

重心の偏心量が合成2主桁橋の固有振動数に与える影響に関する研究

Effect of the eccentricity of gravity center on natural frequencies of composite twin I-girder bridges

林川俊郎*, 渡邊大輔**, 松井義孝***

Toshiro HAYASHIKAWA, Daisuke WATANABE and Yoshitaka MATSUI

- * 工博 北海道大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
 ** 工学士 北海道大学大学院修士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
 *** 工博 ㈱開発工営社 (〒060-0004 札幌市中央区北4条西5丁目1番地 アスティ45ビル13階)

Recently, composite two-main girder bridges have been increasingly constructed. Composite two-main girder bridges are remarkable for an economical and durable structure, so that it is required to investigate the dynamic response. For evaluation of the dynamic response of the structures, it is important to obtain natural frequencies and mode shapes from the lower terms to the higher terms accurately. In general, non-coinciding centers of geometry and gravity are not considered on such bridges. In this study, we discuss effect of the eccentricity of the center of gravity on natural frequencies of composite two-main girder bridges and a modal coupling ratio is proposed to understand such complex vibration.

Key Words: center of gravity, composite two-main girder bridges, modal coupling ratio

キーワード: 重心, 合成2主桁橋, モード連成比

1. はじめに

建設コスト削減に対する取り組みとして、PC床版2主桁橋の建設事例が増加している¹⁻³⁾。PC床版を有する合成2主桁橋は構造の簡略化を図り、耐久性および経済性の向上を目指した橋梁形式として注目されており、その動的応答特性を調べることは重要となっている。構造物の動的応答はその構造物に作用する走行車両、風、地震などの動的外力の性質と構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく依存している。つまり、構造物の動的応答特性を正確に把握するためには、固有振動数および固有振動モードを低次から高次にわたり、精度良く計算することが重要であると考えられる。また、このような少数主桁橋は多主桁橋に比べてねじり剛性が低いという問題点を有しており、その振動特性を評価するとともに、適切な補剛方法についても検討する必要がある⁴⁾。

一般に立体骨組構造物の固有振動解析において構造物のモデル化を行う際には、部材要素を2軸対称断面に仮定していることが多い。2軸対称断面要素では、断面の図心とせん断中心が一致しているため、曲げ振動と縦振動およびねじり振動はそれぞれ独立して発生する。しかし、橋梁構造物を構成する部材には、 π 型断面などの非

対称性を有する薄肉断面要素が用いられることが多く、そのような断面内では図心とせん断中心は一致しない。そのため、2軸非対称断面においては直交二方向の主軸回りの曲げ振動とねじり振動とが独立して発生せず、それらが連成する複雑な三重連成振動問題となる⁵⁾。

合成構造を有する構造物の動的解析においては、合成断面を鋼断面に換算し、薄肉開断面部材を有する桁として簡便に解析する場合が多い。また、薄肉断面を有する桁の固有振動解析に関する研究は、従来より数多くなされている。図心とせん断中心が一致しない薄肉直線桁の剛性マトリックスをGalerkin法を用いて導き、初期応力マトリックスと質量マトリックスを求めた論文としてはKrajcinovicの研究⁶⁾がある。結城・前田⁷⁾は直線部材要素の変位関数を多項式で仮定する有限要素法により、静的な剛性マトリックスと集中質量マトリックスを誘導している。薄肉開き直線桁についてWekezer⁸⁾は静的な剛性マトリックスと整合質量マトリックスを導いている。Friberg⁹⁾は薄肉開き断面の振動問題に関して、図心とせん断中心が異なるチャンネル材やT形断面はりの固有振動解析を実施し、連成振動解析において高次モードで十分な精度の解を得るためには、ある程度の要素分割数が必要であることを指摘している。また、著者ら¹⁰⁻¹²⁾は薄肉変断面桁の固有振動解析を行うにあたり、一般化され

た剛性マトリックスおよび質量マトリックスを導いている。さらに、平面および立体骨組構造物の固有値を計算し、整合質量法、集中質量法、連続質量法の解の精度について検討している。

構造物の固有振動解析を行う際、構造物の振動において復元力に関する剛性マトリックスは断面の図心、慣性力に関する質量マトリックスは断面の重心で作成される。したがって、断面の図心と重心の異なる合成断面では断面内の解析節点に図心と重心のずれが生じ、その偏心量を考慮する場合と無視する場合では得られる固有値に誤差が現れると考えられる。

そこで、本研究は図心、重心、せん断中心が異なる 2 軸非対称合成断面を有する合成 2 主桁橋を対象とし、その固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径、径間数および変断面の関係について検討するものである。さらに、2 軸非対称断面を有する桁では三重連成振動が現われる。モード連成比を用いて、各固有振動モードで支配的な振動モードを判定し、各解析節点および変断面がモード連成に与える影響を把握することを目的とする。

2. 解析方法

構造物の固有振動特性を求める方法としては、これをいくつかの要素に分割し、有限要素解析を行うことが主流である。構造部材を図-1 のような桁要素の集合体に分割して有限要素解析を行う場合、断面の図心またはせん断中心を要素間の節点とする方法が用いられる。断面の図心と重心とが一致する鋼断面では、図心を解析節点とすれば同一節点に関して剛性および質量マトリックスを作成することができるが、合成断面では、断面の図心と重心が異なるため、その偏心距離を考慮する場合と無視する場合では得られる固有値に誤差が生じると考えられる。そこで、図-1 に示す桁要素の集合体である薄肉断面部材要素の両端断面上の任意点 $P(y_p, z_p)$ 、 $Q(y_q, z_q)$ を新しい節点とする剛性マトリックスおよび質量マトリックスを作成することによって、断面内の同一節点における解析が可能となり、各解析節点において重心の偏心量を考慮した固有振動解析が行える。

