

エネルギー原理に基づく材料および幾何学的非線形を考慮した トラス構造物の最適設計法

Optimum design method for material and geometrical nonlinear truss structures based on energy principles

谷脇一弘*, 大久保禎二**

Kazuhiro Taniwaki, Sadaji Ohkubo

*博士 (工学) 愛媛大学工学部助手 工学部環境建設工学科 (〒790-8577松山市文京町3)

**工学博士 愛媛大学名誉教授 (〒791-0212 愛媛県温泉郡重信町田窪1954-55)

This paper proposes a new efficient optimum design method for material and geometrical nonlinear truss structures. The structural analysis method for material and geometrical nonlinear truss structures is developed by minimizing the displacements at free nodes subject to equilibrium equations at free nodes and compatibility conditions (relationships between displacements and strains) at the deformed configuration. Then, the above nonlinear analysis method is extended to the optimization of material and geometrical nonlinear truss structures by deriving the necessary conditions for analysis problem. The optimum design problem is reformulated by adding the necessary conditions to the primary optimum design problem, and dealing with not only the primary design variables (cross-sectional areas) but also the displacements and the Lagrange multipliers of analysis problem as the independent variables. The rigorousness, efficiency and reliability of the proposed method are demonstrated in the numerical examples.

Key Words : material and geometrical nonlinearities, optimum design method, truss structures, complementary energy minimization

キーワード: 材料および幾何学的非線形, 最適設計法, トラス構造物, コンプリメンタリーエネルギー最小化

1. まえがき

近年, 土木構造物に求められる機能や性能も一段と高度化および多様化する傾向にあり, 構造物の設計においては, 弾性域を越えた終局耐力や非線形挙動に対する安全性の検討をも行い構造物を経済的に設計することが義務付けられている¹⁾. このためには, 材料の非線形のみならず幾何学的非線形をも考慮した複合非線形解析を行い, 種々の荷重や使用状態における構造物の終局耐力に対する安全性の検討を行うことができ, かつ, 構造物を最適に設計することができる合理的な設計法を確立する必要がある.

ところで, 大久保らはこれまでに, コンプリメンタリーエネルギー最小化の原理に基づき骨組構造物の材料非線形解析法を開発し^{2)~5)}, さらに, この解析法を発展させ, 材料非線形を考慮した骨組構造物の挙動の感度係数を用いない効率的な最適設計法を確立した^{6)~8)}.

一方, コンプリメンタリーエネルギー最小化に基

づく骨組構造物の幾何学的非線形解析法に関する研究は, 1960年代に Libove⁹⁾および Oran¹⁰⁾により, コンプリメンタリーエネルギーの停留条件より導入された解析式を用いて解く方法が提案されている. しかし, その後は主に変位法に基づく解析法に関する研究へと移行し, 1970年代から1980年代の初期に日本においても, 変位法に基づく荷重増分法に基礎をおく種々の解析法が提案されている^{11)~17)}. これらの手法は, 基本的に材料非線形をも考慮した複合非線形解析へと拡張することが可能である汎用的な手法であるが, これらの解析手法と従来の最適設計法を組み合わせる複合非線形を考慮した構造物の最適設計を行う場合には, 感度係数の計算に多大な計算量を要し, かつ変数の改良のために使用できる感度係数の有効な範囲も改良前の設計変数の値の近傍の限られた範囲となることより, 最適設計を行うことはきわめて困難となる.

そこで本研究では, これまでの研究でその有効性および効率性が明らかとなっている最小コンプリメ

ンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の解析法^{2),3)}および最適設計法^{6),8)}の考え方を基本とし、複合非線形を考慮したトラス構造物の解析法および最適設計法に関する研究を行ったものである。

本研究では、まず、変形後の力の釣合条件のみならず変形後の部材のひずみと変位の関係（変位の適合条件）をも制約条件として考慮し、節点変位を未知変数としてコンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより、トラス構造物の複合非線形解析を行う方法を提案している。つづいて、この解析法を用いて複合非線形状態におけるトラス構造物の最適設計を行うため、解析問題のラグランジュ関数を導入し、この停留条件を用いて、トラス構造物の非線形挙動の解析において満足すべき必要条件式を誘導する。この必要条件式を新たな制約条件として原最適設計問題に付加し、さらに、設計変数として断面積のみならず可動節点変位およびラグランジュ乗数をも独立な設計変数として考慮することにより最適設計問題の再定式化を行う。この再定式化した最適設計問題の近似問題を導入し、勾配射影法の手法を用いて設計変数の改良を行い、最適解を決定している。この最適化過程において、各部材の応力度および可動節点変位の設計変数に関する感度係数の計算はすべて解析式により行っており、複雑かつ多大な計算量を必要とする複合非線形状態の挙動の感度係数の計算を行う必要はない。

本論文で提案した解析法および最適設計法の信頼性および有効性について検討を行うため、まず解析例において、39 部材トラスを対象とし、変位法に基づく荷重増分法による解析結果と比較することにより、本解析法の信頼性を明らかにした。つづいて、設計例では、10 部材片持ちトラスおよび 33 部材アーチトラスの設計例を示し、本最適設計法の有効性を明らかにした。

2. コンプリメンタリーエネルギー最小化による複合非線形解析法

材料および幾何学的非線形を考慮した複合非線形状態にある構造物の解析を行うためには、変形状態における力の釣合条件および部材のひずみと変位の関係（変位の適合条件）を満足させつつコンプリメンタリーエネルギーの最小化を行う必要がある。そこで本研究では、トラス構造物の軸力 N のみならず各節点の変位 δ をも未知変数として考慮し、変形状態における力の釣合条件および変位の適合条件を制約条件として考慮したコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を定式化する。この解析問題を軸力 N

