

共分散方程式による道路橋交通振動における加速度応答解析

Acceleration Response Analysis by Covariance Equation Method on Traffic Vibration of Highway Brides

岡林 隆敏*, 岡谷まり子**, 呉 慶雄***, 古川 毅****

Takatoshi OKABAYASHI, Mariko OKATANI, Qingxiong WU, Tsuyoshi FURUKAWA

*工博, 長崎大学教授, 工学部社会開発工学科 (〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

**工修, (株)エム イー シー (〒651-0086 神戸市中央区磯上通 4-1-6 シオノギ神戸ビル 8F)

***工修, 長崎大学大学院, 生産科学研究科博士後期課程 (〒852-8521 長崎市文教町 1-14)

****(株)日本構造橋梁研究所 (〒107-0062 東京都港区南青山 5-12-4)

Constituting a new road surface roughness model which cuts off the high level of road roughness, authors enabled acceleration variance response analysis of the traffic vibration by the random vibration theory and confirmed the effectiveness using the simple beam model. This paper applies this approach to analyze the acceleration response by traffic vibration of the more general and three-dimensional multi-degree-of-freedom bridge system. In the numerical analysis, convergent calculation method using Pade approximation is applied in order to obtain stationary solution of covariance equation. By comparing the result by the time history response analysis method with the result of this method, the effectiveness of this analytical method is confirmed.

Key Words: Traffic Vibration for Highway Brides, Acceleration Variance Response, Road Surface Roughness, Covariance Equation

キーワード: 道路橋交通振動, 加速度分散応答, 路面凹凸, 共分散方程式

1. はじめに

橋梁上の歩行者の振動による不快感や, 都市内高架橋の交通振動による周辺地盤の振動など, 近年, 環境振動問題^{1,2)}が道路橋交通振動問題の重要な課題になっている。そこで, 道路橋交通振動のシミュレーションが, 架設前の道路橋交通振動の予測や環境振動対策のために必要な手段となってきた。特に, 近年シミュレーションによる, 実測橋梁振動波形の再現を目指して, 路面凹凸の再評価, 車両モデルの多自由度化, 橋梁モデルの高精度化など^{3)~6)}が進められている。通常これらの振動感覚や地盤振動の評価の指標として, 振動速度や振動加速度が用いられる。

解析的には交通振動を予測する手法として, 確定論的手法¹⁾と確率論的手法²⁾がある。確定論的手法は, 特定の路面凹凸を入力して, 出力としての橋梁-車両系の応答計算を実行するものである。一方, 確率論的手法は, 路面凹凸のパワースペクトル密度をモデル化して, 不規則振動論に基づいて主に応答の分散を求めるものである。従来の確率論的手法による道路橋交通振動問題^{9)~10)}では, 主に衝撃係数の算定のために, 変位分散応答を求めることが目的となっていた。不規則路面凹凸を有する走行車両による道路橋振動では, 応答は強い非正常性を示すために, 非正常不規則応答解析に適した共分散方程式法が提案された。そこで,

橋梁-車両-路面系を伊藤型の確率微分方程式で表現するために, 路面凹凸が1次遅れ系⁷⁾でモデル化された。しかし, この路面凹凸モデルを用いて橋梁振動加速度分散応答を計算すると, 解が発散して求められない路面凹凸の問題点を持っていた。

そこで著者らは, 路面凹凸の高域凹凸レベルを遮断する新しい路面凹凸モデルを提案し, 橋梁1次振動のみを考慮した場合の橋梁振動加速度分散応答の解析¹¹⁾を可能にした。本論文は, この考え方を発展させて, より一般的な3次元の多自由度系でモデル化された, 橋梁の交通振動による加速度分散応答を解析する手法を示したものである。

共分散方程式により加速度非定常分散応答を求めるためには, 変数が行列表示された共分散方程式を解く必要がある。橋長の比較的長い橋梁では, 分散応答の非正常性は顕著に現れないために, 本論文では定常応答⁸⁾¹²⁾¹³⁾に着目した。定常応答解析では, Pade 近似を用いた効果的な定常応答解析法を, 高次元の多自由度系でモデル化された道路橋梁の交通振動加速度分散応答解析に適用した。

最初に, この Pade 近似による定常応答解析法の収束性を検討した。次に, 本手法による加速度分散応答解析の有効性を検証するために, これらの分散応答と確定論による加速度応答の比較を行った。走行車両の固有振動数近傍に, いくつかの振動モードを有する橋梁の多自由度系の橋梁

では、最大応答を発生する場所の特定が必要になる。そこで、橋梁の空間的な着目点の各点における加速度分散応答レベルを表示する動的効果評価曲線の表示方法を示した。本論文は、これらの数値解析結果を通して、3次元の多自由度系橋梁モデルによる道路橋交通振動における、加速度分散応答解析の実用的解析法を提案したものである。

2. 橋梁-車両-路面系のモデル化

2.1 橋梁-車両系のモデル化

(1) 橋梁のモデル化

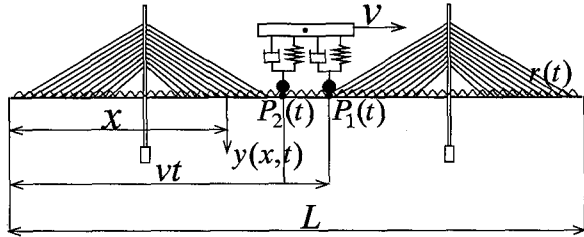


図-1 橋梁-車両-路面系

図-1のように、橋梁上を車両が一定速度 v (m/sec)で走行する場合、橋梁-車両系について考える。図では、車両モデルとして、2軸車両モデルを考えている。本論文では、1軸車両モデルと2軸車両モデルを考えている。これらの車両モデルの詳細を図-2に示した。 $P_1(t)$ と $P_2(t)$ は、車両の前軸と後軸の接地力である。橋梁は一般的に、3次元骨組構造でモデル化される。3次元骨組構造でモデル化された、 n 節点の橋梁の変位ベクトル $y(t)$ の全次数は $6n$ となる。この橋梁モデルの運動方程式は、次式で与えられる。

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = \sum_{i=1}^s B_i(vt)P_i(t) \quad (1)$$

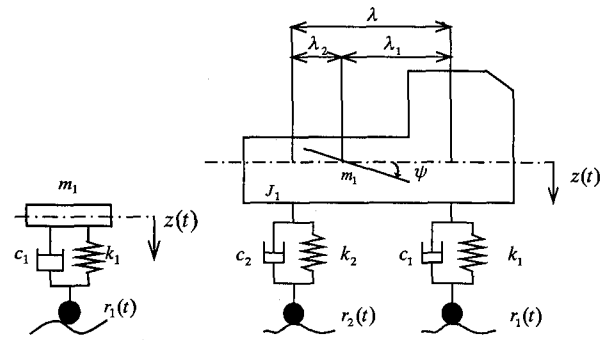
ここに、 M, C, K はそれぞれ質量マトリクス、減衰マトリクス及び剛性マトリクスである。 $P_i(t)$ は i 軸の接地力であり、 $B_i(vt)$ は i 軸の接地力の移動を表すマトリクスである。 s は車軸の数を表している。