2.1 断面上の任意点における変位関数

図-1 に示すような薄肉断面部材要素において、せん断

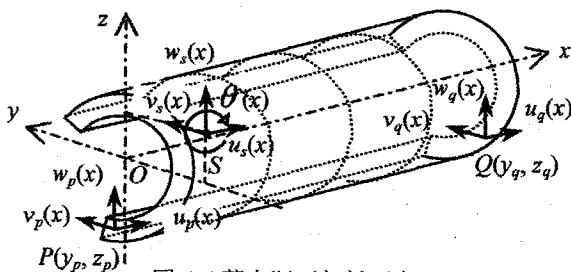


図-1 薄肉断面部材要素

中心 $S(y_s, z_s)$ における変位は任意点 $P(y_p, z_p)$ の変位を用いて次のように表される⁵⁾。

$$u_s(x) = u_p(x) + y_p v'_p(x) + z_p w'_p(x) - \omega_n(y_p, z_p) \cdot \theta'(x) \quad (1a)$$

$$v_s(x) = v_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \quad (1b)$$

$$w_s(x) = w_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \quad (1c)$$

ただし、 $()$ は x に関する微分を表している。

2.2 剛性および質量マトリックスの一般化

図-1 に示すように、部材要素左端の任意点を $P(y_p, z_p)$ 、右端の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とすれば、点 Q においても式(1)と同様の関係式を導くことができる。よって、部材要素両端断面上のせん断中心 $S(y_s, z_s)$ における変位は、以下のようマトリックス表示される¹¹⁾。

$$\begin{Bmatrix} d_{SL} \\ d_{SR} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_p & 0 \\ 0 & T_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_p \\ d_q \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

ここで、

$$d_{SL} = \{u_{SL}, v_{SL}, w_{SL}, \theta_{xSL}, \theta_{ySL}, \theta_{zSL}, \theta_{\omega SL}\}^T \quad (2b)$$

$$d_{SR} = \{u_{SR}, v_{SR}, w_{SR}, \theta_{xSR}, \theta_{ySR}, \theta_{zSR}, \theta_{\omega SR}\}^T \quad (2c)$$

$$d_p = \{u_p, v_p, w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}, \theta_{\omega p}\}^T \quad (2d)$$

$$d_q = \{u_q, v_q, w_q, \theta_{xq}, \theta_{yq}, \theta_{zq}, \theta_{\omega q}\}^T \quad (2e)$$

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_p & y_p & -\omega_n(y_p, z_p) \\ 0 & 1 & 0 & z_p - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(y_p - y_s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_p - y_s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_p - z_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2f)$$

$$T_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_q & y_q & -\omega_n(y_q, z_q) \\ 0 & 1 & 0 & z_q - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(y_q - y_s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_q - y_s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_q - z_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2g)$$

ここで、式(2a)を $d_s = T d_p$ と表し、座標変換マトリックス T を用いてせん断中心位置における要素剛性マトリックス K_s を変換すると、部材要素両端断面上の任意点における要素剛性マトリックス K_{pq} は次のようになる。

$$K_{pq} = T^T K_s T \quad (3a)$$

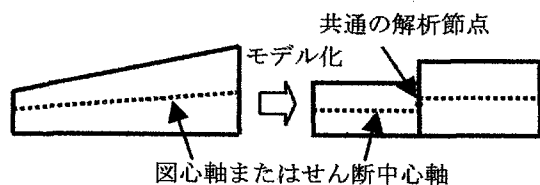


図-2 変断面部材のモデル化

また、要素剛性マトリックスと同様の方法により、要素質量マトリックス M_s から断面上の任意点における要素質量マトリックス M_{pq} に変換することができる。

$$M_{pq} = T^T M_s T \quad (3b)$$

以上より、式(3a)、(3b)を用いることによって、部材要素両端面上の同一節点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを求めることができ、断面内の同一節点における固有振動解析を行うことが可能となる。ここで、断面内の任意点における剛性マトリックスを K 、質量マトリックス M 、構造物の固有円振動数 ω とすると、任意点を解析節点とする固有振動解析における振動数方程式は、次式で示される固有値問題に帰着される。

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (4)$$

上式の固有値問題を解くにあたり、本研究で用いた方法は Householder 法である。

2.3 変断面部材のモデル化

有限要素法を用いた変断面桁の固有振動解析においては、一般的に図-2のような直線要素の集合体にモデル化して解析する場合が多い。このとき、隣り合う要素間で断面の図心軸およびせん断中心軸のずれがあるため、各要素マトリックスを単純に重ね合わせることができない。この問題を解消する一つの方法として、一般化された剛性マトリックスおよび一般化された質量マトリックスを用い、図-2に示すように隣り合う要素間の図心またはせん断中心の中間点を共通の解析節点とする。なお、このような断面変化する実構造物を、要素ごとに一定断面とすることによる誤差が十分小さくなるように要素分割数を設定している。

3. 単径間合成2主桁橋の数値計算結果

重心の偏心量が固有振動数に与える影響を検討するために、まずは基本モデルとして、2軸非対称合成断面を有する単径間直線桁の解析を行う。さらに曲率半径と重心の偏心量の影響を明らかにするために、単径間曲線桁についても計算を実施する。なお、数値計算には整合質量法を用いており、解析節点を図心 O 、重心 M 、せん断中心 S とした時、重心の偏心量を無視した場合と考慮した場合について固有振動解析を行い、その結果について以下に考察する。

