

写像平面上におけるエレメントフリー解析と弾性問題への適用

Element free analysis on mapped plane and its application to elastic problems

大上俊之*, 豊島栄次**, 小山茂***

Toshiyuki OHKAMI, Eiji TOYOSHIMA, Shigeru KOYAMA

*工博, 信州大学助教授, 工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里4-17-1)

**信州大学大学院生, 社会開発工学専攻 (〒380-8553 長野市若里4-17-1)

***博 (工), 信州大学助手, 工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里4-17-1)

This paper presents a element free method with mapping and its application to the analysis of elastic problems. The region defined in physical domain is mapped into computational domain of rectangular grid, and the stiffness matrix for the element free method is also transformed and calculated numerically in the mapped computational domain. The essential boundary conditions can be directly evaluated and boundary value problems with curvilinear boundary shape can be easily treated by calculating in the mapped domain. Numerical examples are shown and the calculated results by the proposed method are examined by comparing with exact solutions or those by the conventional FEM.

Key Words : element free method, mapping, elastic problem, boundary condition
 キーワード : エレメントフリー法, 写像変換, 弾性問題, 境界条件

1. はじめに

偏微分方程式の近似解法として有限要素法 (FEM) が広く用いられているが, 近年, 要素分割を必要としないメッシュレス法に関する研究が工学のさまざまな分野で盛んに行われている¹⁾. メッシュレス法の中で広く用いられている手法の一つに Belytschko ら²⁾によって提案されたエレメントフリーガラキン法 (Element Free Galerkin Method; EFGM) がある. EFGM は Galerkin 法により弱形式で表示された連続体の支配方程式を節点群のみで離散化し, 物理量の関数近似に移動最小二乗法 (Moving Least Square Method; MLSM) を用いることによりメッシュレス化を可能としている手法である. 有限要素法で用いられる内挿近似が節点を介してその微分値が不連続であるのに対して, EFGM による近似はどの区間も連続で得ることができるという特徴を有している.

しかしながら, EFGM では MLSM による近似曲線が必ずしも節点を通らないため, 節点位置における近似関数の値が節点値に一致せず, そのために基本境界条件を満足させる処理が必要となる. 基本境界条件の処理方法としてこれまでに Lagrange 乗数を用いる方法^{2),3)}, ペナルティー関数を用いる方法^{4),5)}, FEM とのハイブリッド解析⁶⁾, 変数変換による方法⁷⁾などが提

案されている. また, Suetake は近似関数に Lagrange 多項式を適用して重み関数を必要としないエレメントフリー法を提案している⁸⁾⁻¹⁰⁾. Lagrange 多項式に基づく方法では基本境界条件を直接的に評価できる利点を有しているが, 節点を矩形格子状に配置する必要があり, 曲線境界を有する形状の問題にはそのまま適用することは困難であると考えられる. 一方, Liu ら¹¹⁾は, 影響領域内における節点数と同じ次数の多項式の近似関数 (内挿関数) を用いることによって, 重み関数を使用しないで基本境界条件を評価する方法 (Point Interpolation Method; PIM) を提案している. PIM では, 節点を必ずしも格子状に配置する必要がないためより一般的である.

EFGM では, 剛性マトリックス作成のための領域積分は, 解析対象の領域とは無関係にバックグラウンドセルを規則的に設定し, セルごとに行われるが, バックグラウンドセルは格子状に設定されるために領域の形状が必ずしもバックグラウンドセルを足し合わせたものと一致するとは限らない (図-1). そのために曲線境界を有するような複雑な形状に対して解析結果の精度を向上させるには, 積分に際して境界近傍においてセルの分割を細かくする, 積分点を多く設定する, さらに, 積分点が領域内に存在するか否かを判定して領域外であれば積分点における重みをゼロに設定する, な

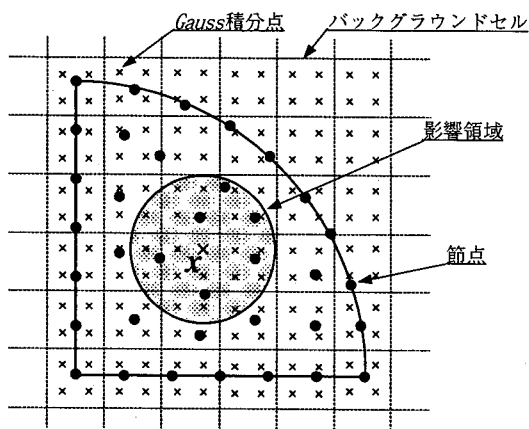


図-1 EFGMのバックグラウンドセルと影響領域

どの工夫が必要となる。

一方、解析空間の離散化手法・要素生成法として格子形成法が数値流体力学分野で広く用いられている^{12),13)}。格子形成法では、実平面における解析対象の形状を写像変換することによって、写像平面上において等間隔に規則的に配置された直交矩形格子を形成する。