と変位 δ の関係式を用いて未知変数を δ のみに集約したコンプリメンタリーエネルギー最小化問題に変換し、この問題を解くことにより複合非線形解析を行っている。以下に本解析法のアルゴリズムの詳細について述べる。

トラス構造物の各節点の変位量 δ を考慮した変形状態において、部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{Ci}(N, \delta)$ は次式で表わされる。

$$\Pi_{Ci}(N, \delta) = \beta_i(N_i) A_i l_i(\delta) \quad (1)$$

ここに、 A_i および $l_i(\delta)$ はそれぞれ部材 i の断面積および変形後の部材長である。 $\beta_i(N_i)$ はコンプリメンタリーエネルギー密度であり次式で与えられる。

$$\beta_i(N_i) = \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i(N_i) d\sigma \quad (2)$$

ここに、 σ_i および $\varepsilon_i(N_i)$ は部材 i の応力度およびひずみを示す。

n 個の部材からなるトラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_C(N, \delta)$ は、式(1)で表わされる部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{Ci}(N, \delta)$ を、全ての部材について加え合わせることににより次式より求められる。

$$\Pi_C(N, \delta) = \sum_{i=1}^n \Pi_{Ci}(N, \delta) \quad (3)$$

トラス構造物の各部材要素に使用する材料が異なる場合には、式(2)の $\beta_i(N_i)$ の計算において、各部材に使用する材料の応力度-ひずみ関係に対応した関数を用いなければならない。

変形状態における力の釣合条件式 $g_F = [g_{F1}(N, \delta), \dots, g_{Fm}(N, \delta)]^T$ は、次式により表すことができる。

$$g_{Fj}(N, \delta) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta) N_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (4)$$

ここに、 m は可動節点変位成分の数を示す。 C_{ji} は軸力 N_i の可動節点成分 j への方向余弦、 P_j は可動節点成分 j に作用する外力である。さらに、本研究では変位の適合条件式として、次に示す部材のひずみ ε_i と変位 δ の関係式 $g_C = [g_{C1}(N, \delta), \dots, g_{Cn}(N, \delta)]^T$ を考慮している。

$$g_{Ci}(N, \delta) = \varepsilon_i(N_i) \cdot l_i^0 - (l_i(\delta) - l_i^0) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (5)$$

ここに、 l_i^0 は変形前の部材長である。

式(3), (4)および(5)を考慮し、複合非線形状態におけるトラス構造物の真の軸力 N^* および変位 δ^* を決定する問題は、次の N, δ を未知変数とするコンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化することができる。

$$\min. \quad \Pi_c(N, \delta) = \sum_{i=1}^n \Pi_{c_i}(N, \delta) \quad (6)$$

$$\text{sub.to} \quad g_{Fj}(\mathbf{N}, \delta) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta) N_i = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (7)$$

$$g_{Ci}(\mathbf{N}, \boldsymbol{\delta}) = \varepsilon_i(N_i) \cdot l_i^0 - (l_i(\boldsymbol{\delta}) - l_i^0) = 0$$

$$(i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

$$\Pi_{C\delta_i}(\delta) = \beta_i(N_i(\delta))A_i l_i(\delta) \quad (9)$$

したがって、式(6)～(8)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、変形状態における力の釣合条件式のみを考慮し、コンプリメンタリーエネルギーを最小化する δ を決定する問題として再定式化することができる。すなわち、

$$\min. \quad \Pi_{C\delta}(\delta) = \sum_{i=1}^n \Pi_{C\delta i}(\delta) \quad (10)$$

$$\text{sub.to} \quad g_{F_j}(\delta) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta) N_i(\delta) = 0$$

$$(j = 1, \dots, m) \quad (11)$$

て $1/1000$ および $1/100$ 以下となった時点で収束したものと判断した。真の軸力 N^* は、得られた変位 δ^* を用いて式(5)により各部材のひずみ ε を求め、応力度-ひずみ関係より決定することができる。なお、上記の逐次二次計画法によるコンプリメンタリーエネルギー最小化のアルゴリズムの詳細は文献 2)~5) を参照していただきたい。

上で述べたごとく、軸力および変位を未知変数としたコンプリメンタリーエネルギー最小化問題において、変位と軸力の関係式を用いることにより未知変数を変位のみに集約することができ、本複合非線形解析法は、これまでに提案している最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく材料非線形解析法²⁾⁻⁵⁾と同じ計算アルゴリズムにより効率的に複合非線形解析を行うことができる。

3. 解析例

表-1 に示した荷重増分法と本解析法による軸力の比較では、最大 0.007%の相対誤差により 2 つの方法とも一致した解が得られている。また、表-2 に示した節点変位の比較においても、荷重増分法に対して本解析法は最大 0.007%の相対誤差により一致した解が得られている。このことより、本解析法により、トラス構造物の複合非線形解析を正確に行うことができることが明らかとなった。また、表-1 に示したごとく、解を得るために要した勾配射影法によるコンプリメンタリーエネルギーの最小化回数は 6 回と収束性も良好であり、これまでに提案している材料非線形解析^{2), 3)}と同程度の計算量により、効率的に解が得られている。

4. 複合非線形トラスの最適設計法

4.1 原最適設計問題の定式化

本研究では、複合非線形挙動状態にあるトラス構造物の原最適設計問題の設計変数として、各部材の断面積 $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_n]^T$ を考慮し、各部材の応力度お