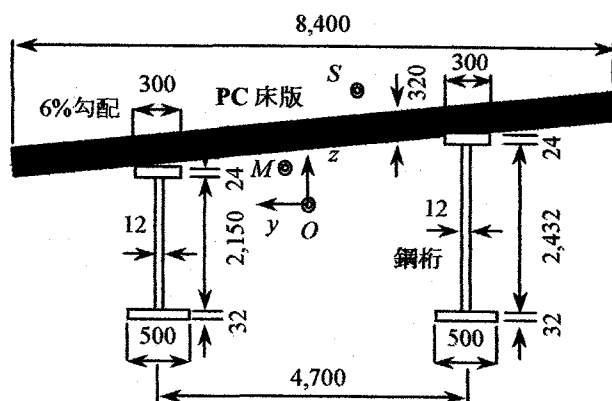


図-3 断面図

表-1 断面諸元および座標値

$A(m^2)$	4.909×10^{-1}
$I_y(m^4)$	2.823×10^{-1}
$I_z(m^4)$	2.849×10^0
$J(m^4)$	3.304×10^{-4}
$C_w(m^6)$	1.512×10^0
$w(kN/m)$	7.366×10^1
図心 $O(y,z)$ (m)	(0.000, 0.000)
重心 $M(y,z)$ (m)	(0.008, 0.152)
せん断中心 $S(y,z)$ (m)	(-0.290, 0.628)

3.1 解析モデル

数値計算例として、単径間合成2主桁橋の断面図を図-3、断面諸元および座標値を表-1に示す。解析モデルは直線桁および曲率半径 $R=200m$ 、 $100m$ 、 $50m$ の曲線桁とし、等断面を有しているため、桁高および幅員方向の断面変化はないものとする。支間長は32mであり、有限要素法による分割数は橋軸方向20分割とし、断面方向は1節点としている。また、境界条件は両端単純支持であり、曲線桁は直線要素からなる多角折れ線にモデル化する。

3.2 解析結果

表-2に直線桁、表-3に曲率半径 $R=100m$ の曲線桁における12次モードまでの振動モードと固有振動数をそれぞれ示す。ただし、表中の記号Hは水平振動モード、Vは鉛直振動モード、Tはねじり振動モード、Lは縦振動モードを表している。括弧内の値は解析節点を図心 O 、重心 M 、せん断中心 S とした場合において重心の偏心量を無視した固有振動数に対する考慮した場合のそれぞれの誤差(%)である。

(1) 直線桁における固有振動数

表-2において、各振動モード別に固有振動数を見ると、水平振動モードについては8次モード(H2)でわずかな誤差が生じた。これは水平曲げ振動は z 軸回りに発生するため、6%の横断勾配を有する合成2主桁橋は z 軸に関してわずかに非対称であることが影響していると考えられ

る。鉛直曲げ振動モードについては高次になるほど重心の偏心量の影響が大きく現れていることが認められる。

表-2 直線桁($R=\infty$)における固有振動数(Hz)

振動モード		解析節点の位置					
		図心 O		重心 M		せん断中心 S	
		重心の偏心量		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮	無視	考慮
1	T1	3.788	3.788 (0.000)	3.834	3.834 (0.000)	3.927	3.927 (0.000)
2	V1	4.267	4.267 (0.000)	4.335	4.336 (0.023)	5.194	5.197 (0.058)
3	H1	13.556	13.556 (0.000)	13.556	13.556 (0.000)	13.626	13.626 (0.000)
4	T2	15.101	15.101 (0.000)	15.284	15.284 (0.000)	15.657	15.657 (0.000)
5	V2	17.068	17.061 (-0.041)	17.052	17.043 (-0.053)	16.789	16.779 (-0.060)
6	T3	33.958	33.957 (-0.003)	34.370	34.370 (0.000)	35.209	35.209 (0.000)
7	V3	38.405	38.366 (-0.102)	38.446	38.412 (-0.088)	39.067	39.046 (-0.054)
8	H2	54.223	54.222 (-0.002)	54.221	54.220 (-0.002)	50.423	50.422 (-0.002)
9	L1	57.374	57.375 (0.002)	56.831	56.806 (-0.044)	55.007	54.986 (-0.038)
10	T4	60.361	60.360 (-0.002)	61.109	61.110 (0.002)	62.584	62.584 (0.000)
11	V4	68.280	68.159 (-0.177)	68.681	68.639 (-0.061)	72.519	72.610 (0.125)
12	T5	94.320	94.316 (-0.004)	95.456	95.450 (-0.006)	97.793	97.793 (0.000)

表-3 $R=100m$ の曲線桁における固有振動数(Hz)

振動モード		解析節点の位置					
		図心 O		重心 M		せん断中心 S	
		重心の偏心量		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮	無視	考慮
1	T1	3.416	3.416 (0.000)	3.477	3.478 (0.029)	3.486	3.486 (0.000)
2	V1	5.028	5.028 (0.000)	4.995	4.995 (0.000)	5.852	5.854 (0.034)
3	H1	14.511	14.510 (-0.007)	14.521	14.520 (-0.007)	13.990	13.989 (-0.007)
4	T2	14.974	14.970 (-0.027)	15.134	15.131 (-0.020)	15.385	15.386 (0.006)
5	V2	17.327	17.322 (-0.029)	17.339	17.333 (-0.035)	17.098	17.087 (-0.064)
6	T3	34.012	34.007 (-0.015)	34.425	34.422 (-0.009)	35.139	35.141 (0.006)
7	V3	38.516	38.479 (-0.096)	38.567	38.534 (-0.086)	39.117	39.094 (-0.059)
8	H2	52.319	52.303 (-0.031)	52.101	52.086 (-0.029)	51.155	51.143 (-0.023)
9	L1	59.212	59.233 (0.035)	58.919	58.908 (-0.019)	54.243	54.236 (-0.013)
10	T4	60.503	60.507 (0.007)	61.239	61.242 (0.005)	62.526	62.526 (0.000)
11	V4	68.384	68.257 (-0.186)	68.777	68.738 (-0.057)	72.453	72.545 (0.127)
12	T5	94.437	94.429 (-0.008)	95.586	95.580 (-0.006)	97.071	96.931 (-0.144)