固有振動モードマトリクス Φ を用いると、 M, C, K は対角化されて、

$$\left. \begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= I \\ \Phi^T K \Phi &= \Lambda = [\omega_k^2] \\ \Phi^T C \Phi &= H = [2h_k \omega_k] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。ここに、 ω_k, h_k は橋梁の k 次の固有円振動数、減衰定数である。また、 Λ, H は(2)式で定義された固有振動数マトリクスと減衰定数マトリクスである。近年、有限要素法汎用ソフトの普及により、3次元骨組構造解析が容易になってきたために、本論文の構造モデルとしては、3次元骨組構造を用いた。

橋梁の振動モードは、 m 次振動モードまで考慮する。道路橋交通振動の解析上の問題として、車両が節点間を移動する場合のモデル化を行う必要がある。本論文では、離



(a) 1軸車両モデル

(b) 2軸車両モデル

図-2 走行車両モデル

散化された固有振動モードをフーリエ級数を使って連続化した。このように考えて、モード解析法を適用する。

基準座標を $q(t)$ 、固有振動モードを $\phi(x)$ で表し、これら

$$q(t) = [q_1(t) \ \cdots \ q_m(t)]^T \quad (3)$$

$$\phi(x) = [\phi_1(x) \ \cdots \ \phi_m(x)] \quad (4)$$

で定義する。 t 時刻における x 点の変位応答は

$$y(x, t) = \phi^T(x)q(t) \quad (5)$$

となる。 s 軸の車両が走行すると考えると、 k 次振動の基準座標は、

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \sum_{i=1}^s \phi_k(vt - \lambda_i) P_i(t) \quad (6)$$

で与えられる。ここに、 λ_i は図-2に示したように、車両の前軸と後軸までの距離である。複数台の車両が走行する場合、先頭車両の前軸から、各車両の車軸までの距離とする。

(2) 車両のモデル化

1) 1軸車両モデル

車両を1自由度系でモデル化すると、図-2の(a)のようになる。車両の質量を m_1 、重心の鉛直方向の変位を $z(t)$ とする。この場合、車両の接地力 $P(t)$ は、

$$P(t) = -m_1 \ddot{z}(t) \quad (7)$$

となる。一定速度 v で走行する車両上で観測した路面凹凸を $r(t)$ とすると、車両の運動方程式は、

$$\ddot{z}(t) + 2h_1 \omega_1 \{\dot{z}(t) - \dot{y}_v(t) - \dot{r}(t)\} + \omega_1^2 \{z(t) - y_v(t) - r(t)\} = 0 \quad (8)$$

となる。ここで、 ω_1, h_1 は車両の固有円振動数と減衰定数である。 $y_v(t)$ は走行車両直下の橋梁の鉛直変位である。

2) 2軸車両モデル

車両を2自由度系でモデル化すると、図-2(b)のようになる。2自由度系の変数は、重心の鉛直変位 $z(t)$ と回転角 $\psi(t)$ である。前軸と後軸の接地力を $P_1(t), P_2(t)$ とすると、これらは次式で与えられる。

$$P_l(t) = c_l \dot{d}_l(t) + k_l d_l(t) \quad (l=1, 2) \quad (9)$$

$$d_l(t) = z(t) + \lambda_l \psi(t) - y_l(t) - r_l(t) \quad (10)$$

$$y_1(t) = y_v(vt, t), \quad y_2(t) = y_v(vt - \lambda, t) \quad (11)$$

ここで、 c_l, k_l, λ_l は、それぞれ $l = 1, 2$ に対する前軸及び後軸のパラメータであり、それぞれ、減衰係数、ばね定数、重心と車軸の距離である。また、 y_v, y_1, y_2 は車軸直下の橋梁の鉛直変位である。さらに、 $r_l(t)$ は l 軸直下の路面凹凸である。

車両重量を m_1 、回転慣性を J_1 とすると、重心の鉛直振動 $z(t)$ と重心回りの回転振動 $\psi(t)$ の方程式は、次式で与えられる。

$$m_1 \ddot{z}(t) + \sum_{l=1}^2 c_l \dot{d}_l(t) + k_l d_l(t) = 0 \quad (12)$$

$$J_1 \ddot{\psi}(t) + \sum_{l=1}^2 (-1)^{l-1} \lambda_l \{c_l \dot{d}_l(t) + k_l d_l(t)\} = 0 \quad (13)$$

2. 2 路面凹凸のモデル化

(1) 路面凹凸のパワースペクトル密度

従来の一次遅れ系モデル⁷⁾による路面凹凸モデルを用いると、不規則振動論による加速度応答解析では、応答は発散して解を求めることはできない。そのために、路面凹凸の一次遅れ系のパワースペクトル密度に、 p 次のローパスフィルターを付加した、新しい路面凹凸モデルを提案¹¹⁾した。この路面凹凸モデルは、高域の路面凹凸のパワーを急峻なローパスフィルターで遮断するスペクトル密度となっている。従って、加速度応答を求めるために、路面凹凸を積分しても、加速度応答のパワーすなわち分散が有限である路面凹凸の構造となっている。提案する路面凹凸のパワースペクトル密度は、

$$S_R(\Omega) = \frac{A}{(\Omega^2 + a_1^2)} \prod_{k=2}^p \frac{a_k^2}{(\Omega^2 + a_k^2)} \quad (14)$$

で与えられる。ここで、 Ω は単位長さあたりの凹凸数、 A は路面凹凸の良否を決めるパラメータ、 a_k は路面凹凸の周波数特性を決めるパラメータである。また、 p はフィルター次数である。本研究では、路面状態としては良判定の $A = 0.001(\text{cm}^2/\text{m})$ を用いる。また、路面凹凸のスペクトル形状を決定するパラメータは、これまでの研究通り

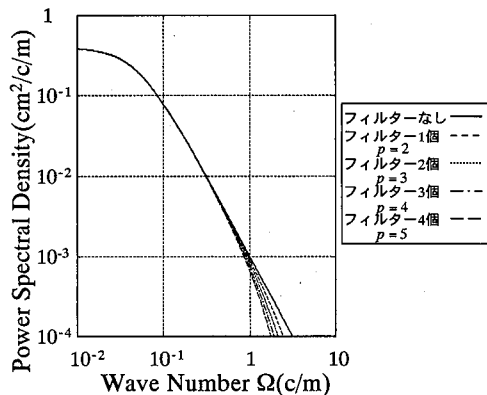


図-3 フィルター次数の変化によるパワースペクトル密度

$a_1 = 0.05$ とする。また、ローパスフィルターパラメータとしては、パラメトリックな計算の結果、 $a_2 = 3$ が最適である結果¹¹⁾を得ている。なお、 $a_2 = a_3 = \dots = a_p$ とする。

この条件で、フィルター次数を変化させた路面凹凸のパワースペクトル密度を図-3に示した。これらの曲線は、従来の路面凹凸のパワースペクトル密度と共に、ローパスフィルターを4次まで付加したパワースペクトル密度である。

一定速度 v で走行する車両上では、路面凹凸 $R(x)$ は $x = vt$ となり、時間関数となる。空間的な凹凸 Ω は、 $2\pi v\Omega = \omega$ の関係で周波数となる。このような関係により、時間関数となった路面凹凸のパワースペクトル密度は、

$$S_r(\omega) = \frac{S_0}{(\omega^2 + \beta_1^2)} \prod_{k=2}^p \frac{\beta_k^2}{(\omega^2 + \beta_k^2)} \quad (15)$$