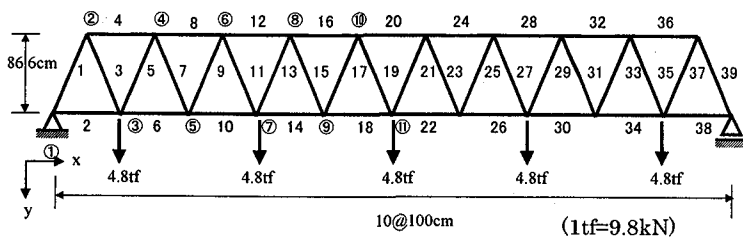


図-1 39 部材ワーレントラス

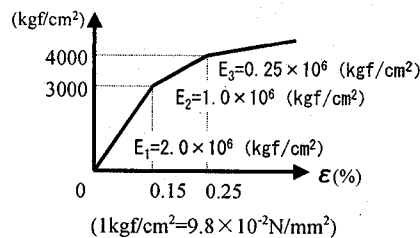


図-2 非線形材料

表-1 39 部材ワーレントラスにおいて、図-2 に示す非線形材料を考慮した複合非線形解析により得られた軸力の比較 (1kgf=9.8N)

解 法	荷重増分法	エネルギー法
部材番号	軸力 (kgf)	軸力 (kgf)
1	-13786	-13786 (0.0) ¹⁾
2	7935	7935 (0.0)
3	13795	13794 (0.007)
4	-13801	-13802 (0.007)
5	-8327	-8327 (0.0)
6	18569	18570 (0.005)
7	8204	8204 (0.0)
8	-22085	-22086 (0.005)
9	-8488	-8488 (0.0)
10	26881	26882 (0.004)
11	7919	7919 (0.0)
12	-30356	-30356 (0.0)
13	-3270	-3270 (0.0)
14	32122	32122 (0.0)
15	2222	2222 (0.0)
16	-33135	-33136 (0.003)
17	-3394	-3394 (0.0)
18	34894	34894 (0.0)
19	2047	2047 (0.0)
20	-35896	-35896 (0.0)
最小化回数 ²⁾		6

1) 荷重増分法に対する相対誤差 (%)

2) 解を得るために要した勾配射影法によるコンプリメンタリーエネルギーの最小化回数

表-2 39 部材ワーレントラスにおいて、図-2 に示す非線形材料を考慮した複合非線形解析により得られた変位の比較

解 法	荷重増分法	エネルギー法
変位成分	変位 (cm)	変位 (cm)
X ₂	7.249	7.249 (0.0) ¹⁾
Y ₂	4.780	4.780 (0.0)
X ₃	-0.315	-0.315 (0.0)
Y ₃	8.879	8.880 (0.011)
X ₄	6.734	6.734 (0.0)
Y ₄	13.452	13.453 (0.007)
X ₅	-0.449	-0.449 (0.0)
Y ₅	17.310	17.311 (0.006)
X ₆	5.994	5.994 (0.0)
Y ₆	21.467	21.468 (0.005)
X ₇	0.079	0.079 (0.0)
Y ₇	24.702	24.712 (0.04)
X ₈	4.725	4.725 (0.0)
Y ₈	27.604	27.605 (0.004)
X ₉	1.182	1.182 (0.0)
Y ₉	29.580	29.581 (0.003)
X ₁₀	3.368	3.368 (0.0)
Y ₁₀	30.919	30.921 (0.007)
X ₁₁	2.607	2.607 (0.0)
Y ₁₁	31.378	31.379 (0.003)

1) 荷重増分法に対する相対誤差 (%)

よび各可動節点変位に関する制約条件 g_{σ}, g_{δ} のもとで、トラス構造物の全重量 W を最小化する最適設計問題を考える。すなわち、

find A which

$$\min. \quad W(A, \delta) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i(\delta) \quad (12)$$

$$\text{sub. to} \quad g_{\sigma k}(A, \delta) = |\sigma_k(A, \delta)| - \sigma_{\sigma k} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (13)$$

$$g_{\delta l}(A) = |\delta_l(A)| - \delta_{\delta l} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \quad (14)$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i=1, \dots, n)$$

ここに、 ρ_i は部材 i の単位体積当りの重量である。また、 $g_{\sigma k}, g_{\delta l}$ はそれぞれ部材 k の応力度および可動節点変位成分 l の変位に関する制約条件、 $\sigma_{\sigma k}, \delta_{\delta l}$ はそれぞれ部材 k の許容応力度および可動節点成分 l の許容変位である。 A_i の肩文字 L および U はそれぞれ A_i の下限値および上限値を示す。

実際の設計においては、応力度の制約条件として、座屈をも考慮した許容応力度を用いる必要があるが、本論文においては、提案した最適設計法の方法論的研究を行い、その方法の有効性および信頼性について検証を行うこと、および本研究の方法により、実

際の構造物の計画段階において最も基本的となる部材配置をも決定することを主たる目的としているため、座屈を考慮せず許容圧縮応力度および許容引張応力度を同一の値とし、最小断面積を 1.0cm²程度の小さい値に設定することにより、最適化の観点から不必要となる部材群を決定できるようにしている。なお、実際の設計において使用することが可能な諸元を決定するためには、まず、上で得られた理論的に厳密な最適設計諸元を参考とし、不安定構造物としないための構造上必要となる部材に注意し、製作・施工・美観などを総合的に考慮して最終的な部材配置を決定する。つづいて、上で得られた断面積を初期値として、座屈をも考慮した許容応力度を用いて再度最適化を行うことにより、実際の設計に供しうる最適な設計諸元を決定することができる。

4.2 複合非線形解析の解析上満足すべき必要条件の導入

本研究で提案する最適設計法は、式(10),(11)で表されるトラス構造物の複合非線形解析問題の解が満足すべき必要条件式を満足させつつ設計変数の改良を行う方法となるため、ここでは、複合非線形解析問題の解析上満足すべき必要条件を誘導する。

まず、式(10)、(11)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\delta, \lambda)$ を導入する。

$$L(\delta, \lambda) = \Pi_{Cs}(\delta) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{Fj}(\delta) \quad (15)$$