ねじり振動モードについては解析節点を図心および重心にした場合、若干の誤差が生じている。これは図-3の2軸非対称合成断面ではねじり振動と z 軸回りの水平振動および y 軸回りの鉛直振動が連成する複雑な三重連成振動が発生しているためであると考えられる。それに対して、解析節点をせん断中心とした場合にはねじり振動はせん断中心に関して発生しているため、重心の偏心量の影響は小さいことが確認できる。また、各解析節点に注目すると、図心においては縦1次(L1)、重心においては鉛直1次(V1)およびねじり4次(T4)、せん断中心においては鉛直1次(V1)および4次(V4)で重心の偏心量を考慮した方が無視した場合よりも固有振動数の値は大きくなるものの、他の振動モードでは考慮した方が小さな固有振動数となることが認められる。

(2) 曲線桁における固有振動数

表-3において各振動モード別に固有振動数を見ると、水平振動モードについては直線桁の場合と異なり、3次モード(H1)においても誤差が生じている。鉛直振動モードについては直線桁と同様、高次になるに従って重心の偏心量の影響が現れていることがわかる。ねじり振動モードについては直線桁の場合と異なり、せん断中心を解析節点とした場合においても重心の偏心量が固有振動数に影響を与えていることが確認できる。特に、重心の偏心量の影響は12次モード(T5)で顕著である。一方、各解析節点別に見ると、図心、重心およびせん断中心の全解析節点において、直線桁と同様にほとんどの振動モードで重心の偏心量を考慮した固有振動数の方が無視した場合よりも小さな値をとることがわかる。

(3) 重心の偏心量の影響と曲率半径の関係

図-4および図-5に解析節点を図心およびせん断中心とした場合の固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係を示す。

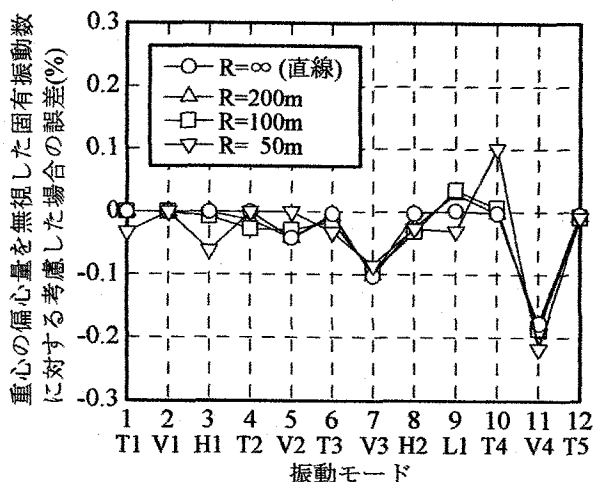


図-4 図心を解析節点とした場合の固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係

水平および鉛直振動モードは図心、ねじり振動はせん断中心に関して発生することを考慮すると、図-4より図心を解析節点とした場合、水平振動モードについては曲

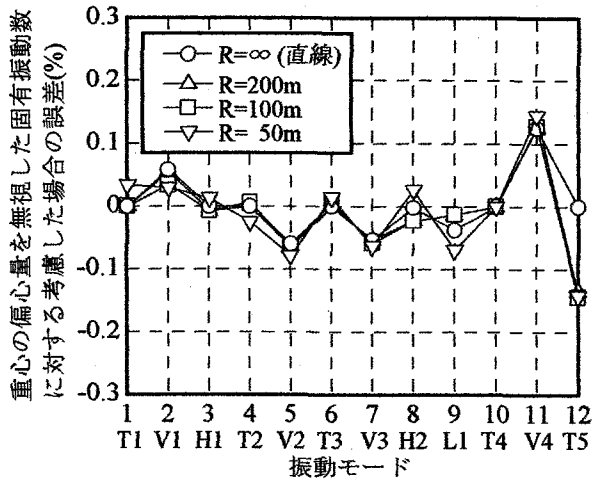


図-5 せん断中心を解析節点とした場合の固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係

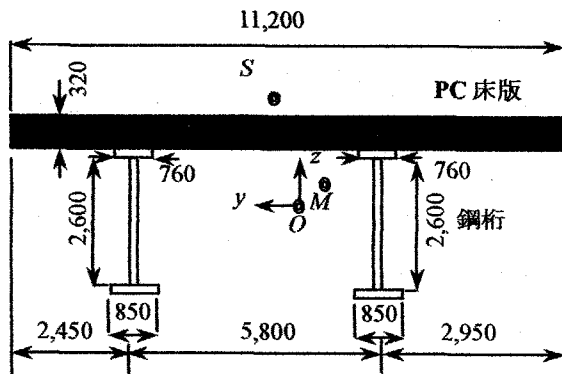


図-6 断面図

率半径が小さくなるに従って重心の偏心量の影響が大きくなることが認められる。鉛直振動モードについては曲率半径が小さくなるほど2次から7次モード(V1~V3)における重心の偏心量の影響は小さいものの、高次の11次モード(V4)においてはその影響が大きいことが理解できる。これより、曲率半径が小さくなるにつれて高次モードになるほど重心の偏心量の影響は大きくなることがわかる。