本研究はこの特徴に着目し、格子形成法を導入したエレメントフリー法を提案するもので、実平面における形状を写像変換するとともに写像平面上において剛性マトリックスの作成を行うものである。したがって、曲線境界を有する形状の問題に対しても写像平面上では解析対象の領域をバックグラウンドセルと一致させることができるので、領域積分に対する特別な工夫を必要としない。また、MLSMを用いた関数近似とは異なり、本手法では写像平面上において重み関数を必要としない近似関数（内挿関数）を用いている。したがって近似関数が必ず節点を通り、関数値がそのまま節点の未知量となるので、基本境界条件を通常のFEMと同様に直接評価できるという利点がある。さらに、本手法ではTransfinite補間法^{13),14)}を適用することによって、境界線の節点座標値を入力するだけで領域内部の節点が格子状に自動的に作成されるので、エレメントフリー法の利点であるデータ作成の軽減化をさらに向上させることができる。

なお、Noguchiら¹⁵⁾はEFGMに写像の考えを用いたエレメントフリー法を提案し、シェルおよび膜構造の解析を行っているが、内挿関数と写像変換の考えを同時に用いた研究は今のところ見あたらないと思われる。

数値計算例として厳密解が既知な2次元弾性問題について、本手法による解析結果と厳密解、FEMによる結果との比較を行い、本手法の適用性について検討を行う。また、関数近似（内挿関数）にLagrange多項式を用いる方法と有限フーリエ級数を用いる方法¹⁶⁾⁻¹⁸⁾によって解析を行い、両手法の比較検討を行う。

2. 写像変換を用いたエレメントフリー法

2.1 写像変換と内挿関数

パラメータ t によって決まる関数を $u(t)$ 、内挿関数を $\psi_i(t)$ とすると、 $i = 0 \sim n$ の $n+1$ 個の u_i を通る近似関数 $u^h(t)$ は

$$u^h(t) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) u_i \quad (1)$$

と表すことができる。

2次元の場合は、図-2に示すように領域の境界に沿ってパラメータ t_1, t_2 を導入すれば、写像変換することによって図-3のように直交格子が得られる。空間内に与えられた $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 個の点をとる平面 (x, y) は t_1, t_2 の関数として次式によって表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) x_{ij} \\ y(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) y_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに $x_{ij} = x(i, j)$, $y_{ij} = y(i, j)$ であり、 t_1, t_2 は、それぞれ、 $0 \leq t_1 \leq n_1$, $0 \leq t_2 \leq n_2$ を満たす実数である。

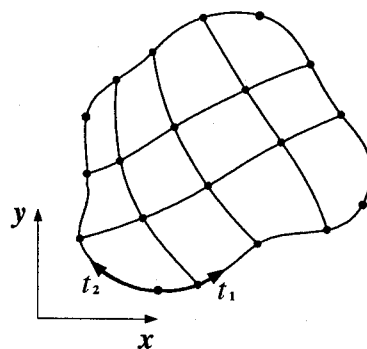


図-2 実平面

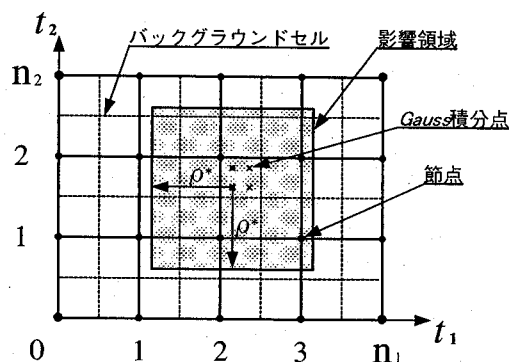


図-3 写像平面

写像平面上では解析対象の全領域とバックグラウンドセルを足し合わせたものを一致させることができるため、剛性マトリックス作成のためのセルの領域積分についても、写像平面上でセルごとに積分し、その全体和を求めるだけでよいことになる。

図-4に示すように写像平面における影響領域として、評価点 (t_1, t_2) を中心とする1辺の長さ $2\rho^*$ の正方形領域を考え、変位 u, v の関数近似に対しても内挿関数 $\psi_i(t)$ を適用すると、写像平面上の影響領域内に含まれる $(m_1+1) \times (m_2+1)$ 個の節点に対して、変位 u, v が

$$\left. \begin{aligned} u(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) u_{ij} \\ v(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) v_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と表現される。

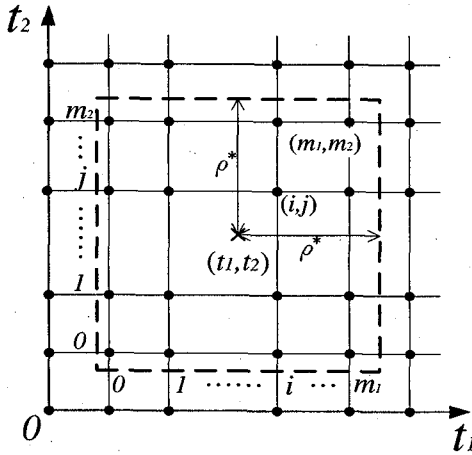


図-4 評価点近傍の影響領域¹⁰⁾

関数値 $u(t_{1i}, t_{2j}), v(t_{1i}, t_{2j})$ が節点の変位値 u_{ij}, v_{ij} そのものを表すことになるので、基本境界条件の処理を通常のFEMと同様の方法で行うことができる。

