{44} + 4d_{55}$ に、p.209: K_{11} 6行 5列の $2d_{11} + 4d'_{44} + 2d'_{55}$ を $2d_{11} + 4d'_{44} + 2d_{55}$ に、p.209: K_{11} 8行 5列の $2d_{11} + 2d'_{44} - 4d'_{55}$ を $2d_{11} + 2d'_{44} - 4d_{55}$ に、p.209: K_{22} 3行 1列の $-2d_{22} + 4d_{44} - 2d_{66}$ を $-2d_{22} + d_{44} - 2d_{66}$ に、p.210: K_{33} 5行 4列の $-2d_{33} - 2d'_{55} - d'_{66}$ を $-2d_{33} - 2d'_{55} + d'_{66}$ に、p.211: K_{31} の右辺の第一項の行列の 1 列目の $[2 \ 1 \ -1 \ -2 \ 2 \ 1 \ -1 \ 2]^T$ と 4 列目の $[2 \ 1 \ -1 \ -2 \ 2 \ 1 \ -1 \ -1]^T$ を、共に $[2 \ 1 \ -1 \ -2 \ 2 \ 1 \ -1 \ -2]^T$ に、それぞれ修正した。

参考文献

- 1) American Society for Testing and Materials: Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes, ASTM Standards, D198-94, 1994.
- 2) 長谷部薫・薄木征三: 集成木材はりの横座屈解析と実験, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 963-970, 1992.
- 3) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 335-340, 1966.
- 4) チモシェンコ, S. P. (鵜戸口英善・国尾武 共訳): 材料力学 上巻, 東京図書, 1957.
- 5) 西野文雄・長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技報堂, 1983.
- 6) Melesh(恐らく 'Melosh' の誤記), R. J.: Structural analysis of solids, *J. Structural Div., Proc. ASCE*, Vol. 89, No. ST4, pp. 205-223, 1963.
- 7) Love, A. E. H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition, Dover Publications, New York, 1944, Chapter XV, pp. 331-332.
- 8) 倉正正嗣: 弾性学, 国際理工研究社, 1970, 2.2.2. pp. 167-170.
- 9) 農林水産省林業試験場 監修: 木材工業ハンドブック (改訂3版), 丸善, 1982, pp.130.

(2002年9月13日受付)