

少数個 TMD の最適ロバスト設計

Optimum robust design for a-few-TMD systems

吉住文太*, 佐野健一*, 井上浩男*

Fumitaka YOSHIKUMI, Ken-ichi SANO, Hiroo INOUE

*工修 三井造船株式会社鉄構・物流事業本部技術部 (〒196-0012 東京都昭島市つつじが丘1丁目1番50号)

Multi-Tuned Mass Dampers (MTMD) have high robust performance against variances of dynamic parameters. In this paper, we focus on a-few-TMD systems (maximum 4) and propose approximate design formulas to obtain the highest robustness against processes as the natural frequency of the structure varies and the design method in the case where the variance in the damping coefficient of TMD's is also considered. Moreover, in view of practical use of a-few-TMD systems, performance of a-few-TMD with non-uniform masses and that of a-few-TMD controlling two-closely-spaced-modes are investigated. It is found that, in both cases, a-few-TMD systems have higher robustness than the single type TMD.

Key Words: tuned mass damper, robust design, optimization, closely-spaced-modes

キーワード: 同調型動吸振器, ロバスト設計, 同調比, 最適化, 近接モード

1. まえがき

軽量化、長大・高層化が進む橋梁や建築物の制振に TMD や TLD・TSD は広く用いられ¹⁾²⁾、信頼性の高い受動型制振装置として定着している。理想的な TMD は、周知のように制振効果を最大にする Den Hartog の最適条件³⁾で得られるが、実際に TMD を設計するに当たっては、制振効果のみならず、構造物の固有振動数との同調誤差、TMD 減衰の誤差、TMD のストロークといった様々な条件を踏まえて設計する必要がある^{4)~6)}。これらの条件のうち、同調誤差や TMD 減衰の誤差に対する性能低下が少ない(ロバスト幅が大きい)設計法として、複数 TMD (MTMD) を用いて、その振動数を構造物の固有振動数周りに分布させる方法が研究され^{7)~14)}、実際の構造物を対象とした取り組みもなされている¹⁵⁾¹⁶⁾。MTMD では、設置個数が設計パラメータの一つとなるが、文献¹⁰⁾¹¹⁾では、液体マススの TLD・TSD のように非常に多数個になる場合を想定して解析的な検討がなされ、設計式も提案されている。その一方で、著者らは、製作や調整を容易にするため最大 4~5 個程度の比較的少数個の MTMD を想定して、同調ロバスト幅に着目しその最適解を数値解により検討した¹⁴⁾¹⁶⁾。その結果、1)少数個でも単一方式と比較して大きな同調ロバスト幅が得られる、2)ただし、TMD のストロークを単一方式での必要長さより長く確保する必要がある、3)等質量条件における最適解は、3 つのパラメータ(後述

式(6)~(8))で表される、などの知見が得られた。

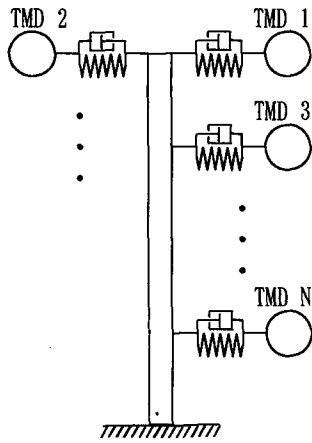
本報告では、以上の知見を踏まえ、4 個までの MTMD (以下、少数個 TMD) の優位性を積極的に活用すること目的として、以下のような検討を行った。まず、基本的な等質量条件の少数個 TMD の設計を容易にするため、同調ロバスト幅の近似設計式と TMD 減衰の変動幅も考慮した場合の設計法を検討した。さらに、少数個 TMD の実用上の可能性を更に追求するため、不等質量における同調ロバスト幅と近接 2 モードの同時制振をいくつかの数値例で検討したのでその結果についても報告する。

なお、本報告では、振動の種類として、最も基本的な強制振動の周波数応答を対象としている。

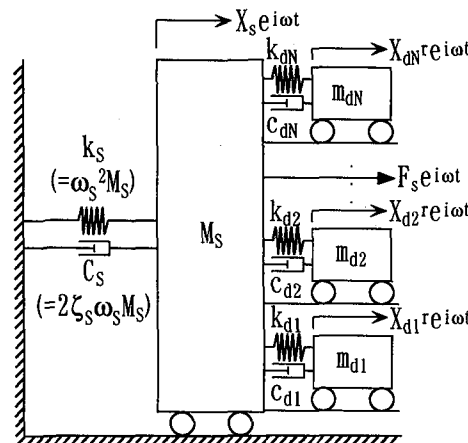
2. 制振効果とロバスト性の定義、最適化手法

図-1(1)に示すように構造物(主系)に複数個の TMD が取り付けられた場合を考える。主系のモードは TMD を介して連成するが、モード間の固有振動数が 2 倍程度以上離れていれば、主系を図-1(2)のように 1 自由度系として扱うことができる⁵⁾。本報告では、6. で近接 2 モードを扱う他は、主系を 1 自由度でモデル化できる場合を扱う。この場合の主系と TMD の周波数応答は、以下のように容易に求められる^{8)10)~12)14)16)}。