本研究では内挿関数 $\psi_i(t)$ として次のようなLagrange多項式と節点間ベクトルを有限フーリエ級数で表現する関数¹⁷⁾を適用し、解析結果の精度の比較検討を行った。

(1) Lagrange多項式

$$\left. \begin{aligned} \psi_i(t) &= \prod_{k=0}^N L_{k,i}(t) \\ L_{k,i}(t) &= \begin{cases} 1 & (k=i) \\ \frac{t-t_k}{t_i-t_k} & (k \neq i) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(2) 有限フーリエ近似

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(t) &= 1 - \frac{t}{N} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \cot(\lambda_k/2) \sin(\lambda_k t) \\ \psi_i(t) &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \sin(\lambda_k i) \sin(\lambda_k t) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, N-1) \\ \psi_N(t) &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(t) \\ \lambda_k &= \pi \frac{k}{N} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

なお、式(4)、式(5)は1次元の表記であるが、本研究の2次元の場合、 N はそれぞれ、座標に対しては n_1, n_2 、変位については影響領域内の節点数に関する m_1, m_2 となる。また、

$$\psi_i(t_j) = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=0}^N \psi_i(t) = 1 \quad (6)$$

が成立する。ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

2.2 写像平面上における剛性マトリックスの作成

EFGMによる定式化はFEMの定式化とほぼ同じであり、実平面上のデカルト座標系において弱形式化された弾性問題の剛性マトリックスは、形式的にはEFGMでもFEMと同様に以下のような形で求めることができる。

$$\mathbf{K} = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \quad (7)$$

ここに、 Ω は実平面における領域を示し、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリックス、 $\mathbf{B}$ はひずみ変位マトリックス、 $\mathbf{D}$ は応力ひずみマトリックスである。

式(7)を写像平面 (t_1, t_2) 座標に変換することによって、 $\mathbf{K}$ は以下のように写像平面上におけるバックグラウンドセルごとの積分の和として表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \iint_{\Omega^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \\ &= \sum_{cell} \iint_{\Omega_{cell}^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 Ω^* は写像平面における領域を示し、 $|J_D|$ はヤコビアンである。式(8)の第2式に示すように、領域積分がセルごとの積分の和と一致することが本手法の大きな特徴である。

さらにGaussの数値積分を適用すると

$$\mathbf{K} = \sum_{cell} \sum_{g_{t_1}} \sum_{g_{t_2}} W_{g_{t_1}} W_{g_{t_2}} \left[\mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| \right]_g |J_g| \quad (9)$$

のように表現できる。ここに、添え字の g はGaussの積分点についての寄与であることを意味しており、 W_g は

Gauss 積分点の重み, $|J|_g$ はヤコビアンである。
また, $\mathbf{B}$ が

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

であることから, 式(10)式を変数変換することによって, $\mathbf{B}^*$ は次のように求めることができる。

$$\mathbf{B}^* = \frac{1}{J_D} \begin{bmatrix} y_{t_2} \partial_{t_1} - y_{t_1} \partial_{t_2} & 0 \\ 0 & -x_{t_2} \partial_{t_1} + x_{t_1} \partial_{t_2} \\ -x_{t_2} \partial_{t_1} + x_{t_1} \partial_{t_2} & y_{t_2} \partial_{t_1} - y_{t_1} \partial_{t_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} x_{t_1} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{\partial \psi_i(t_1)}{\partial t_1} \psi_j(t_2) x_{ij} \\ x_{t_2} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \frac{\partial \psi_j(t_2)}{\partial t_2} x_{ij} \\ y_{t_1} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{\partial \psi_i(t_1)}{\partial t_1} \psi_j(t_2) y_{ij} \\ y_{t_2} &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \frac{\partial \psi_j(t_2)}{\partial t_2} y_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\partial_{t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad \partial_{t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (13)$$

であり, 内挿関数の1階微分は, 本研究で用いた Lagrange 多項式, 有限フーリエ近似による場合それぞれ次のようになる。

(1) Lagrange 多項式

$$\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} = \sum_{k=0, \neq i}^N \frac{\prod_{m=0, \neq k}^N L_{m,i}(t)}{t_i - t_k} \quad (14)$$

(2) 有限フーリエ近似

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_0(t)}{\partial t} &= -\frac{1}{N} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \cot(\lambda_k/2) \lambda_k \cos(\lambda_k t) \\ \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \sin(\lambda_k i) \lambda_k \sin(\lambda_k t) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \\ \frac{\partial \psi_N(t)}{\partial t} &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial \psi_k(t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. 数値解析例