式(15)のラグランジュ関数 $L(\delta, \lambda)$ の極値が満足すべき必要条件是、 $L(\delta, \lambda)$ の δ および λ に関する停留条件より、次式のように誘導することができる。

$$\frac{\partial L(\delta, \lambda)}{\partial \delta_k} = \frac{\partial \Pi_{Cs}(\delta)}{\partial \delta_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_{Fj}(\delta)}{\partial \delta_k} = 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (16)$$

$$\frac{\partial L(\delta, \lambda)}{\partial \lambda_j} = g_{Fj}(\delta) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (17)$$

式(16)の右辺第一項の $\partial \Pi_{Cs}(\delta) / \partial \delta_k$ の値は次式より計算することができる。

$$\frac{\partial \Pi_{Cs}}{\partial \delta_k} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \beta_i(\sigma_i)}{\partial \delta_k} \cdot A_i l_i + \beta_i A_i \cdot \frac{\partial l_i(\delta^0)}{\partial \delta_k} \right) \quad (18)$$

式(18)の $\partial \beta_i(\sigma_i) / \partial \delta_k$ は次式となる。

$$\frac{\partial \beta_i(\sigma_i)}{\partial \delta_k} = \frac{\partial \beta_i}{\partial N_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \delta_k} \quad (19)$$

ところで、式(19)の $\partial \beta_i / \partial N_i$ は次式より計算するこ

とができる。

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial N_i} = \frac{\Delta \beta_i}{\Delta N_i} = \frac{\varepsilon_i(\delta^0) \Delta \sigma_i}{\Delta N_i} = \frac{\varepsilon_i(\delta^0) \Delta N_i}{\Delta N_i \cdot A_i} = \frac{\varepsilon_i(\delta^0)}{A_i} \quad (20)$$

また、式(19)の $\partial N_i / \partial \delta_k$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \delta_k} &= A_i \cdot \frac{\partial \sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial \delta_k} = A_i \cdot \frac{\partial \sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \delta_k} \\ &= \frac{A_i}{l_i^0} \cdot \frac{\partial \sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial l_i(\delta^0)}{\partial \delta_k} \end{aligned} \quad (21)$$

式(20)および式(21)を式(19)に代入することにより $\partial \beta_i(\sigma_i) / \partial \delta_k$ は次式となる。

$$\frac{\partial \beta_i(\sigma_i)}{\partial \delta_k} = \frac{\varepsilon_i(\delta^0)}{l_i^0} \cdot \frac{\partial \sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial l_i(\delta^0)}{\partial \delta_k} \quad (22)$$

式(22)を式(18)に代入することにより、 $\partial \Pi_{Cs} / \partial \delta_k$ は次式により与えられる。

$$\frac{\partial \Pi_{Cs}}{\partial \delta_k} = \sum_{i=1}^n \left(D_{ik} \varepsilon_i(\delta^0) A_i l_i(\delta^0) + \beta_i A_i \cdot \frac{\partial l_i(\delta^0)}{\partial \delta_k} \right) \quad (23)$$

ここに、

$$D_{ik} = \frac{1}{l_i^0} \cdot \frac{\partial \sigma_i(\varepsilon_i^0)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial l_i(\delta^0)}{\partial \delta_k}$$

$\partial \sigma_i / \partial \varepsilon_i$ の計算は、応力度-ひずみ関係式の接線勾配として解析的に行っている。

つぎに、式(16)の右辺第二項の $\partial g_{Fj}(\delta) / \partial \delta_k$ は次式として与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{Fj}(\delta)}{\partial \delta_k} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} N_i(\delta^0) + C_{ji}(\delta^0) \frac{\partial N_i}{\partial \delta_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} \sigma_i(\delta^0) A_i + C_{ji}(\delta^0) D_{ik} A_i \right) \end{aligned} \quad (24)$$

以上、式(18)～(24)の展開により、式(16)の $\partial L(\delta, \lambda) / \partial \delta_k$ の計算は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\delta, \lambda)}{\partial \delta_k} &= \sum_{i=1}^n \left(D_{ik} \varepsilon_i(\delta^0) A_i l_i(\delta^0) + \beta_i(\delta^0) A_i \frac{\partial l_i}{\partial \delta_k} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} \sigma_i(\delta^0) A_i + C_{ji}(\delta^0) D_{ik} A_i \right) = 0 \end{aligned} \quad (k=1, \dots, m) \quad (25)$$

式(25)において、 $\partial C_{ji} / \partial \delta_k$ 、 $\partial l_i(\delta^0) / \partial \delta_k$ の計算は、各変位成分を微小に変化させ、形状が変化したことによる回転マトリックスおよび部材長の変化量を計算し、差分法により行っている。

また、式(17)の必要条件式は式(11)より次式となる。

$$\frac{\partial L(\delta, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta) \sigma_i(\delta) A_i + P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (26)$$

4.3 最適設計問題の再定式化

本研究では、4.2 で誘導した解析上の必要条件式(25)および式(26)を原最適設計問題に等号制約条件として付加する。さらに、断面積 A に加えて、可動節点変位 δ およびラグランジュ乗数 λ をも独立変数として考慮することにより、解析上の必要条件を満足させつつ設計変数の改良を行っている。したがって、 A, δ, λ を設計変数として考慮したトラス構造物の最小重量設計問題を次式のように再定式化することができる。

find A, δ, λ , which

$$\min. \quad W(A, \delta) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i(\delta) \quad (27)$$

sub. to $g_{ck}(A, \delta, \lambda)$

$$= \sum_{i=1}^n \left(D_{ik} \varepsilon_i(\delta) A_i l_i(\delta^0) + \beta_i(\delta^0) A_i \frac{\partial l_i}{\partial \delta_k} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} \sigma_i(\delta^0) A_i + C_{ji}(\delta^0) A_i D_{ik} \right) = 0 \quad (k=1, \dots, m) \quad (28)$$

$$g_{ej}(A, \delta) = \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta) \sigma_i(\delta) A_i + P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (29)$$

$$g_{\sigma i}(A, \delta) = |\sigma_i(A, \delta)| - \sigma_{ai} \leq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (30)$$

$$g_{\delta l}(\delta) = |\delta_l| - \delta_{al} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \quad (31)$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i=1, \dots, n)$$