で表される。ここに、 $S_0 = 2\pi v A$ 、 $\beta_k = 2\pi v a_k$ である。

(2) 確率微分方程式による路面凹凸のモデル化

このようなパワースペクトル密度を有する路面凹凸は、次のような白色雑音を入力とする路面系の定常解過程として表現することができる。

$$\begin{cases} \dot{r}_l(t) = -\beta_1 r_l(t) + \beta_2 n_{l1}(t) \\ \dot{n}_{l1}(t) = -\beta_2 n_{l1}(t) + \beta_3 n_{l2}(t) \\ \vdots \\ \dot{n}_{lp-1}(t) = -\beta_p n_{lp-1}(t) + w_l(t) \end{cases} \quad (l = 1, 2) \quad (16)$$

ここに、 l は車軸を示している。 $n_{l1}, n_{l2}, \dots, n_{lp-1}$ はフィルターの変数であり、 $w_l(t)$ は平均値と強度が次式で与えられる白色雑音過程である。

$$E[w_l(t)] = 0, \quad E[w_l(t_1)w_l(t_2)] = \sigma_l^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (17)$$

ここに、 $E[\]$ は数学的平均値のための演算子、 σ_l^2 は白色雑音過程の強度、 $\delta(t)$ はデラックのデルタ関数である。

車両の前軸と後軸には、時間遅れを持って、同じ路面凹凸が作用する。すなわち、

$$r_1(t) = r_2(t + t_1) = r(t) \quad (18)$$

となる。 t_1 は、前軸と後軸の間の通過時間、 $t_1 = \lambda/v$ である。しかし、不規則振動論により、この路面凹凸モデルによる計算は実行可能であるが、かなり煩雑なものになるために、特別の場合として、次の2つの仮定が考えられる。

①前軸と後軸に、独立な路面凹凸が作用する。

②前軸と後軸に同じ路面凹凸が作用する。

①の場合は、 $r_1(t)$ と $r_2(t)$ が無相関の場合、②の場合は、 $r_1(t)$ と $r_2(t)$ が完全相関の場合である。本論文は、前軸と後軸に独立する路面凹凸が作用する①の場合を考えた。 $r_1(t)$ と $r_2(t)$ が完全関数の場合は、車両はほぼ1自由度系に近い挙動を示すことになる。また、1軸車両より複雑な2軸車両を考慮することで、橋梁の振動応答に違いがあるのかについても検討する。

路面凹凸に付加するローパスフィルターは、1次のみで有効であることをこれまでの研究で確認¹¹⁾されているの

で、本論文では、フィルタ一次数 $1(p=2)$ の場合について計算を行った。

3. 橋梁-車両-路面系の確率微分方程式と共分散方程式

3.1 橋梁-車両-路面系の確率微分方程式

ここでは、橋梁-車両-路面系の確率微分方程式を誘導する。本論文では、車両モデルとして、1軸車両モデルと2軸車両モデルを考えている。車両モデルが違っても、方程式は同じになるので、ここでは、方程式がより一般的な2軸車両モデルの場合について、橋梁-車両-路面系の確率微分方程式について示す。1軸車両モデルの場合の行列の要素については、【付録2】で示した。

橋梁系の基準座標の状態変数を(3)式より、

$$Y(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t)]^T \quad (19)$$

で定義する。路面凹凸モデルを構成するローパスフィルタの次数を1次とすると、車両-路面系の状態変数 $Z(t)$ は、

$$Z(t) = [z(t) \quad \psi(t) \quad \dot{z}(t) \quad \dot{\psi}(t) \quad r_1(t) \quad r_2(t) \quad n_{11}(t) \quad n_{21}(t) \quad n_{12}(t) \quad n_{22}(t)]^T \quad (20)$$

で定義される。これらの状態変数を合成した橋梁-車両-路面系の状態変数 $X(t)$ は、

$$X(t) = [Y(t) \quad Z(t)]^T \quad (21)$$

で構成される。(16)式を考慮すると、橋梁-車両-路面系は、白色雑音過程を入力とする確率微分方程式で表すことができる。

$$\dot{X}(t) = A_X(t)X(t) + B_X(t)w(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (22)$$

ここで、 X_0 は初期条件であり、車両が橋梁に進入する直前の路面系の変数より構成されている。この変数は、平均値0で、橋梁-車両系の共分散行列で構成される正規性確率変数ベクトルである。(22)式の係数行列 $A_X(t)$ 、外力ベクトル $B_X(t)$ は、2軸車両モデルについて、次のように表すことができる。

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_Y(t) & A_{YZ}(t) \\ A_{ZY}(t) & A_Z(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B(t) = [B_Y(t) \quad B_Z(t)]^T \quad (24)$$

$$A_Y(t) = \begin{bmatrix} 0_{m,m} & I_{m,m} \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{YZ}(t) = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & 0_m & 0_m \end{bmatrix}$$

$$A_{ZY}(t) = \begin{bmatrix} 0_m^T & 0_m^T \\ 0_m^T & 0_m^T \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \\ 0_{p,m} & 0_{p,m} \end{bmatrix},$$

$$A_Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & 0 & 0 \\ 0_p & 0_p & 0_p & 0_p & & & & a_{31} & & \end{bmatrix}$$

$$B_Y(t) = 0_{2,2m}$$

$$B_Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

ここで、 0_{ij} は i 行、 j 列の 0 行列、 0_i は i 次元ベクトルである。

各要素については、【付録1】に示した。1軸車両モデルの場合でも、橋梁-車両-路面系の方程式は、(22)式と同じ形になる。この場合の行列の要素は、【付録2】に示した。

3.2 橋梁-車両-路面系の共分散方程式

橋梁-車両-路面系の応答 $X(t)$ の平均値回りの変動に着目すれば、共分散応答 $R_X(t)$ は

$$R_X(t) = E[X(t)X^T(t)] \quad (25)$$

で定義される。なお、ここでは、平均値回りの変動 $E[(X(t) - \bar{X}(t))(X(t) - \bar{X}(t))^T]$ を改めて、 $E[X(t)X^T(t)]$ で定義している。確率微分方程式(22)式の解過程は、線形微分方程式の理論より、

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)w(\tau)d\tau \quad (26)$$

となる。ここに、 $\Phi(t, t_0)$ は(22)式の状態遷移行列である。 $X(t)$ を(25)式に代入し、白色雑音過程の性質(17)式を用いると、 $X(t)$ の共分散は、

$$R_X(t) = \Phi(t, t_0)R_0\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)\sigma^2d\tau \quad (27)$$

となる。この両辺を t で微分して、式を変形することにより、応答 $X(t)$ の共分散を支配する共分散方程式を得る。

$$\dot{R}_X(t) = A_X(t)R_X(t) + R_X(t)A_X^T(t) + Q_X(t)$$

$$R_X(t_0) = R_{X_0}, \quad Q_X(t) = B_X(t)B_X^T(t)\sigma^2 \quad (28)$$

共分散方程式の誘導については、文献7)に記述している。

4. 共分散方程式の定常解と加速度分散応答

4.1 共分散方程式の定常応答解析

路面凹凸 $r(t)$ 上を走行する車両が、橋梁の定点 $\lambda = vt$ で固定されて橋梁を加振し、定常状態に達しているものとする。2軸車両の場合は前軸を規準とする。この場合、(28)式の共分散方程式では、 $t \rightarrow \infty$ となり $R_X(t)$ が定数となるために、 $\dot{R}_X(t)$ の値は0となる。従って、(27)式の共分散方程式は、次式の連立方程式となる。

$$A_X(\lambda)R_X(\lambda) + R_X(\lambda)A_X^T(\lambda) + Q_X(\lambda) = 0 \\ Q_X(\lambda) = B_X(\lambda)B_X^T(\lambda)\sigma^2 \quad (29)$$