3.1 先端に荷重をうける片持ちばり

解析例として, 図-5に示すような先端に集中荷重を受ける片持ちばりを対象とし, 平面応力問題として解

析を行う。材料定数はヤング率 $E = 205.8 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ と仮定し, 総節点数を $11 \times 5 = 55$, 領域積分のためのセルの数を $10 \times 4 = 40$ とし, 影響領域の大きさは $\rho^* = 3$, 数値積分は 3×3 の Gauss 積分を用いた。実平面における本手法の解析モデルを図-6に示す。比較のための FEM 解析では, 本手法の解析モデルと同じ節点配置で要素数がセル数と同数であるモデル, および節点数を 105, 要素数を 80 として細かく要素分割をしたモデルの2つのモデルに対して4節点平面応力要素を用いて計算を行った。FEM の解析モデルを図-7に示す。

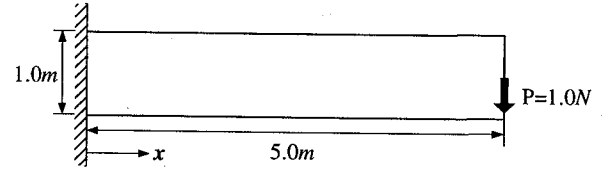


図-5 片持ちばりモデル

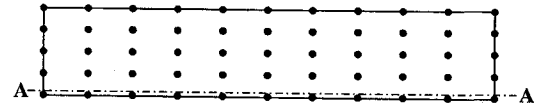
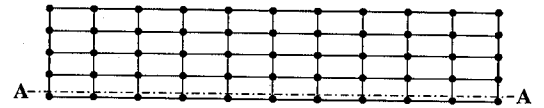
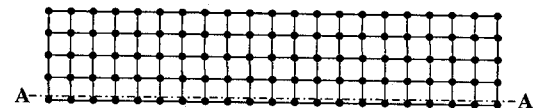


図-6 本手法の節点配置 (実平面)



(a) Coarse mesh division



(b) Fine mesh division

図-7 有限要素分割図

図-8は軸線に沿うたわみについて厳密解¹⁹⁾に対する相対誤差の分布を示したものである。本手法による結果は, 用いた内挿関数の違いにかかわらず Lagrange 多項式, 有限フーリエ級数による結果ともに同じ節点配置の FEM 解, さらに細分割した FEM の結果よりも良い精度の結果が得られている。

図-9は応力の比較図で, はりの下縁に最も近い Gauss 積分点 (図-6, 図-7の A-A 線) における σ_x の誤差分布を示している。荷重載荷点の近傍ではどの手法

とも誤差の増大がみられるが、応力についても本手法による結果が全体にわたってFEMの結果に比べ精度良い解が得られている。

図よりFEMの結果が3点ごとに鋸刃の形状を示していることがわかる。これは、FEMでは要素間境界で内挿近似の微分値が不連続となるためであり、本計算例では、要素ごとに3×3点のGauss積分を用いているためにA-A線上では3点ごとにその影響が表れたものと考えられる。一方、本手法では評価点ごとに内挿近似を行っているので、関数の微分値が不連続となることなく滑らかな結果となっている。

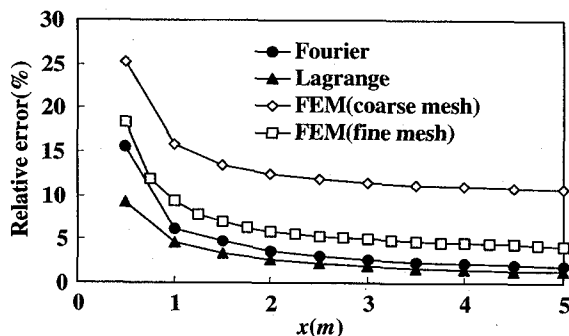


図-8 軸線のたわみ誤差分布

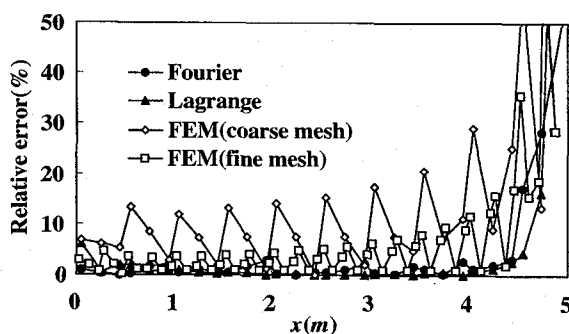


図-9 A-A 線上の σ_x の誤差分布

3.2 一様な圧力を受ける厚肉円筒

次に正解値が既知な曲線境界を有する解析モデルとして、図-10に示すような一様な圧力を受ける厚肉円筒問題を解析する。対称性より1/4部分について考え、モデルの材料定数はヤング率 $E = 205.8GPa$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ と仮定した。実平面における解析モデルの節点の配置を図-11に、比較のためのFEM解析の分割図を図-12に示す。

積分のためのバックグラウンドセルの数はFEMの要素数と同じ72個、数値積分は各要素、各セルについて3×3点積分とした。ここでは、影響領域 $\rho^* = 1 \sim 4$ と