ここで、ラグランジュ乗数 λ は、材料非線形を考慮した最適化においては変位の値を示していたが、幾何学的非線形をも考慮した場合には、変位の値とは異なり最適化過程において式(28)の等号条件を満足させるために必要なパラメータとなっている。

4.4 最適化アルゴリズム

上で再定式化した最適設計問題においては、目的関数 W 、制約条件 $g_{\sigma k}$ および $g_{\delta l}$ は設計変数 A, δ, λ の陽な関数となっており、かつ目的関数および制約条件の A, δ, λ に関する感度係数が容易に計算できることより、本研究では、式(27)~(31)の最適設計問題の線形近似最適設計問題を導入してい

る。

式(27)~(31)の最適設計問題における $W(A, \delta)$ を A および δ 、 $g_{ck}(A, \delta, \lambda)$ を A, δ および λ 、 $g_{ej}(A, \delta)$ を A および δ 、 $g_{\sigma i}(A, \delta)$ を A および δ 、 $g_{\delta l}(\delta)$ を δ に関してそれぞれテーラー展開し、 A, δ, λ に関する一次の偏微分係数の項までを考慮して線形近似することにより、 $\Delta A, \Delta \delta, \Delta \lambda$ を設計変数とする次の線形近似最適設計問題を導入することができる。

Find $\Delta A, \Delta \delta, \Delta \lambda$, which

min.

$$\Delta W(\Delta A, \Delta \delta) = \sum_{i=1}^n \left(\rho_i l_i(\delta^0) \Delta A_i + \rho_i A_i \sum_{k=1}^m \frac{\partial l_i}{\partial \delta_k} \Delta \delta_k \right) \quad (32)$$

sub. to

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ck}(\Delta A, \Delta \delta, \Delta \lambda) &= g_{ck}(A^0, \delta^0, \lambda^0) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ D_{ik} \varepsilon_i(\delta^0) l_i(\delta^0) + \beta_i(\delta^0) \frac{\partial l_i}{\partial \delta_k} \right. \\ &+ \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} \sigma_i(\delta^0) + C_{ji}(\delta^0) D_{ik} \right) \Big\} \Delta A_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m D_{ik} A_i^0 l_i(\delta^0) \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \delta_k} \right) \Delta \delta_k \\ &+ \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} \sigma_i(\delta^0) A_i^0 + C_{ji}(\delta^0) A_i^0 D_{ik} \right) \right\} \Delta \lambda_j = 0 \end{aligned} \quad (k=1, \dots, m) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ej}(\Delta A, \Delta \delta) &= g_{ej}(A^0, \delta^0) + \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta^0) \sigma_i(\delta^0) \Delta A_i \\ &+ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial C_{ji}}{\partial \delta_k} \sigma_i(\delta^0) A_i^0 + \sum_{i=1}^n C_{ji}(\delta^0) A_i^0 \frac{\partial \sigma_i}{\partial \delta_k} \right) \Delta \delta_k = 0 \end{aligned} \quad (j=1, \dots, m) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\sigma i}(\Delta A, \Delta \delta) &= g_{\sigma i}(A^0, \delta^0) + \frac{\partial |\sigma_i|}{\partial A_i} \Delta A_i + \sum_{k=1}^m \frac{\partial |\sigma_i|}{\partial \delta_k} \Delta \delta_k \\ &= g_{\sigma i}(A^0, \delta^0) - \frac{|N_i(A^0, \delta^0)|}{(A_i^0)^2} \Delta A_i + \sum_{k=1}^m |D_{ik}| \Delta \delta_k \leq 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) \quad (35)$$

$$\bar{g}_{\delta l}(\Delta \delta) = g_{\delta l}^0 + \Delta \delta_l \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \quad (36)$$

$$|\Delta A_i| \leq \xi A_i^0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (37)$$

ここに、 ξ は ΔA_i の改良幅を決定する move limit であり、本研究では 0.45~0.90 を用いている。 $\Delta A, \Delta \delta, \Delta \lambda$ の前に掛かる係数の計算は 4.2 で解析式として与えられており、複雑かつ多大な計算量を必要とする複合非線形状態の挙動の感度係数の計算を行

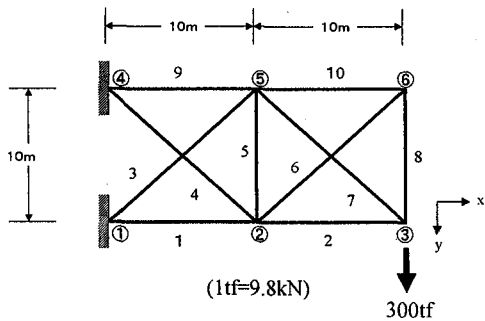


図-3 10部材片持ちトラス

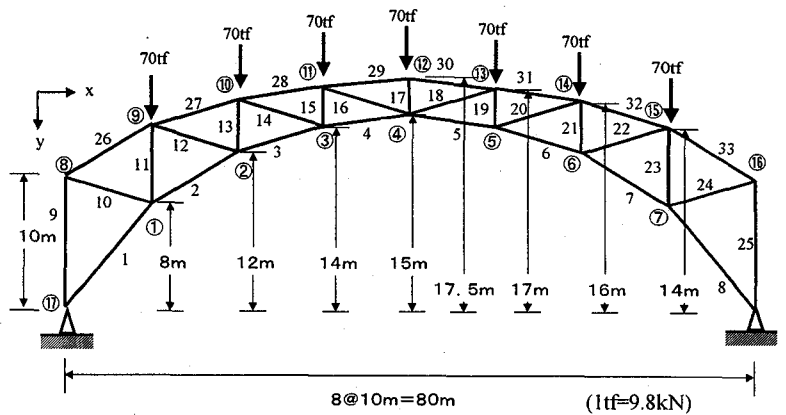


図-4 33部材アーチトラス

う必要はない。

上で展開した線形近似最適設計問題を解く方法として種々の方法が考えられるが、本研究では、アクティブとなる制約条件群のみに着目して効率的に設計変数の改良を行うことができる勾配射影法を用いて線形近似最適設計問題を解き $\Delta A, \Delta \delta, \Delta \lambda$ を求めている。勾配射影法を用いた最適化アルゴリズムの詳細は文献7)を参照していただきたい。