本論文で計算する対象は、立体解析された斜張橋であるために、橋梁に関する変数が多くなる。また、最大応答の評価において、橋梁のどの場所で最大応答が発生するのかを推定することが必要となる。そこで、本論文では、解析を一般的な非定常解析ではなく、非定常応答の最大値を推定することができる定常解析⁹⁾に限定した。

行列型の変数を持つ共分散方程式は、Liapunov 方程式と呼ばれるものであり、2つの方法で解くことができる。第1の方法⁹⁾は、(29)式を通常のベクトルの形の連立方程式にして解く方法である。第2の方法¹²⁾は、共分散方程式の解(27)式において、 $t \rightarrow \infty$ の解を求める方法である。本論文の解析対象の橋梁モデルは、変数が多いために、定常応答解析は、第2の方法を採用した。

定常状態では、(27)式の解は、

$$R_X(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A_X(\lambda)(t-\tau)} Q_X(\lambda) e^{A_X(\lambda)(t-\tau)^T} d\tau \quad (30)$$

となる。定点を加振する場合、時変系の係数 $A_X(t)$ と $B_X(t)$ は、定数係数となり、状態遷移行列 $\Phi(t, t_0)$ は $e^{A_X(t-t_0)}$ で表される。時間刻みを d とすると、(29)式は次のような漸化式で表すことができる。

$$R_{k+1} = R_k + \Gamma^{2k} R_k \Gamma^{2kT}, \quad R_0 = Q_X(\lambda) d \quad (31)$$

ここに、 Γ は $e^{A_X(\lambda)d}$ であるが、数値計算を行うために、これを3次のPade近似で表すものとする。

$$\Gamma = \left(I - \frac{Ad}{2} + \frac{1}{12} A^2 d^2 \right)^{-1} \left(I + \frac{Ad}{2} + \frac{1}{12} A^2 d^2 \right) \quad (32)$$

ここで、 $A = A_X(\lambda)$ とした。また、 k は繰返し回数である。(31)式の計算では、応答の変化が小さくなり、設定した誤差範囲内に応答の変化が入り、収束したと思われる時点で計算を終了させる。

橋梁の x 点の分散応答は、 $R_X(\lambda)$ の中に含まれる橋梁に関する共分散を用いて、次式により求めることができる。

$$\sigma_y^2(x, \lambda) = E[y(x, \lambda)^2] = \phi(x) E[q(\lambda) q^T(\lambda)] \phi^T(x) \quad (33)$$

$$\sigma_v^2(x, \lambda) = E[\dot{y}(x, \lambda)^2] = \phi(x) E[\dot{q}(\lambda) \dot{q}^T(\lambda)] \phi^T(x) \quad (34)$$

4. 2 加速度分散応答解析

本研究の目的は、橋梁の加速度分散応答を求めることである。橋梁 x 点の加速度分散応答は、次式で定義される。

$$E[\ddot{y}^2(x, t)] = \phi(x) E[\ddot{q}(t) \ddot{q}^T(t)] \phi^T(x) \quad (35)$$

そこで、基準座標の加速度共分散を求めることが目的となる。路面凹凸を組み込むことなく、橋梁-車両系(6)、(7)、(8)式より状態方程式を構成する。車両を2軸モデルを仮定した場合、橋梁-車両系の状態変数は、

$$P(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t) \quad z(t) \quad \psi(t) \quad \dot{z}(t) \quad \dot{\psi}(t)]^T \quad (36)$$

で与えられる。また、作用する路面凹凸の時間微分が、(16)式で表された場合、路面凹凸 $r_1(t), r_2(t), \dot{r}_1(t), \dot{r}_2(t)$ に関する状態を

る状態を

$$r(t) = [r_1(t) \quad r_2(t) \quad n_{11}(t) \quad n_{12}(t) \quad n_{21}(t) \quad n_{22}(t)]^T \quad (37)$$

で表すと、橋梁-車両系の状態方程式は、

$$\dot{P}(t) = A_P(t) P(t) + B_P(t) r(t) \quad (38)$$

となる。ここで、 $A_P(t)$ と $B_P(t)$ は、

$$A_P(t) = \begin{bmatrix} 0_{m,m} & I_{m,m} & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0_m^T & 0_m^T & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0_m^T & 0_m^T & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$B_P(t) = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & 0_m & 0_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

となる。

基準座標の加速度応答の共分散は、 $\dot{P}(t)$ の共分散である $E[\dot{P}(t) \dot{P}^T(t)]$ の要素として求められる。この $\dot{P}(t)$ の共分散は、(38)式を共分散の定義式に代入することにより、

$$\begin{aligned} E[\dot{P}(t) \dot{P}^T(t)] &= A_P(t) E[P(t) P^T(t)] A_P^T(t) \\ &+ A_P(t) E[P(t) r^T(t)] B_P^T(t) + B_P(t) E[r(t) P^T(t)] A_P^T(t) \\ &+ B_P(t) E[r(t) r^T(t)] B_P^T(t) \end{aligned} \quad (41)$$

として得られる。ここで、 $P(t)$ と $r(t)$ に関する共分散は、(28)式の共分散方程式の解として求めることができる。また、定常解は、(29)式より得られる。

路面凹凸が従来の1次遅れ系のモデルの場合、路面凹凸のベクトル(37)式において、 $r(t)$ の分散 $E[r(t)^2]$ が白色雑音過程の分散を含んでいる。そのために、この値が無限大になり、(41)式の加速度分散応答が発散して、加速度応答の分散を求めることができない。ここでは、2軸車両の場合について方程式を誘導したが、行列とベクトル要素を変更することにより、1軸車両についても同じ関係が成立する。1軸車両の行列とベクトルの要素は【付録3】に示した。

5. 橋梁と車両の振動特性

5. 1 橋梁の振動特性

本論文では、解析対象橋梁として、長崎県内に架設されている3径間連続鋼斜張橋を用いた。この橋梁は、図-4に示したように、橋長670mであり、主塔間350mである。斜張橋の諸元を表-1に示した。

橋梁は有限要素法により立体骨組構造でモデル化した。総節点数は345であり、総要素数は434である。解析モデルを図-5に示した。この解析モデルに対して、固有値解析を行い、固有値と固有ベクトルを得た。数値計算では上

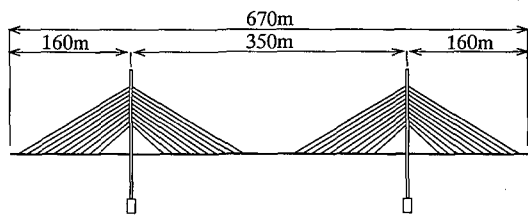


図-4 橋梁の一般図

表-1 橋梁の諸元

道路規格	第3種第3級
走行車両速度	50km/h
自動車荷重	$25 \times 9.8 \times 10^3 \text{ kg}$
橋長	670m
幅員	9.75m(歩道2.5,路肩0.5,車道6.0,路肩0.75)
形式	3径間連続鋼斜張橋