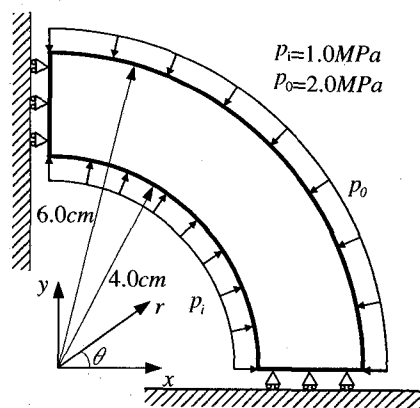


図-10 厚肉円筒モデル

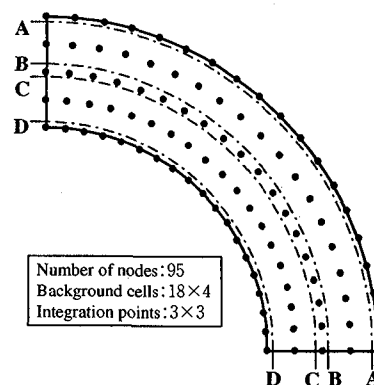


図-11 本手法の節点配置（実平面）

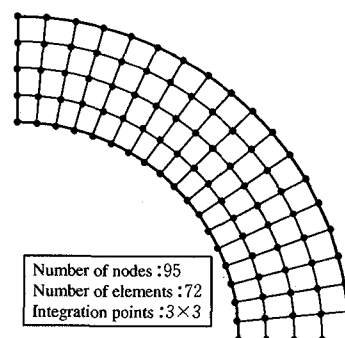


図-12 有限要素分割図

変化させて計算を行い、 ρ^* の大きさが解析結果へ与える影響について検討する。

$r = 4, 5, 6cm$ の位置における r 方向変位の解析結果をそれぞれ図-13、図-14、図-15に示す。いずれも影響領域 $\rho^* = 1, 3, 4$ の場合について厳密解²⁰⁾との相対誤差をFEMの結果とともに示したものである。

$\rho^* = 1$ の場合は、 $r = 5cm$ の位置で相対誤差が最大でも0.04%以下であり、また、 $r = 4, 6cm$ についても、

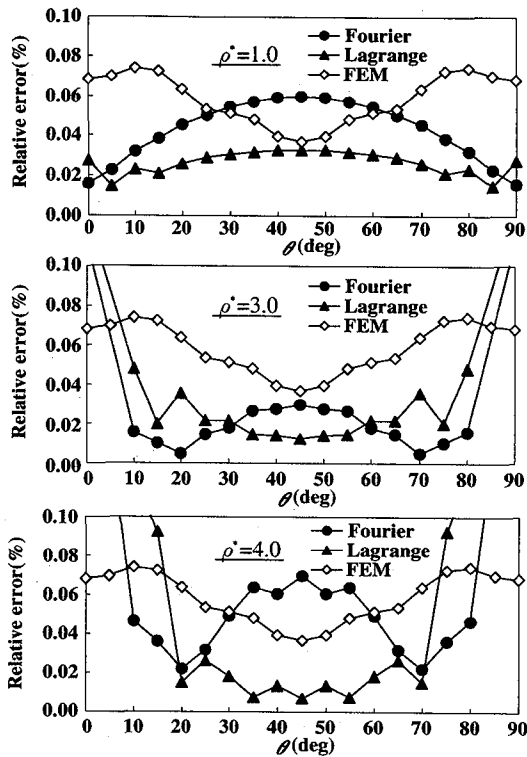


図-13 r 方向変位の誤差分布 ($r = 4\text{cm}$)

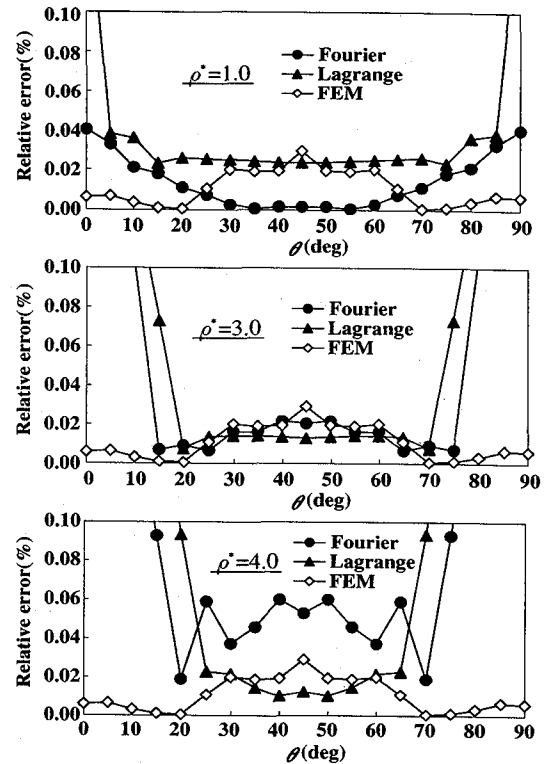


図-15 r 方向変位の誤差分布 ($r = 6\text{cm}$)