上で求めた $\Delta A, \Delta \delta, \Delta \lambda$ を用いて設計変数 A, δ, λ を次式により改良する。

$$[A'^T, \delta'^T, \lambda'^T]^T = [A^{0T}, \delta^{0T}, \lambda^{0T}]^T + [\Delta A^T, \Delta \delta^T, \Delta \lambda^T]^T \quad (38)$$

上記により改良された A' を用い、 δ' を初期値として2.で述べた方法により複合非線形解析を行い、正確な変位 δ および軸力 N を求める。この δ および N 、式(38)により改良された A' および λ' を初期値 $\delta^0, N^0, A^0, \lambda^0$ として再び式(32)~(37)の線形近似最適設計問題を導入し、勾配射影法を用いて設計変数を改良する過程を全重量 W および δ, N, A, λ が一定値に収束するまで繰り返すことにより最適解 W_{opt} および $A_{opt}, \delta_{opt}, N_{opt}$ を決定することができる。

5. 設計例

4.で述べた最適設計法の信頼性および有効性について検討を行うため、図-3に示す10部材片持ちトラスおよび図-4に示す33部材アーチトラスについて、すべての部材の材料を図-5(a)に示す線形材料あるいは図-5(b)に示す非線形材料とし、変形状態における力の釣合条件および変位の適合条件を考慮することにより幾何学的非線形を考慮した場合および考慮しない場合のそれぞれの場合について最適化を行い、得られた最適解について比較検討を行った。設計例において、トラスの各部材の単位体積当りの重量 ρ を 7.85 gf/cm^3 (0.077 N/cm^3) と仮定し、各

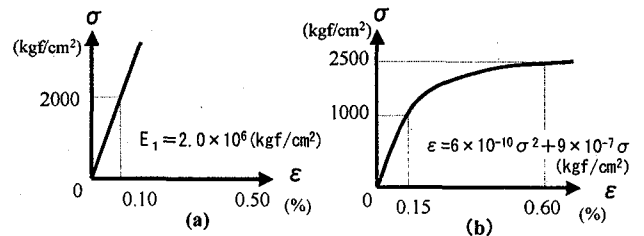


図-5 線形材料(a)および非線形材料(b)

部材の断面積の下限値を 1.0 cm^2 、初期断面積を10部材片持ちトラスでは 100.0 cm^2 、33部材アーチトラスでは 200.0 cm^2 に設定した。

5.1 10部材片持ちトラスの最適設計例

図-3に示す10部材片持ちトラスの設計例において、各部材の許容応力度 σ_a は 2500 kgf/cm^2 (245.0 N/mm^2) としている。許容変位を $\delta_a = 100.0 \text{ cm}$ 、材料を図-5(a)に示す線形材料とし、幾何学的非線形を考慮した場合および完全に線形状態とした場合の最適解の比較結果を、また、 $\delta_a = 47.0 \text{ cm}$ 、材料を図-5(b)に示す非線形材料とし、複合非線形状態の場合および材料非線形のみを考慮した場合の最適解の比較結果をそれぞれ表-3に示す。なお、幾何学的非線形を考慮しない場合の最適化は文献6)で述べた方法により行っている。

$\delta_a = 100.0 \text{ cm}$ の場合において、幾何学的非線形を考慮した場合には、27回の反復改良により最適解が得られた。表-3より明らかなごとく、最適解において、部材4,5,6,8,10の断面積は最小断面積の 1.0 cm^2 となっている。その他の部材の断面積は $119.0 \sim 239.3 \text{ cm}^2$ と大きな断面積を有しており、それらの部材の応力度の絶対値は約 2500 kgf/cm^2 (245.0 N/mm^2) と許容応力度とほぼ等しく、応力度の制約条件がアクティブとなっている。一方、線形の状態では、10回の反復改良により最適解が得られている。幾何学

表-3 10 部材片持ちトラスにおいて幾何学的非線形を考慮した場合および考慮しない場合の最適解の比較

許容変位	$\delta_a = 100.0\text{cm}$				$\delta_a = 47.0\text{cm}$			
材料	線形材料 (a)		線形材料 (a)		非線形材料 (b)		非線形材料 (b)	
幾何学的 非線形	考慮		考慮しない		考慮		考慮しない	
部材番号	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)
1	120.3	-2498	121.0	-2493	116.7	-2495	121.5	-2484
2	119.0	-2498	119.1	-2507	115.8	-2495	119.0	-2506
3	168.6	-2500	169.0	-2496	170.9	-2494	169.3	-2491
4	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
5	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
6	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
7	169.1	2496	169.0	2497	172.8	2422	176.3	2393
8	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
9	239.3	2500	239.0	2503	241.1	2461	239.1	2502
10	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
W (kgf)	7551.1		7558.2		7580.2		7648.3	
$\delta_{\max}$ (cm)	10.00		10.00		47.06		47.08	
ITE ¹⁾	27		10		26		10	
move limit ²⁾	$\xi = 0.65$		$\xi = 0.65$		$\xi = 0.90$		$\xi = 0.65$	
Active な 制約条件	応力度		応力度		応力度, 変位		応力度, 変位	