表-2 橋梁の固有振動数

振動次数	振動モード	振動数(Hz)	振動次数	振動モード	振動数(Hz)
3次	上下1次	0.305	13次	上下6次	1.098
4次	上下2次	0.413	15次	上下7次	1.279
6次	上下3次	0.694	16次	上下8次	1.397
7次	上下4次	0.802	17次	上下9次	1.561
10次	上下5次	0.921	21次	上下10次	1.842

表-3 車両の諸元

1軸車両	$m_1(\text{kg})$	20×10^3			
	$f_1(\text{Hz})$	2.00			
	h_1	0.03			
2軸車両	$m_2(\text{kg})$	20×10^3	$\lambda(\text{m})$	4.0	
	$k_1(\text{N/m}^2)$	$54.30 \times 9.8 \times 10^3$	$J(\text{N} \cdot \text{m}^2)$	$50.94 \times 9.8 \times 10^3$	
	$k_2(\text{N/m}^2)$	$310.67 \times 9.8 \times 10^3$	$f_1(\text{Hz})$	1.15	
	$c_1(\text{N} \cdot \text{s/m}^2)$	$0.632 \times 9.8 \times 10^3$	$f_2(\text{Hz})$	2.13	
	$c_2(\text{N} \cdot \text{s/m}^2)$	$1.511 \times 9.8 \times 10^3$	h_1	0.03	
	$\lambda_1(\text{m})$	3.1	h_2	0.03	
	$\lambda_2(\text{m})$	0.9			

下振動に係りなく、100次振動次数までを考慮した。上下10次振動までの固有振動数を表-2に示した。また、低次の上下1～3次振動までの振動モードを図-6に示した。

5. 2 車両の振動特性

車両の解析モデルは、1軸車両モデルと2軸車両モデルを用いた。車両モデルの諸元を表-3に示した。2軸車両モデルのパラメータは文献14)より引用したものである。また、2軸車両の振動数とモード減衰を示した。

数値解析における車両の走行速度は、 $v = 30 \text{ km/h}$ とした。走行車両は、主桁の中央を走行するものとしているため、偏心載荷を考慮していない。

6. 数値計算と考察

6. 1 定常応答解析結果

(1) 定常応答解析の収束状況

本論文では、数値計算を定常不規則応答解析より行って

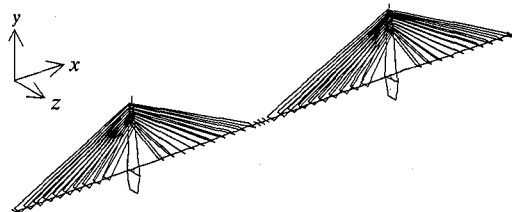
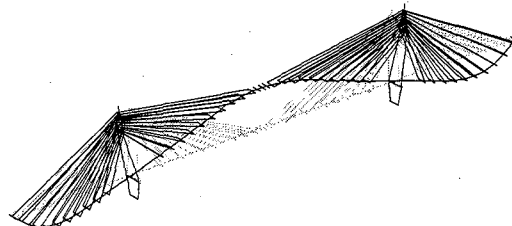
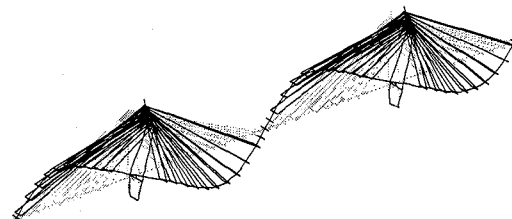


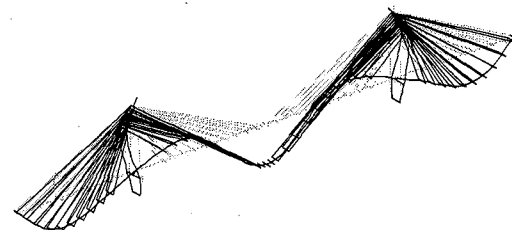
図-5 橋梁の解析モデル



3次振動(上下1次)



4次振動(上下2次)



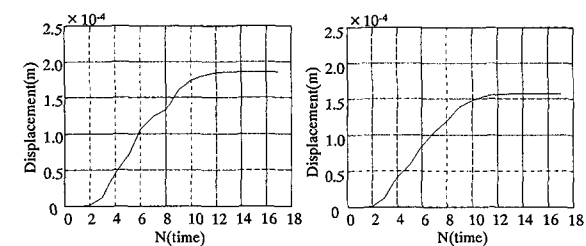
6次振動(上下3次)

図-6 橋梁の振動モード

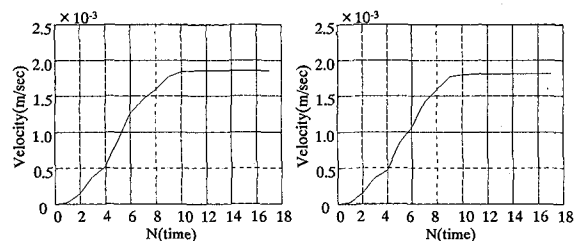
いる。この理由の第1点は、解析対象の橋梁が比較的長いために、交通振動の動的挙動の非定常性が大きくないこと。第2点は、多自由度系であるために、解くべき変数の数が大きいことである。

そこで、4章に示した共分散方程式による定常応答解析を行った。また、計算方法として、近年のパーソナルコンピュータの演算処理の高速化を考慮して、収束計算法を採用した。収束計算法を利用するためには、収束計算の繰返し数を確定する必要がある。そこで、まず、収束計算法の繰返し数を確定した。橋梁の着目点は、橋梁の中心点 $L/2$ として、1軸車両モデルと2軸車両モデルについて計算を行った。

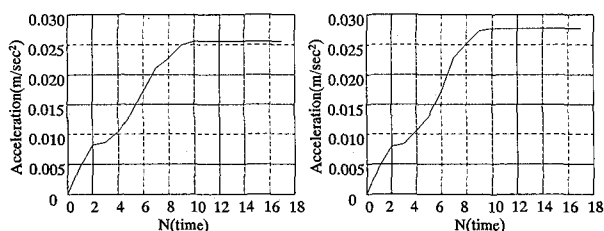
図-7に、収束計算回数に対するそれぞれの応答標準偏差を示した。横軸 N は繰返し回数である。(a)、(b)、(c)がそれぞれ変位、速度及び加速度の標準偏差である。左側に1軸車両モデルの場合を、右側に2軸車両モデルの場合を示した。計算条件として、時間刻み $d = 0.01(\text{sec})$ 、収束判定基準は、



(a)変位応答



(b)速度応答



(c)加速度応答

図-7 橋梁の r. m. s. 応答

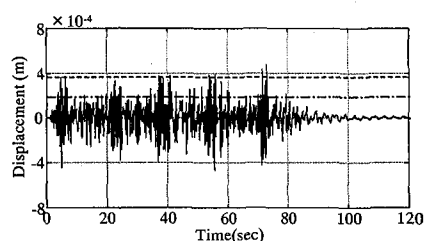
$$\varepsilon \leq |Q_{k+1} - Q_k| = 10^{-25}$$