また、図-5より、せん断中心を解析節点とした場合、ねじり振動モードにおける重心の偏心量の影響は、曲率半径が小さくなるに従って大きくなることが確認できる。

4. 連続変断面合成2主桁橋の数値計算結果

固有振動数に与える径間数と重心の偏心量の影響を調べるために、2径間連続変断面直線桁の数値計算を以下に行う。また、同時に変断面の影響を見るために、変断面桁を各径間ごとに平均化した等断面を有する直線桁の固有振動解析も実施し、考察を加えることとする。

4.1 解析モデル

数値計算に用いた2径間連続変断面直線桁の断面図を図-6、側面図を図-7に示す。ここで、①~⑰は節点番号

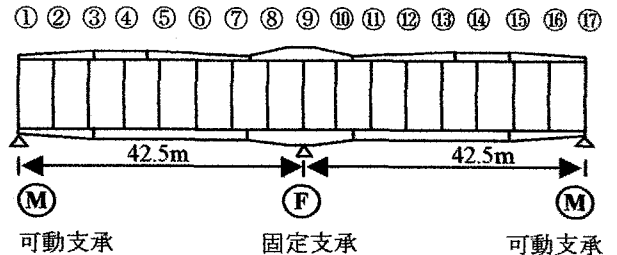


図-7 側面図

表-4 各節点における上フランジ厚、ウェブ厚および下フランジ厚

	①, ⑰	②, ⑯	③, ⑮	④, ⑭	⑤, ⑬	⑥, ⑫	⑦, ⑪	⑧, ⑩	⑨
上フランジ厚(mm)	24.00	27.23	34.18	35.00	34.44	29.49	24.54	31.98	49.00
ウェブ厚(mm)	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	22.00	22.00
下フランジ厚(mm)	26.00	26.88	28.78	29.00	29.00	29.00	29.00	35.38	49.00

表-5 各節点における断面諸元および座標値

	①, ⑰	②, ⑯	③, ⑮	④, ⑭	⑤, ⑬	⑥, ⑫	⑦, ⑪	⑧, ⑩	⑨
$A(m^2)$	7.045×10^{-1}	7.111×10^{-1}	7.252×10^{-1}	7.268×10^{-1}	7.260×10^{-1}	7.182×10^{-1}	7.105×10^{-1}	7.443×10^{-1}	7.944×10^{-1}
$I_y(m^4)$	5.261×10^{-1}	5.372×10^{-1}	5.611×10^{-1}	5.639×10^{-1}	5.635×10^{-1}	5.599×10^{-1}	5.564×10^{-1}	6.423×10^{-1}	7.880×10^{-1}
$I_z(m^4)$	6.984×10^0	7.040×10^0	7.160×10^0	7.174×10^0	7.166×10^0	7.101×10^0	7.035×10^0	7.322×10^0	7.747×10^0
$J(m^4)$	5.047×10^{-4}	5.307×10^{-4}	5.950×10^{-4}	6.034×10^{-4}	5.978×10^{-4}	5.524×10^{-4}	5.126×10^{-4}	5.908×10^{-4}	8.254×10^{-4}
$C_w(m^6)$	4.592×10^0	4.688×10^0	4.897×10^0	4.921×10^0	4.918×10^0	4.890×10^0	4.862×10^0	5.630×10^0	6.927×10^0
$w(kN/m)$	1.020×10^2	1.025×10^2	1.036×10^2	1.037×10^2	1.036×10^2	1.031×10^2	1.025×10^2	1.050×10^2	1.088×10^2
$O(y,z)(m)$	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)	(0.000,0.000)
$M(y,z)(m)$	(-0.033,0.184)	(-0.034,0.183)	(-0.036,0.183)	(-0.036,0.183)	(-0.036,0.183)	(-0.035,0.186)	(-0.034,0.191)	(-0.037,0.205)	(-0.041,0.220)
$S(y,z)(m)$	(0.149,0.734)	(0.148,0.740)	(0.144,0.753)	(0.144,0.754)	(0.144,0.755)	(0.145,0.760)	(0.146,0.766)	(0.136,0.852)	(0.123,0.965)

である。図-7に示すように、この解析モデルはフランジ材にテーパが付いた LP 鋼板を有しており、橋軸方向においてフランジ厚が変化するという特徴を持つ。また、表-4に各節点における上フランジ厚、ウェブ厚および下フランジ厚を、表-5に断面諸元および座標値を示す。要素分割数を 16 分割とし、各要素ごとに断面諸元を平均化した解析モデルを Case1 とし、各径間ごとに断面諸元を平均化した解析モデルを Case2 とする。

4.2 固有振動数

図心およびせん断中心を解析節点とした場合の固有振動数を表-6および表-7に示す。また、括弧内の値は Case1 および Case2 において重心の偏心量を無視した固有振動数に対する考慮した場合のそれぞれの誤差(%)である。

固有振動数に与える径間数と重心の偏心量の影響を調べるために、まず Case2 について見ると、表-6より図心を解析節点とした場合、水平振動については 3 次モード (H3) で若干の誤差が生じている。鉛直振動モードについては高次モードになるほど重心の偏心量の影響は大きくなることが認められるが、その最大値は 5 次モード (V5) で -0.072% と単径間より小さい値である。これは 2 径間連続桁となり橋長が長くなったために、重心の偏心量の影響が相対的に小さくなったと考えられる。表-7よりせん断中心を解析節点とした場合、ねじり振動モードについては誤差は現われていないことが確認できる。以上より、