1) 最適解を得るために要した繰り返し回数
(1kgf=9.8N, 1kgf/cm²=9.8x10⁻²N/mm²)

2) ξ :断面積の改良幅を規定する move limit

的非線形を考慮した場合および考慮しない場合の最適解における最大変位はどちらも 10.0cm となっており、幾何学的非線形性の影響が小さく、どちらの場合もほぼ同様の最適断面積の分布および目的関数の値となっている。

$\delta_a = 47.0\text{cm}$ の場合において、複合非線形状態における最適解は 26 回の反復改良により得られている。最適解における断面積の分布は、材料を線形とした場合と同様に部材 4,5,6,8,10 の断面積は最小断面積の 1.0cm² となり、その他の部材の断面積は 115.8 cm² ~ 241.1 cm² と大きな断面積を有している。部材 1,2,3 の部材の応力度の絶対値はほぼ許容応力度と等しく、最大変位は許容変位とほぼ等しい 47.06cm となっており、応力度および変位の制約条件が同時にアクティブな制約条件となっている。一方、材料の非線形性のみを考慮した場合には、最適解は 10 回の反復改良により得られ、この場合も応力度および変位の制約条件が同時にアクティブな制約条件となっている。目的関数の値の比較では、複合非線形を考慮した場合の重量は 7580.2kgf (74.286kN)に対して材料非線形のみを考慮した場合には 7648.3kgf (74.953kN)と、幾何学的非線形を考慮することにより、考慮しない場合の 0.89%減少している。

5.2 33 部材アーチトラスの最適設計例

図-4 に示す 33 部材アーチトラスにおいて、許容変位を $\delta_a = 40.0\text{cm}$ 、材料を図-5(a) に示す線形材料とし、幾何学的非線形を考慮した場合および完全に線形状態とした場合の最適解の比較結果を、また、 $\delta_a = 60.0\text{cm}$ 、材料を図-5(b) に示す非線形材料とし、複合非線形状態の場合および材料非線形のみを考慮した場合の最適解の比較結果をそれぞれ表-4 に示す。各部材の許容応力度 σ_a は 2000kgf/cm² (196.0N/mm²) としている。なお、この設計例においては、構造系が左右対称となることより、設計変数として考慮すべき断面積の数を半分に減少させることができるが、本研究では、本最適設計法の信頼性を検討することを主たる目的としているため、設計変数としてすべての部材の断面積を考慮し、得られた結果が左右対称となっていることを確認している。

$\delta_a = 40.0\text{cm}$ とし幾何学的非線形を考慮した場合には、表-4 より明らかなごとく 23 回の反復改良により最適解が得られた。最適解において、27 部材を除くすべての部材の応力度の絶対値はほぼ許容応力度と等しくなっており、応力度の制約条件がアクティブとなっている。一方、完全に線形の状態においては、13 回の反復改良により最適解が得られており、幾何学的非線形を考慮した場合と同様に応力度の制

表-4 33 部材アーチトラスにおいて幾何学的非線形を考慮した場合および考慮しない場合の最適解の比較

許容変位	$\delta_a = 40.0\text{cm}$				$\delta_a = 60.0\text{cm}$			
材料	線形材料(a)		線形材料(a)		非線形材料(b)		非線形材料(b)	
幾何学的 非線形	考慮		考慮しない		考慮		考慮しない	
部材番号	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)	断面積 (cm^2)	応力度 (kgf/cm^2)
1	64.2	-1998	63.6	-2005	63.1	-1901	63.2	-2000
2	63.0	-1998	62.1	-2006	63.3	-1712	61.9	-1981
3	50.3	-1998	50.3	-1991	44.5	-1536	48.9	-1983
4	31.1	-2002	32.2	-2005	8.0	-1996	30.1	-1990
9	5.2	2000	4.9	1989	5.3	937	5.6	1597
10	8.8	-2000	8.2	-1991	8.8	-955	9.4	-1639
11	15.5	-1998	15.1	-1995	17.9	-1988	15.3	-1991
12	9.5	1998	8.9	1994	17.6	1987	10.7	1793
13	15.4	-1998	15.0	-2001	18.4	-1796	15.3	-1974
14	18.7	1998	17.3	2006	38.9	1357	26.9	1344
15	10.4	-1999	10.1	-1991	15.4	-1433	12.9	-1557
16	5.6	1998	3.7	1999	29.5	801	13.9	609
17	8.0	-1999	7.9	-2001	13.8	-910	13.2	-1159
26	9.3	2000	8.6	2005	9.4	939	9.9	1641
27	1.0	—	1.0	—	13.5	-1986	1.0	—
28	19.2	-1999	17.8	-1996	43.6	-1793	28.0	-1404
29	24.6	-1998	21.3	-2005	80.4	-1258	45.7	-1039
W (kgf)	5582.7		5406.2		7479.5		6304.7	
$\delta_{\max}$ (cm)	24.18		24.02		59.96		60.12	
ITE ¹⁾	23		13		32		32	
move limit ²⁾	$\xi = 0.50$		$\xi = 0.50$		$\xi = 0.50$		$\xi = 0.50$	
Active な 制約条件	応力度		応力度		応力度, 変位		応力度, 変位	

1) 最適解を得るために要した繰り返し回数
($1\text{kgf/cm}^2=9.8\times 10^{-2}\text{N/mm}^2$, $1\text{kgf}=9.8\text{N}$)

2) ξ :断面積の改良幅を規定する move limit

約条件がアクティブとなっている。この最適設計問題においては、幾何学的非線形を考慮した場合および完全に線形とした場合の最大変位がともに約 24.0cm と支間長に対して 1/333 程度の小さい値となっている。このためアーチ効果による幾何学的非線形性の影響が比較的小さく、どちらの場合もほぼ同様の最適断面積の分布となっており、幾何学的非線形を考慮した場合の目的関数の値は 5582.7kgf (54.710kN)、考慮しない場合には 5406.2kgf (52.981 kN)となっている。