とした。各応答に対して、収束状況を検討した。それぞれの応答において、1軸車両モデルと2軸車両モデルの収束状況の差は認められない。各応答についてみると、変位応答の場合は、12回でほぼ収束している。これに対して、速度応答と加速度応答では、収束の状況が早く、10回でほぼ収束している。これらの結果より、12回程程度の繰返し回数の収束計算により、解が得られることが確認できた。

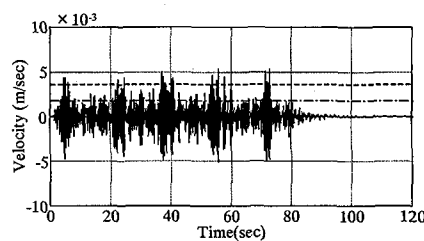
(2)時刻歴応答解析との比較

次に、定常応答解析の妥当性を検討するために、不規則応答解析と時刻歴応答解析との比較を行った。時刻歴応答では、図-3のフィルターなしの場合のパワースペクトルを用いて、凹凸範囲6(c/m)までの間を100分割して、乱数を用いて路面凹凸を合成した。また、時刻歴応答は、橋梁の振動次数を100次振動まで考慮して、ルンゲクッター法で数値計算を行った。時間刻みは0.01秒である。また、車両は、橋梁に進入するまでに、定常状態に達するように、道路上を5秒間走行させて橋梁に進入するようにしている。図-8と図-9は、1軸車両モデルと2軸車両モデルの、橋梁中央点 $x = L/2$ における、変位応答、速度応答及び加速度応答を示したものである。

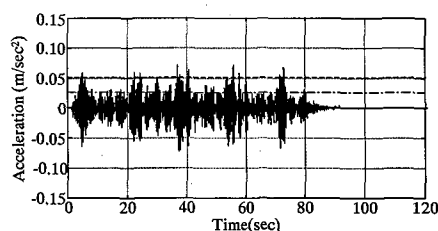
図において、一点鎖線は、定常応答解析で求めたそれぞれの応答の標準偏差である。また、破線は、標準偏差の2倍を示している。著者らのこれまでの研究の結果⁹⁾として、



(a)変位応答

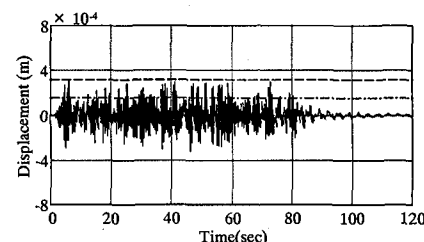


(b)速度応答

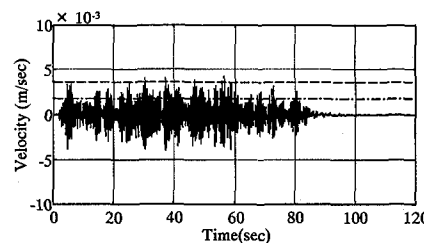


(c)加速度応答

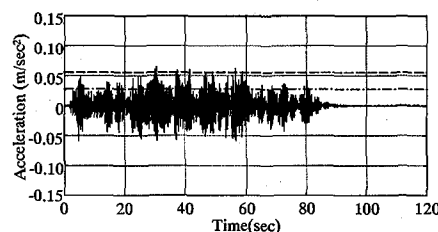
図-8 1軸車両モデルによる時刻歴応答解析と定常応答解析の比較



(a)変位応答

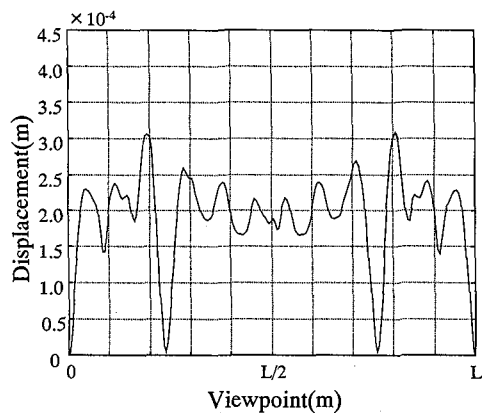


(b)速度応答

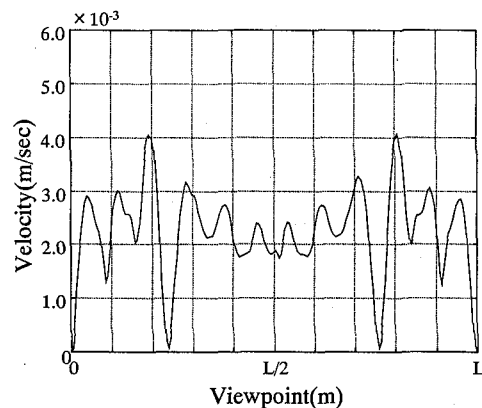


(c)加速度応答

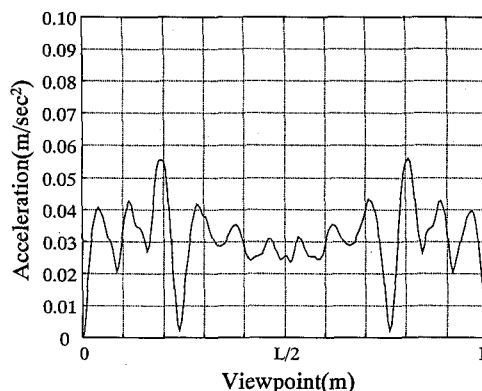
図-9 2軸車両モデルによる時刻歴応答解析と定常応答解析の比較



(a)変位応答

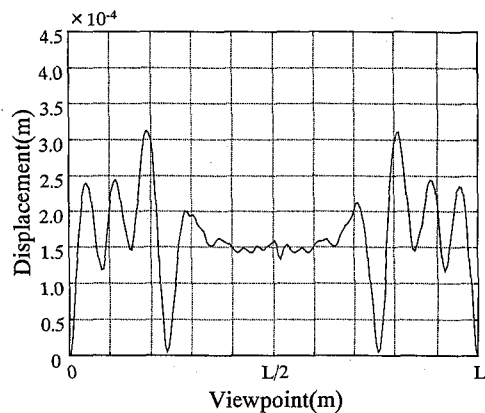


(b)速度応答

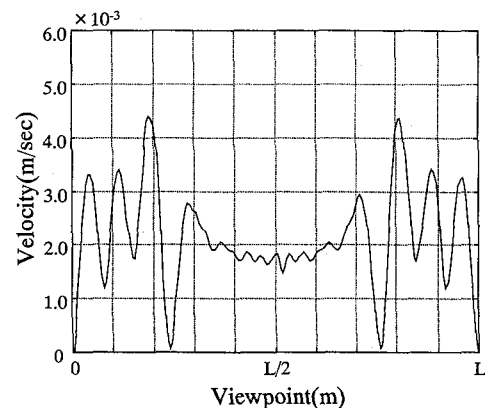


(c)加速度応答

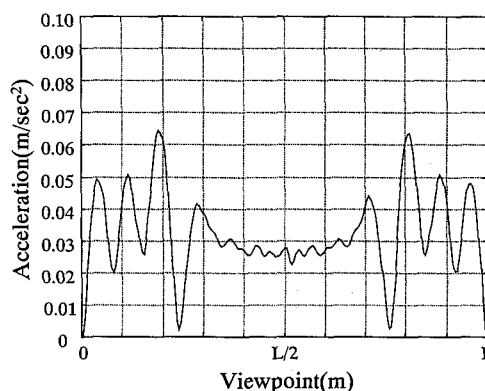
図-10 1軸車両モデルによる橋梁全長に対するr.m.s.応答



(a)変位応答



(b)速度応答



(c)加速度応答

図-11 2軸車両モデルによる橋梁全長に対するr.m.s.応答

定常応答解析の結果が非定常応答解析の最大応答の推定値になる結果を得ている。このことを考慮に入れて考えると、図によれば、定常応答解析で求めた標準偏差は、時刻歴応答の最大応答のほぼ標準偏差レベルを示しており、各時刻歴応答の最大応答の平均的な挙動を表していると言える。さらに、標準偏差の2倍である破線は、各応答の最大応答の推定値になっていることが分かる。これらの図より、本論文の目的である不規則振動論による加速度応答解析の信頼性が検証された。