いずれの振動モードも単径間直線桁の場合と同様の傾向を示すことがわかる。

次に、固有振動数に与える変断面と重心の偏心量の関係について、各要素ごとに断面諸元を平均化した Case1 と各径間ごとに断面諸元を平均化した Case2 を比較する。その結果を各振動モード別に見ると、水平およびねじり振動モードについては有意な差は認められない。それに対して、鉛直振動モードについては、表-6より図心を解析節点とした場合、Case1 では Case2 と異なり、低次の 1 次モード (V1) においても誤差が現われていることが確認できる。

4.3 モード連成比

2 径間連続の変断面を有する合成 2 主桁橋について固有振動解析を行うと、図-6に示すような断面は 2 軸非対称断面であるため、ねじり振動が水平振動および鉛直振動を伴う三重連成振動となり、その固有振動モードは複雑なものとなる。そこで、著者ら¹¹⁾が以前に提案したモード連成比を用いて、解析節点を図心およびせん断中心とした場合における各要素ごとに断面諸元を平均化した Case1 および各径間ごとに断面諸元を平均化した Case2 の各固有振動モードで支配的な振動モードを判定し、各解析節点および変断面がモード連成に与える影響を以下に示す。

モード連成比とは、1 節点で 7 自由度を持つ各固有振

表-6 図心を解析節点とした場合の固有振動数(Hz)

振動モード	次数	Case1		Case2	
		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮
水平振動	H1	10.209	10.209 (0.000)	10.276	10.276 (0.000)
	H2	16.175	16.175 (0.000)	16.054	16.054 (0.000)
	H3	41.001	41.001 (0.000)	41.116	41.115 (-0.002)
鉛直振動	V1	2.887	2.886 (-0.035)	2.923	2.923 (0.000)
	V2	4.663	4.662 (-0.021)	4.567	4.566 (-0.022)
	V3	11.604	11.600 (-0.034)	11.695	11.691 (-0.034)
	V4	14.893	14.888 (-0.034)	14.804	14.798 (-0.041)
	V5	26.236	26.217 (-0.072)	26.341	26.322 (-0.072)
ねじり振動	T1	2.552	2.552 (0.000)	2.582	2.582 (0.000)
	T2	4.120	4.120 (0.000)	4.024	4.024 (0.000)
	T3	10.277	10.277 (0.000)	10.297	10.297 (0.000)
	T4	13.123	13.123 (0.000)	13.030	13.030 (0.000)
	T5	23.087	23.087 (0.000)	23.180	23.180 (0.000)

表-7 せん断中心を解析節点とした場合の固有振動数(Hz)

振動モード	次数	Case1		Case2	
		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮
水平振動	H1	10.261	10.261 (0.000)	10.275	10.275 (0.000)
	H2	16.176	16.176 (0.000)	16.054	16.054 (0.000)
	H3	41.064	41.063 (-0.002)	41.117	41.116 (-0.002)
鉛直振動	V1	2.876	2.875 (-0.035)	2.913	2.913 (0.000)
	V2	4.663	4.662 (-0.021)	4.567	4.566 (-0.022)
	V3	11.374	11.370 (-0.035)	11.489	11.483 (-0.052)
	V4	14.893	14.888 (-0.034)	14.804	14.798 (-0.041)
	V5	27.316	27.320 (0.015)	27.283	27.282 (-0.004)
ねじり振動	T1	2.624	2.624 (0.000)	2.656	2.656 (0.000)
	T2	4.233	4.233 (0.000)	4.141	4.141 (0.000)
	T3	10.516	10.516 (0.000)	10.596	10.596 (0.000)
	T4	13.490	13.490 (0.000)	13.408	13.408 (0.000)
	T5	23.755	23.755 (0.000)	23.852	23.852 (0.000)

表-8 Case1 の図心におけるモード連成比(%)

振動モード	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi\theta_x$	$\phi\theta_y$	$\phi\theta_z$	$\phi\theta_w$	Total
H1	0.1	53.2	4.5	31.5	0.7	5.1	4.9	100.0
H2	0.1	90.3	0.2	1.3	0.0	7.9	0.2	100.0
H3	0.1	69.5	1.8	12.5	0.6	11.5	4.0	100.0
V1	0.6	0.0	92.1	0.1	7.2	0.0	0.0	100.0
V2	0.6	0.0	91.4	0.0	8.0	0.0	0.0	100.0
V3	0.7	0.0	85.8	0.0	13.5	0.0	0.0	100.0
T1	0.1	37.2	6.6	48.7	0.6	3.0	3.8	100.0
T2	0.1	37.2	6.7	47.9	0.6	3.3	4.2	100.0
T3	0.2	35.1	6.4	44.3	1.1	5.5	7.4	100.0

表-9 Case2 の図心におけるモード連成比(%)

振動モード	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi\theta_x$	$\phi\theta_y$	$\phi\theta_z$	$\phi\theta_w$	Total
H1	0.0	92.7	0.0	0.0	0.0	7.3	0.0	100.0
H2	0.1	91.9	0.0	0.0	0.0	8.0	0.0	100.0
H3	0.2	86.3	0.0	0.0	0.0	13.5	0.0	100.0
V1	0.0	0.0	92.7	0.0	7.3	0.0	0.0	100.0
V2	0.0	0.0	92.0	0.0	8.0	0.0	0.0	100.0
V3	0.1	0.0	86.4	0.0	13.5	0.0	0.0	100.0
T1	0.0	37.6	6.9	48.3	0.5	2.9	3.8	100.0
T2	0.0	37.4	6.8	47.9	0.6	3.2	4.1	100.0
T3	0.0	35.0	6.4	45.0	1.0	5.5	7.1	100.0