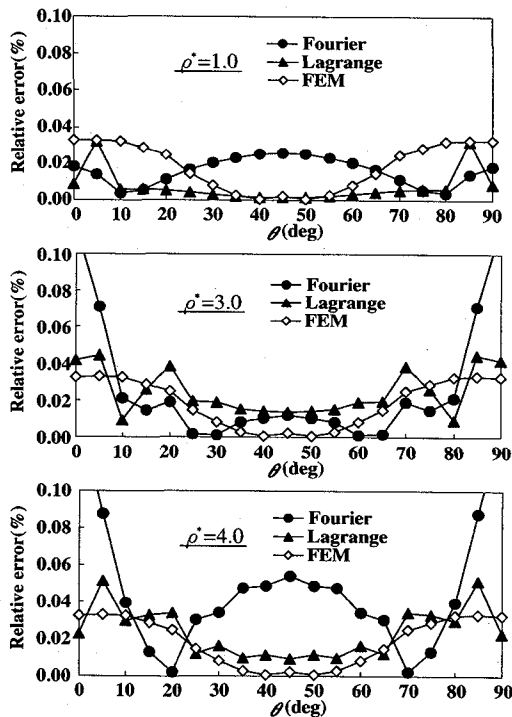


図-14 r 方向変位の誤差分布 ($r = 5\text{cm}$)

内挿関数にLagrange多項式を用いた場合の $r = 6\text{cm}$ の端点 ($\theta = 0, 90\text{deg}$) で最大0.16%であることを除けば、その他の点はすべて0.06%以下と精度良い結果が得られている。

$\rho^* = 3$ と影響領域が大きくなると、側方の境界から

離れた $\theta = 20 \sim 70(\text{deg})$ の範囲の領域内部では相対誤差が最大0.04%以下となり精度が向上するが、側方境界の近傍では逆に精度の低下がみられる。 $\rho^* = 4$ の場合には、この傾向はさらに大きくなり、境界近傍部の誤差が大きくなるとともに、領域内部においても0.1%以下の誤差を保ちながらも解が振動し始めている。

境界近傍での精度の低下は、Lagrange多項式を用いた内挿関数の場合が顕著で、 $r = 6\text{cm}$ の端点での誤差が有限フーリエ近似の場合は2.19%、Lagrange多項式の場合は3.86%であった。本計算例の場合 $\rho^* = 4$ では、評価点ごとに t_2 方向に関して領域のすべての点を含む高次の近似関数 (t_2 に関して4次関数) を用いていることを意味する。多項式近似の場合、次数を増大すると端点近傍において内挿値が発散することが知られている¹⁷⁾ が、本計算例においてもその影響が境界近傍における解析結果に表れたものと考えられる。反面、領域内部では $\rho^* = 4$ となってもLagrange多項式の場合は有限フーリエ近似の場合に比べ精度の低下はみられなかった。

図-16～図-23は、図-11に示すA-A線からD-D線に沿う応力の結果であり、有限フーリエ近似の内挿関数を用いた本手法の結果と厳密解、FEM解との比較を示したものである。A-A線、D-D線は解析モデルの境界線に、また、B-B線、C-C線はモデルの中心線に最も近いGauss積分点の位置であり、図-16から図-19に σ_r の誤差分布を、図-20から図-23に σ_θ の分布を示す。

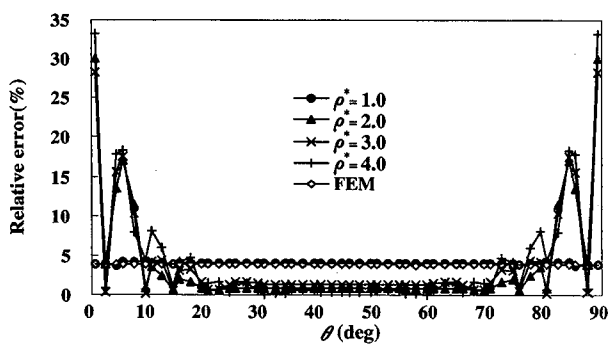


図-16 σ_r の誤差分布 (A-A線)

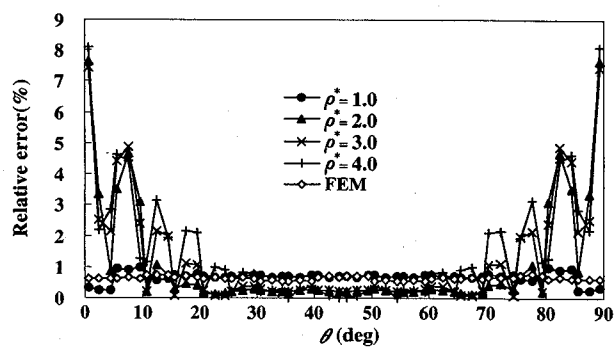


図-20 σ_θ の誤差分布 (A-A線)

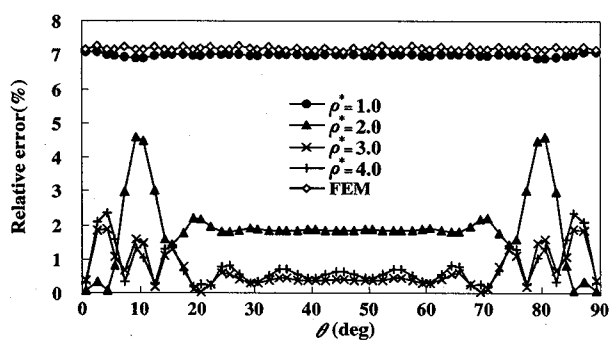


図-17 σ_r の誤差分布 (B-B線)