6. 2 道路橋交通振動の動的効果評価曲線

長大な橋梁の場合、自動車の振動数に共振する橋梁の振

動が、比較的高次振動モードになるため、最大応答を発生する点を特定することが困難になる。数値計算では、車両を走行させ、着目点の応答レベルの最大値を求める。次に、着目点を移動させて、最大応答を表記することになる。このような計算では、計算量が極めて多くなる。そこで、応答解析を定常応答解析で行う。応答解析では、車両の接地点を決める必要がある。しかし、橋梁全体に亘る平均的な挙動を見ることを目的と考えるならば、作用点と着目点を同一点と考えることができる。そこで、車両の接地点を着目点と同一点として、橋梁全域に亘る応答の標準偏差レベルを求めた。2軸車両モデルでは、接地力の作用する2点の中央を着目点とした。

本研究では、橋梁の桁を橋軸方向に200分割して201点の着目点を設定した。他の計算条件は、前章の値を用いた。図-10と図-11は、図-2に示した1軸車両モデルと2軸車両モデルに対する、定常応答の標準偏差を示したものである。縦軸は、それぞれ変位、速度および加速度応答の標準偏差である。横軸は、着目点である橋長 L を201点で分割している。斜張橋の主塔は、約0.24 L 点と0.76 L 点の点になっている。

図-10と図-11より、1軸車両モデルの場合でも、2軸車両の場合でも、応答は主塔前後で大きく変化することがわかる。変位、速度および加速度応答のいずれの場合でも、主塔の手前の点、すなわち0.2 L 点と0.8 L 点近傍で応答が最大になっている。橋梁中央点0.5 L 付近では、変動幅が小さくなっている。特に2軸車両モデルの場合、このことが顕著であるが、これは2軸車両モデルでは荷重の接地点が2点あるためと考えられる。

これらの図のように、着目点と荷重の接地点を移動させて応答を求めると、最大応答が発生する点を推定することができる。従って、これらの図は、道路橋交通振動の動的効果の影響度を表していることになっている。本論文は、解析手法を提案したものである。荷重直下点で常に応答が最大になるとは限らないので、最大応答を厳密に評価するために、荷重点に対して、着目点を移動させて、最大応答を推定する必要がある。

7. まとめ

本論文では、橋長670mの斜張橋上を走行する1軸車両モデルと2軸車両モデルによる交通振動に、共分散方程式による加速度応答解析の手法を適用し、本手法の有効性と精度について検討した。著者らはすでに、新しい路面凹凸モデルを提案し、道路橋交通振動における不規則加速度応答解析手法の基礎的理論を提案している。本論文は、著者らが提案した手法¹⁾を、3次元多自由度系でモデル化された斜張橋の交通振動問題に適用し、本手法の実用性を検証したものである。さらに、最大応答が発生する着目点を推定するために、交通振動のための動的効果評価曲線図を提案した。

本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

- (1)新しい路面凹凸モデルを提案し、3次元有限要素法モデルと走行車両モデルより、橋梁-車両-路面系の確率微分方程式を誘導した。
- (2)共分散方程式法より、不規則振動論による橋梁の加速度応答を求める過程を定式化した。その結果、大次元構造物の不規則振動論による加速度応答解析が可能になった。
- (3)不規則振動論における定常応答解析法として収束計算法を示し、解を得るための収束回数について検討した。その結果、変位、速度、加速度応答いずれの場合でも、約10回程度で収束することを示し、収束計算法の有効性を確認した。
- (4)提案した不規則応答解析の有効性を検討するために、定常応答解析の標準偏差を時刻歴応答解析法で検証した。そ

の結果、時刻歴応答の平均的な標準偏差を示していることを確認すると共に、標準偏差の2倍が最大応答の推定値となることを明らかにした。

(5)比較的橋長の長い橋梁では、交通振動において比較的高次振動が励起する。そのために、最大応答が発生する点を推定するために、着目点を移動させた多くの計算事例を照査する必要がある。そこで、本論文では、橋梁全体に渡る平均的な応答挙動を示す交通振動の動的効果評価曲線図を提案した。

付録

【付録1】2軸車両モデルの場合の係数行列の要素

(23), (24)式において、2軸車両モデルの場合の係数行列の要素は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\omega_i^2 + \{-k_1 \phi_i^T(x_1) \phi_i(x_1) - k_2 \phi_i^T(x_2) \phi_i(x_2)\} \\
 &= \{-k_1 \phi_i^T(x_1) \phi_j(x_1) - k_2 \phi_i^T(x_2) \phi_j(x_2)\} \quad (i \neq j) \\
 a_2 &= -2h_i \omega_i + \{-c_1 \phi_i^T(x_1) \phi_i(x_1) - c_2 \phi_i^T(x_2) \phi_i(x_2)\} \\
 &= \{-c_1 \phi_i^T(x_1) \phi_j(x_1) - c_2 \phi_i^T(x_2) \phi_j(x_2)\} \quad (i \neq j) \\
 a_3 &= \{k_1 \phi_i^T(x_1) + k_2 \phi_i^T(x_2)\} / m_i \\
 a_4 &= \{k_1 \lambda_1 \phi_i^T(x_1) - k_2 \lambda_2 \phi_i^T(x_2)\} / m_i \\
 a_5 &= \{c_1 \phi_i^T(x_1) + c_2 \phi_i^T(x_2)\} / m_i \\
 a_6 &= \{c_1 \lambda_1 \phi_i^T(x_1) - c_2 \lambda_2 \phi_i^T(x_2)\} / m_i \\
 a_7 &= \{c_1 \beta_1 \phi_i^T(x_1) - k_1 \phi_i^T(x_1)\} \\
 a_8 &= \{c_2 \beta_1 \phi_i^T(x_2) - k_2 \phi_i^T(x_2)\} \\
 a_9 &= -c_1 \beta_2 \phi_i^T(x_1), \quad a_{10} = -c_2 \beta_2 \phi_i^T(x_2) \\
 a_{11} &= \{k_1 \phi_i(x_1) + k_2 \phi_i(x_2)\} / m_s \\
 a_{12} &= \{c_1 \phi_i(x_1) + c_2 \phi_i(x_2)\} / m_s \\
 a_{13} &= \{k_1 \lambda_1 \phi_i(x_1) - k_2 \lambda_2 \phi_i(x_2)\} / J \\
 a_{14} &= \{c_1 \lambda_1 \phi_i(x_1) - c_2 \lambda_2 \phi_i(x_2)\} / J \\
 a_{15} &= -(k_1 + k_2) / m_s, \quad a_{16} = -(k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2) / m_s \\
 a_{17} &= -(c_1 + c_2) / m_s, \quad a_{18} = -(c_1 \lambda_1 - c_2 \lambda_2) / m_s \\
 a_{19} &= (k_1 - c_1 \beta_1) / m_s, \quad a_{20} = (k_2 - c_2 \beta_1) / m_s \\
 a_{21} &= c_1 \beta_2 / m_s, \quad a_{22} = c_2 \beta_2 / m_s \\
 a_{23} &= (-k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2) / J, \quad a_{24} = (-k_1 \lambda_1^2 - k_2 \lambda_2^2) / J \\
 a_{25} &= (-c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2) / J, \quad a_{26} = (-c_1 \lambda_1^2 - c_2 \lambda_2^2) / J \\
 a_{27} &= (-c_1 \lambda_1 \beta_1 + k_1 \lambda_1) / J, \quad a_{28} = (c_2 \lambda_2 \beta_1 - k_2 \lambda_2) / J \\
 a_{29} &= c_1 \lambda_1 \beta_2 / J, \quad a_{30} = -c_2 \lambda_2 \beta_2 / J
 \end{aligned}$$