動モードにおいて、全体の変位振幅に対するそれぞれの
変位振幅の割合を数値的に表す指標のことであり、その
算定式は次式で表される。例えば、第 i 次固有振動モー
ドの x 軸方向変位のモード連成比は次のように表される。

$$\phi_{xi} = \frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{u_{ij}^2}}{\Phi} \times 100(\%) \quad (5a)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{u_{ij}^2} + \sqrt{v_{ij}^2} + \sqrt{w_{ij}^2} + \sqrt{\theta_{xij}^2} + \sqrt{\theta_{yij}^2} + \sqrt{\theta_{zij}^2} + \sqrt{\theta_{wij}^2} \right) \quad (5b)$$

上式において u_{ij} 、 v_{ij} 、 w_{ij} 、 θ_{xij} 、 θ_{yij} 、 θ_{zij} 、 θ_{wij} は第 i 次
固有振動モードの節点 j における x 、 y 、 z 軸方向の変位
振幅、 x 、 y 、 z 軸回りの回転角の振幅およびねじり率の
振幅であり、 N は全節点数である。また、表-8、表-9、
表-10 および表-11 において ϕ_x 、 ϕ_y 、 ϕ_z 、 $\phi\theta_x$ 、 $\phi\theta_y$ 、 $\phi\theta_z$ 、
 $\phi\theta_w$ はそれぞれ x 軸方向変位、 y 軸方向変位、 z 軸方向変
位、 x 軸回りの回転角、 y 軸回りの回転角、 z 軸回りの回
転角およびねじり率に関するモード連成比である。

表-8、表-9 は Case1 および Case2 において、図心を解
析節点とした場合のモード連成比(%)で、表-10、表-11
は Case1 および Case2 において、せん断中心を解析節点
とした場合のモード連成比(%)である。また、表中の影線
部は各固有振動モードで支配的なモード連成比を表して
いる。

表-10 Case1 のせん断中心におけるモード連成比(%)

振動モード	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi\theta_x$	$\phi\theta_y$	$\phi\theta_z$	$\phi\theta_w$	Total
H1	2.1	86.5	1.1	2.8	0.2	6.8	0.5	100.0
H2	1.0	89.5	0.0	1.4	0.0	7.8	0.3	100.0
H3	2.1	81.7	0.3	2.3	0.1	12.8	0.7	100.0
V1	8.9	0.0	84.4	0.1	6.6	0.0	0.0	100.0
V2	5.4	0.0	87.0	0.0	7.6	0.0	0.0	100.0
V3	18.3	1.3	69.4	0.0	10.9	0.1	0.0	100.0
T1	0.2	0.8	1.4	90.2	0.1	0.2	7.1	100.0
T2	0.0	2.0	0.3	89.6	0.0	0.2	7.9	100.0
T3	0.7	22.7	0.7	63.8	0.1	1.9	10.1	100.0

表-11 Case2 のせん断中心におけるモード連成比(%)

振動モード	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi\theta_x$	$\phi\theta_y$	$\phi\theta_z$	$\phi\theta_w$	Total
H1	2.1	89.6	1.1	0.0	0.2	7.0	0.0	100.0
H2	1.0	91.1	0.0	0.0	0.0	7.9	0.0	100.0
H3	2.3	84.2	0.2	0.0	0.1	13.2	0.0	100.0
V1	8.6	0.0	84.8	0.0	6.6	0.0	0.0	100.0
V2	5.5	0.0	87.0	0.0	7.5	0.0	0.0	100.0
V3	17.7	1.2	70.0	0.0	11.0	0.1	0.0	100.0
T1	0.0	0.0	0.0	92.7	0.0	0.0	7.3	100.0
T2	0.0	0.0	0.0	92.0	0.0	0.0	8.0	100.0
T3	0.0	0.0	0.0	86.4	0.0	0.0	13.6	100.0

図心を解析節点とした場合、表-8 に示す Case1 につい
ては、変断面のモデル化の影響により、それぞれ水平振
動成分を表す ϕ_x と $\phi_{\theta x}$ および鉛直振動成分を示す ϕ_z と
 $\phi_{\theta z}$ 以外の成分が現れており、特に水平 1 次および 3 次
モード(H1・H3)でその傾向は顕著である。一方、表-9 より
Case2 において各振動モード別に見ると、図-7 より両
端支点で橋軸方向の変位を自由にしているために、水平
振動では 2 次および 3 次モード(H2・H3)、鉛直振動では
3 次モード(V3)で、それぞれ縦振動成分を表す ϕ_z がわず
かに生じているが、ほぼ水平振動成分を表す ϕ_y と $\phi_{\theta y}$ お
よび鉛直振動成分を示す ϕ_z と $\phi_{\theta z}$ のみに数値が現れてい
ることがわかる。また、ねじり振動においては、縦振動
以外の全てのパラメーターに数値が現れており、図心を
解析節点とした場合、ねじり振動が水平および鉛直振動
を伴って、複雑な三重連成振動が発生していることが確
認できる。つまり、水平および鉛直振動モードは図心を
中心にして発生することが理解できる。