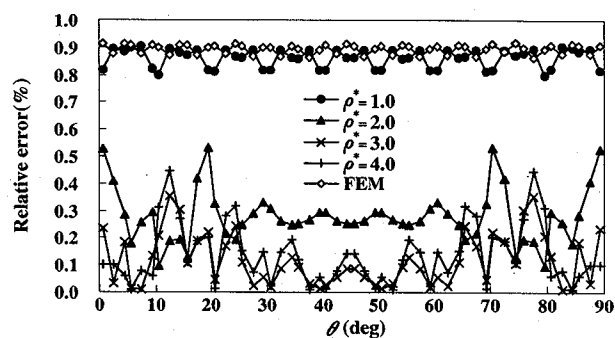


図-21 σ_θ の誤差分布 (B-B線)

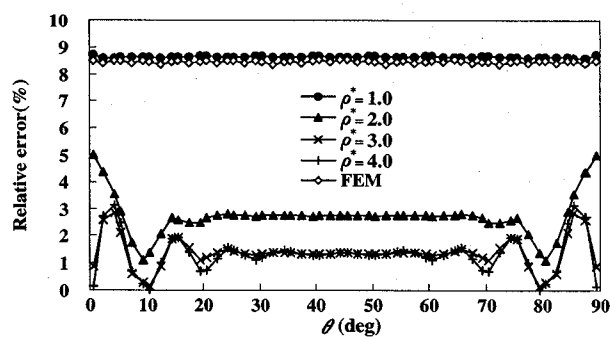


図-18 σ_r の誤差分布 (C-C線)

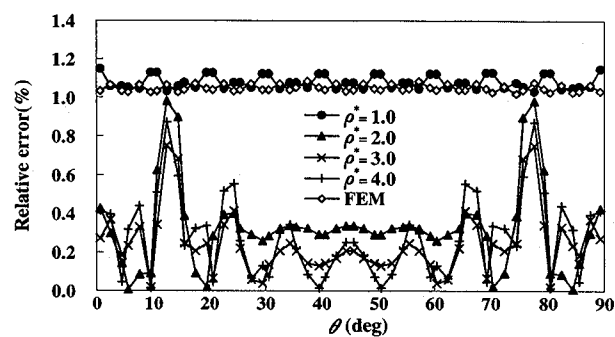


図-22 σ_θ の誤差分布 (C-C線)

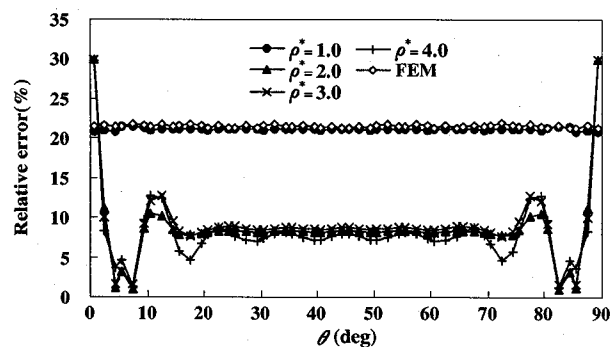


図-19 σ_r の誤差分布 (D-D線)

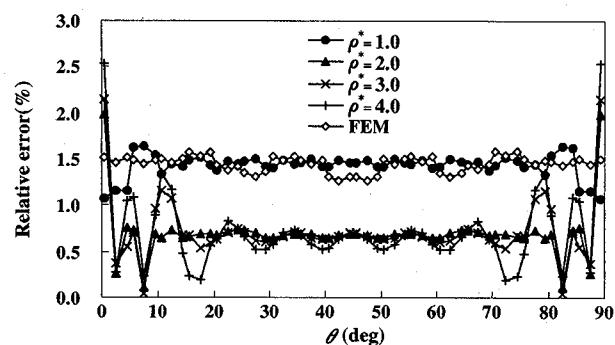


図-23 σ_θ の誤差分布 (D-D線)

これらの図から明らかなように、応力 σ_r , σ_θ はともに影響領域が小さい場合($\rho^* = 1$)にはFEMに近い結果となり、影響領域が大きくなるとA-A線, D-D線上の端点近傍を除いて精度が向上していることがわかる。このことは変位の結果と同じ傾向を示している。 $\rho^* = 4$ におけるA-A線上の σ_r の相対誤差は、 $\theta = 25 \sim 65(\text{deg})$ の範囲の領域内部では有限フーリエ近似で最大1.40%, Lagrange多項式で最大1.91%であったのに対し、境界端点ではそれぞれ33.2%, 69.3%であった。