$\delta_a=60.0\text{cm}$ とした場合には、幾何学的非線形を考慮した場合および考慮しない場合ともに 32 回の反復改良により最適解が得られており、最適解において応力度および変位の制約条件が同時にアクティブとなっている。この設計問題においては、最大変位が支間長の 1/133 程度と比較的大きな値となっており、アーチ効果により、幾何学的非線形を考慮しない場合の斜材の 12,14,16 部材および上弦材の 28,29

部材の最適断面積は、幾何学的非線形を考慮した場合の 47.1%~69.2%の小さい値を示しており過小評価となっている。また、幾何学的非線形を考慮しない場合の 27 部材の断面積は最小断面積となっている。その他の部材はほぼ等しい断面積の分布となっていることより、幾何学的非線形を考慮しない場合の目的関数の値は 6304.7kgf(61.786kN)と考慮した場合の 15.7%小さい値を示している。

以上の検討結果より、本最適設計法により、材料および幾何学的非線形を考慮したトラス構造物の最適設計を 23~32 回程度の反復改良回数により効率的かつ正確に行うことができることが明らかとなった。

6. 結 論

本研究で得られた主な結論は以下の通りである。

1) 本研究で提案したコンプリメンタリーエネルギー

一最小化の方法により，トラス構造物の複合非線形解析を正確に行うことができ，さらに複合非線形を考慮したトラス構造物の最適設計法へと容易に拡張を行うことができることが明らかとなった。

- 2) 本解析法では，部材のひずみと変位の関係式を用いることにより，軸力を変位の関数として表現することが可能となり，未知変数を変位のみを集約することができる。したがって，複合非線形解析問題を，変形後の力の釣合条件式のみを制約条件として考慮し，コンプリメンタリーエネルギーを最小化する変位を決定する問題として定式化すること可能となり，材料非線形解析と同程度の計算量により効率的に解析を行うことができることが明らかとなった。
- 3) 複合非線形解析問題のラグランジュ関数の停留条件より導入される解析問題の必要条件式，および可動節点変位およびラグランジュ乗数を制約条件および設計変数として考慮することにより，複合非線形トラス構造物の最適設計を行うことができることが明らかとなった。
- 4) 本最適設計法の最適化過程において，制約条件の設計変数に関する感度係数の計算はすべて解析式により容易に行うことができ，複雑かつ多大な計算量を必要とする複合非線形状態の挙動の感度係数の計算を行う必要はない。このことは本最適設計法の計算上の大きな利点である。
- 5) 本論文の設計例で述べたごとく，本最適設計法は 23～32 回程度の反復改良回数により最適解を決定することができ，材料非線形を考慮した最適設計と同程度の計算量で複合非線形トラス構造物の最適設計を効率的にかつ正確に行うことができることが明らかとなった。

参考文献

- 1) (社)日本道路協会：道路橋示方書・同解説，V 耐震設計編，1996.12
- 2) 大久保禎二・和多田康男：エネルギー原理およびSQPによるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究，土木学会論文集，第 374 号/I-6，pp.427～436，1986.10.
- 3) Ohkubo,S., Watada,Y. and Fujiwaki,T. : Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, Computers & Structures Vol.27, No.1, pp.129～145, 1987
- 4) 大久保禎二・和多田康夫・西村一隆：変動荷重を受けるトラス構造物のエネルギー原理に基づく弾塑性履歴挙動の解析法に関する研究，土木

学会論文集，第 519 号/I-32，pp.57～66，1995

- 5) Ohkubo,S. and Makino,K. : Nonlinear Stress and Displacement Analysis of Rigid Plane Frames by Total Complementary Energy Minimization, Computers & Structures, Vol.44, No.1/2, pp.193～206, 1992
- 6) 大久保禎二，和多田康男，大森久義：エネルギー原理に基づく材料非線形トラス構造物の挙動の感度係数を用いない最適設計法に関する研究，土木学会論文集，No.507/I-30, pp.77-87, 1995
- 7) 谷脇一弘・大久保禎二：エネルギー原理に基づく箱形断面を有する非線形剛節骨組構造物の最適設計法，土木学会論文集，第 668 号/I-54, pp.65～81, 2001
- 8) 谷脇一弘・大久保禎二・松友啓志・風川喜彦：エネルギー原理に基づく材料非線形トラス構造物の構造形状および断面寸法を設計変数とした最適設計法，応用力学論文集，Vol.5, pp.121～131, 2002
- 9) Libove, C.: Complementary Energy Method for Finite Deformations, J. Engineering Mechanics, Division, ASCE, EM6, pp.49～71, 1964
- 10) Oran, C.: Complementary Energy Concept for Large Deformations, J. Structural Division, ASCE, ST1, pp.471～494, 1967
- 11) 大地羊三：構造解析とコンピュータ，pp.239～249, 1971
- 12) 堀井健一郎・斎藤進・川原睦人・森繁：骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，第 191 号，pp.15～30, 1971
- 13) 前田幸雄・林正・中村守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，第 223 号，pp.1～9, 1974
- 14) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗：接戦剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，第 238 号，pp.31～41, 1975
- 15) 前田幸雄・林正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，第 253 号，pp.13～27, 1976
- 16) 吉田裕・増田陳紀・森本剛・広沢規行：立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法，土木学会論文報告集，第 300 号，pp.21～31, 1980
- 17) 後藤芳顕・長谷川彰夫・西野文雄：平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察，土木学会論文報告集，第 331 号，pp.33～44, 1983
- 18) 吉澤孝和：トラス構造物の複合非線形解析と 런던による静的応答制御に関する基礎的研究，名古屋大学学位論文，1980

(2002年9月13日受付)