せん断中心を解析節点とした場合、表-10 より Case1
については、図心を解析節点とした場合と同様に変断面
の影響により、ねじり振動成分を表す $\phi_{\theta x}$ と $\phi_{\theta w}$ 以外の成
分と若干連成し、ねじり振動は完全に分離されていない
ことがわかる。特に、3 次モード(T3)でその傾向は顕著
に現れている。それに対して、表-11 より Case2 につい
ては、ねじり振動成分を表す $\phi_{\theta x}$ と $\phi_{\theta w}$ のみに数値が現れて
おり、ねじり振動は完全に独立して発生していることが
確認できる。よって、ねじり振動はせん断中心に関して
発生することがわかる。

5. おわりに

本研究は図心、重心、せん断中心が異なる2軸非対称合成断面を有する合成2主桁橋を対象とし、その固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径、径間数および変断面の関係について考察したものである。さらに、モード連成比を用いて、各固有振動モードの連成度を検討した。ここで得られた結論をまとめると以下のようになる。

(1)合成断面における重心の偏心量の影響と曲率半径の関係を把握するために単径間直線および曲線桁の解析を行った。その結果を各振動モード別に見ると、水平振動モードについては直線桁の場合、8次モード(H2)のみで誤差が生じたが、曲線桁では3次モード(H1)から誤差が認められ、その値は曲率半径が小さくなるほど大きくなる。鉛直振動モードについては直線桁、曲線桁共に高次になるほど重心の偏心量の影響が大きく現れていることが認められたが、その傾向は曲率半径が小さくなるに従って顕著である。ねじり振動モードについては直線桁の場合、解析節点をせん断中心にすると誤差は生じなかったが、曲線桁では特に5次モード(T5)で誤差が現れ、その値は曲率半径が小さくなるに従って大きくなることが確認された。また、全解析節点において、直線桁、曲線桁ともにほとんどの振動モードで重心の偏心量を考慮した場合の固有振動数の方が無視した場合よりも小さな値をとる。しかし、その誤差は高々1%未満であった。

(2)重心の偏心量の影響と径間数および変断面の関係を調べるために、2径間連続変断面直線桁の数値計算を行った。まず、各径間ごとに断面諸元を平均化したCase2の結果から径間数の影響について見ると、全ての振動モードとも単径間の場合と同様の傾向を示したが、鉛直振動モードにおいては2径間連続桁となり橋長が長くなったために、重心の偏心量の影響が相対的に小さくなった。次に、各要素ごとに断面諸元を平均化したCase1の結果から変断面の影響について見ると、水平およびねじり振動モードについては有意な差は現われなかった。それに対して、鉛直振動モードについては、図心を解析節点とした場合、1次モード(V1)でも誤差が現われていることが認められた。

(3)モード連成比を用いて、三重連成振動の中で支配的な振動モードを判定し、各解析節点および変断面が連成度に与える影響について検討した。このモード連成比を用いることにより、等断面および変断面において、水平および鉛直振動モードは図心、ねじり振動モードはせん断中心を解析節点として選択すれば、それぞれの振動がほぼ独立して発生していることを確認することができた。

以上より、重心の偏心量が合成2主桁橋の固有振動数に与える影響は比較的小さく、実務設計への寄与は小さいと考えられる。しかし、曲率半径の小さい橋梁および

高次の鉛直振動モードにおいては考慮する必要があると考えられる。特に、鉛直振動モードに与える重心の偏心量の影響は、径間数が増加し橋長が長くなると小さくなるが、変断面においては高次のみならず低次から現われることが確認された。

参考文献

- 1) 高橋昭一・志村勉・橋吉宏・小西哲司：PC床版2主桁橋「ホロナイ川橋」の設計および解析・試験検討，橋梁と基礎，Vol.30，No.2，pp.23-30，1996。
- 2) 高橋昭一・志村勉・木村宏・小西哲司：PC床版2主桁橋「ホロナイ川橋」の現場施工，橋梁と基礎，Vol.30，No.3，pp.2-7，1996。
- 3) 大垣賀津雄・川口喜史・磯江暁・高橋昭一・川尻克利・長井正嗣：合成2主桁橋の鋼主桁補剛設計に関する実験的研究，構造工学論文集，Vol.44A，pp.1229-1239，1998。
- 4) 宮田利雄・山田均・勝地弘・市瀬達夫：少数主桁橋のFEMによる振動解析，鋼構造年次論文報告集，第9巻，pp.47-52，2001。
- 5) 川井忠彦・藤谷義信：振動および応答解析入門，培風館，1991。
- 6) Krajcinovic, D.: A consistent discrete elements technique for thinwalled assemblages, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.5, pp.639-662, 1969。
- 7) 結城皓曠・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動解析，土木学会論文報告集，第224号，pp.67-78，1974。
- 8) Wekezer, J. W. : Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.115, No.12, pp.2965-2978, 1989。
- 9) Friberg, P. O. : Coupled vibrations of beams an exact dynamic element stiffness matrix, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.19, pp.479-493, 1983。
- 10) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free Vibration Analysis of Steel Bridges of Arch-Structural Systems, *Proc. of EASEC-3*, pp.963-968, April, 1991。
- 11) 松井義孝・林川俊郎・北島勉・佐藤浩一：薄肉断面を有する直線桁橋の固有振動解析にともなうモード連成に関する一考察，構造工学論文集，Vol.46A，pp.449-459，2000。
- 12) Y. Matsui and T. Hayashikawa: Dynamic stiffness analysis for torsional vibration of continuous beams with thin-walled cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.243, No.2, pp.301-316, 2001。

(2002年9月13日受付)