これらのことより、写像平面上におけるEFGM解析では領域内部の評価点では影響領域を比較的大きく設定し、2方向の境界に近い隅角部では逆に影響領域を小さく設定することによって精度良い結果が得られるものと考えられる。図-24は、評価点が内外縁のバックグラウンドセルの $\theta = 0 \sim 20(\text{deg})$, $\theta = 70 \sim 90(\text{deg})$ の範囲内では $\rho^* = 1$ とし、他のセル内では $\rho^* = 4$ とした場合のA-A線上の応力 σ_r の誤差分布を示したものであるが、端点近傍において誤差が改善されている。影響領域の設定方法に関する定量的な評価については、今後さらに検討する必要がある。

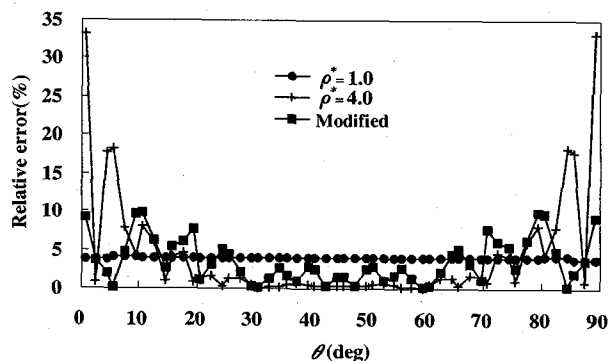


図-24 A-A線上の σ_r の誤差分布

4. おわりに

本研究では、エレメントフリー解析の基礎的研究として、基本境界条件を直接処理でき、矩形以外の曲線境界を有する形状の問題に対して適用できるエレメントフリー法の1手法について検討した。提案する手法は、実平面における解析対象の離散化モデルとともに支配方程式を写像変換し、生成された直交格子の写像平面上でエレメントフリー解析を行うもので、簡単な数値計算例を通して本手法が曲線境界を有する2次元弾性問題に適用可能であることが示された。

本手法は写像変換に基づく手法であるために、本文で述べた写像方法では写像不可能な複雑な任意形状の問題に対しては適用限界がある。しかしながら、写像平面上でエレメントフリー解析を行うという方法は、内外で数多く発表されている他の格子形成法と組み合わ

せて解析することが可能であり、3次元問題への拡張も可能であると考えられる。

上記の点を含め、今後は複雑な形状の問題への適用、影響領域の定量的な評価、効率性の向上、他の問題への適用性について検討する必要がある。

参考文献

- 1) 鈴木克幸他:特集 メッシュレス法, 計算工学, Vol.7, No.1, 2-23, 2002
- 2) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.37, 229-256, 1994.
- 3) Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Gu, L.: A new implementation of the element-free Galerkin method, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.113, 397-414, 1994.
- 4) 奥田洋司, 長嶋利夫, 矢川元基:エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討(第1報, 常微分方程式への適用), 日本機械学会論文集(A編), Vol.61, No.590, 2302-2308, 1995.
- 5) 長嶋利夫, 奥田洋司, 矢川元基:エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討(第2報, 2次元ポテンシャル問題への適用), 日本機械学会論文集(A編), 62巻599号, 218-225, 1996.
- 6) 奥田洋司, 坂本涼:FEM-EFGM ハイブリッド解析, 計算工学会インターネット論文集, No.20000029, 2000.
- 7) 井浦雅司, 庭山孝史:Element Free Galerkin Methodにおける基本境界条件の処理, 構造工学論文集, Vol.43A, 355-364, 1997
- 8) Suetake, Y.: Simple element free method based on Taylor expansion, *Finite Elem. Appl., ASME(PVP)*, Vol.370, 89-94, 1998.
- 9) Suetake, Y.: Element-free method based on Lagrange polynomial, *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol.128, No.2, 231-239, 2002.
- 10) 末武義崇:Lagrange多項式を用いた薄板のエレメントフリー有限変位解析, 計算工学会講演会論文集, Vol.4, 55-58, 1999.
- 11) Liu, G. R. and Gu, Y. T.: A point interpolation method for two-dimensional solids, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.50, 937-951, 2001.
- 12) Thompson, J. E., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W.: *Numerical Grid Generation*, North-Holland, 1985.
- 13) 数値流体力学編集委員会編:格子形成法とコンピュータグラフィックス, 東京大学出版会, 1995.
- 14) Eriksson, L. E.: Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation, *AIAA J.*, Vol.20, No.10, 1313-1320, 1982.
- 15) Noguchi, H., Kawashima, T. and Miyamura, T.: Element free analysis of shell and spatial structures, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.47, 1215-1240, 2000.
- 16) 草間孝志, 大上俊之, 三井康司:有限フーリエ級数を用いた内挿関数と二次元境界要素への応用, 土木学会論文集, 第416号/I-13, pp.205-213, 1990.
- 17) 草間孝志, 大上俊之:有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良, 土木学会論文集, 第446号/I-19, pp.167-175, 1992.
- 18) 後藤真吾, 大上俊之:有限フーリエ級数の構造格子形成への応用, 応用力学論文集, Vol.4, pp.163-170, 2001.
- 19) S.P. ティモシェンコ, J.N. グーディア(金多潔監訳):弾性論, コロナ社, 1975.
- 20) C.T. ワン(猪瀬寧雄訳):応用弾性学, 森北出版, 1971.

(2002年9月13日受付)