$$a_{31} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix}$$

【付録2】1軸車両モデルにおける橋梁-車両-路面系の状態変数と係数行列

路面凹凸モデルを構成するローパスフィルターの次数を1次とすると、車両-路面系の状態変数 $Z(t)$ は、

$Z(t) = [z(t) \quad \dot{z}(t) \quad r(t) \quad n_1(t) \quad n_2(t)]^T$ で定義される。そこで、(23), (24)式についての1軸車両

モデルの場合の係数行列の要素は、次のようになる。

$$A_Y(t) = \begin{bmatrix} 0_{m,m} & I_{m,m} \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{YZ}(t) = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m & 0_m & 0_m \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 0_m \end{bmatrix},$$

$$A_{ZY}(t) = \begin{bmatrix} 0_m^T & 0_m^T \\ a_7 & a_8 \\ 0_{p,m} & 0_{p,m} \end{bmatrix},$$

$$A_Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0_p & 0_p & & a_{13} & \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -[\omega_i^2 + \omega_0^2 \mu_i \phi_i^T(vt) \phi_i(vt)]$$

$$= -[\omega_0^2 \mu_i \phi_i^T(vt) \phi_i(vt)] \quad (i \neq j)$$

$$a_2 = -[2h_i \omega_i + 2h_0 \omega_0 \mu_i \phi_i^T(vt) \phi_i(vt)]$$

$$= -[2h_0 \omega_0 \mu_i \phi_i^T(vt) \phi_i(vt)] \quad (i \neq j)$$

$$a_3 = [\omega_0^2 \mu_i \phi_i^T(vt)], \quad a_4 = [2h_0 \omega_0 \mu_i \phi_i^T(vt)]$$

$$a_5 = [(2h_0 \omega_0 \beta_1 - \omega_0^2) \mu_i \phi_i^T(vt)]$$

$$a_6 = [-2h_0 \omega_0 \beta_2 \mu_i \phi_i^T(vt)]$$

$$a_7 = [\omega_0^2 \phi_i^T(vt)], \quad a_8 = [2h_0 \omega_0 \phi_i^T(vt)]$$

$$a_9 = -\omega_0^2, \quad a_{10} = -2h_0 \omega_0$$

$$a_{11} = \omega_0^2 - 2h_0 \omega_0 \beta_1, \quad a_{12} = 2h_0 \omega_0 \beta_2$$

$$a_{13} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix}$$

$$B_Y(t) = 0_{2m}$$

$$B_Z(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

【付録 3】 1 軸車両モデルにおける加速度応答解析のための状態変数と係数行列

橋梁一車両系の状態変数は、2 軸車両モデルの(36)式の代わりに、

$P(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t)]^T$ となる。また、作用する路面凹凸は、(36)式の代わりに、

$r(t) = [r(t) \quad n_1(t) \quad n_2(t)]^T$ で表される。1 軸車両モデルの場合の係数行列は、2 軸車両モデルの(39)、(40)式に対して、

$$A_P(t) = \begin{bmatrix} 0_{m,m} & I_{m,m} & 0_m & 0_m \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0_m^T & 0_m^T & 0 & 1 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}$$

$$B_P(t) = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & 0_m \\ a_5 & a_6 & 0_m \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

となる。基準座標の加速度応答は、4. 2 節の(40)式より、

$\dot{P}(t)$ の共分散である $E[\dot{P}(t)\dot{P}^T(t)]$ の要素として求められる。

参考文献

- 1) 橋梁振動研究会編：橋梁振動の計測と解析，技報堂，1993.10.
- 2) 土木学会構造工学委員会，橋梁振動モニタリング研究小委員会：橋梁振動モニタリングのガイドライン，土木学会，2000.10.
- 3) 梶川康男，深田幸史，林 秀侃，川北司郎，浜 博和：連続立体ラーメン免震橋の走行車両時の振動特性，構造工学論文集，Vol.44A，pp.801-840，1998.3.
- 4) 梶川康男，唐下善文，深田幸史，松元香保里：4 径間連続上路式吊床版橋の振動実験と解析，構造工学論文集，Vol.44A，pp.835-842，1998.3.
- 5) 讃岐康博，梶川康男，深田幸史，枚本正信：プロフィールメーターでの測定路面から実路面への近似法の提案，構造工学論文集，Vol.47A，pp.399-410，2001.3.
- 6) 吉村虎蔵，彦坂 熙，内谷 保：単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析，土木学会論文報告集，第 258 号，pp.35-44，1977.2.
- 7) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 286 号，pp.15-27，1979.6.
- 8) 岡林隆敏，中井一彦，谷 修造：高次振動を考慮した道路橋の単一走行車両による非定常 r.m.s. 応答，土木学会論文報告集，第 296 号，pp.13-24，1980.4.
- 9) Komatsu, S. and Kawatani, M. : Nonstationary random response of highway bridge under moving vehicle, Technology Reports of the Osaka University, Vol.32, No.1648, pp.151-158, March, 1982.
- 10) 岡林隆敏，竹下 渡，小西保則：単一車両走行によるプレートガーダー橋の不規則応答解析，構造工学論文集，Vol.37A，pp.965-972，1991.3.
- 11) 岡林隆敏，岡谷まり子，呉 慶雄：路面凹凸のモデル化と不規則振動論による道路橋交通振動加速度応答解析，構造工学論文集，Vol.47A，pp.411-418，2001.3.
- 12) Davison, E. J. and F.T.Man: The Numerical Solution of $A'Q + QA = -C$, IEEE Trans. Automat. Conth, pp.448-449, 1968
- 13) 岡林隆敏，内田浩道，河内忠義：Pade 近似による共分散方程式の数値解析，長崎大学工学部研究報告第 17 号，pp.57-63，1981.7.
- 14) 深田幸史：橋梁の動的な性能照査のための立体解析モデルの確立に関する研究，金沢大学大学院博士論文，1999.1.

(2001 年 9 月 14 日受付)