$$D_s(\beta) = \frac{|X_s|}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad D_{dn}^r(\beta) = \frac{|X_{dn}^r|}{X_{st}} = \sqrt{\frac{C_n^2+D_n^2}{A^2+B^2}}$$



(1) 構造物 - MTMD



(2) 等価 1 自由度系 - MTMD

図-1 複数 TMD (MTMD) による構造物の制振

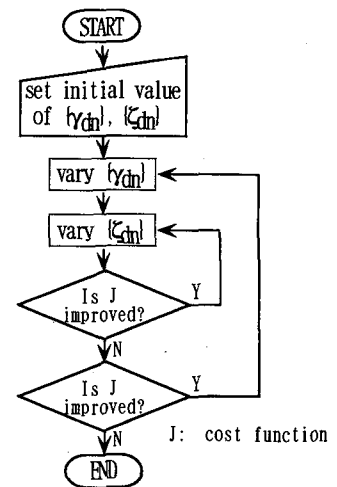


図-2 最適解探索のフローチャート

$$(n=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

ただし、

$$A = -\beta^2 + 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n \beta^2 \{ \gamma_{dn}^2 (-\beta^2 + \gamma_{dn}^2) + (2\zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta)^2 \}}{(-\beta^2 + \gamma_{dn}^2)^2 + (2\zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta)^2} \quad (2-1)$$

$$B = 2\zeta_s \beta - \sum_{n=1}^N \frac{2\mu_n \zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta^5}{(-\beta^2 + \gamma_{dn}^2)^2 + (2\zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta)^2} \quad (2-2)$$

$$C_n = \frac{\beta^2 (-\beta^2 + \gamma_{dn}^2)}{(-\beta^2 + \gamma_{dn}^2)^2 + (2\zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta)^2} \quad (2-3)$$

$$D_n = \frac{-2\zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta^3}{(-\beta^2 + \gamma_{dn}^2)^2 + (2\zeta_{dn} \gamma_{dn} \beta)^2} \quad (2-4)$$

$$\zeta_{dn} = \frac{C_{dn}}{2\sqrt{m_{dn} k_{dn}}}, \quad \omega_{dn} = \sqrt{\frac{k_{dn}}{m_{dn}}}, \quad \gamma_{dn} = \frac{\omega_{dn}}{\omega_s} \quad (3-1, 2, 3)$$

$$\mu_n = \frac{m_{dn}}{M_s}, \quad \mu = \frac{\sum_{n=1}^N m_{dn}}{M_s} = \sum_{n=1}^N \mu_n \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3-4, 5)$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_s}, \quad X_{st} = \frac{F_s}{M_s \omega_s^2} \quad (3-6, 7)$$

ここで、

$D_s(\beta)$: 主系変位動的応答倍率、複素振幅 $D_{dn}^r(\beta)$ 、 X_{dn}^r : n 番目 TMD 相対変位動的応答倍率、複素振幅 M_s, ζ_s, ω_s : 主系等価質量、減衰定数、固有角振動数 $m_{dn}, c_{dn}, k_{dn}, \zeta_{dn}, \omega_{dn}, \gamma_{dn}, \mu_n$: n 番目 TMD の等価質量、等価減衰係数、等価バネ定数、減衰定数、無減衰角振動数、振動数比、質量比 μ : TMD 総質量比 β : 外力振動数比 X_{st} : 外力振幅静的換算変位 F_s : 外力実振幅 ω : 外力角振動数 N : TMD 個数

本報告では、TMD の個数について、製作や調整が容易になるよう、最大 4 個までの少数個を対象とした。TMD のロバスト性能としては、一般に、構造物と TMD の振動数の同調条件と TMD 減衰に対するロバスト幅が考慮される。このうち、同調型ダンパーで重要となる同調ロ

バスト幅について、ここでは、主系の応答倍率が許容値を超えない範囲で主系の固有振動数がノミナル値から上下に変動できる変動幅 Δ として定義する。同調ロバスト幅を最大にする TMD パラメータは、この変動幅を評価関数 J として探索する。

$$J = \Delta \gamma_{sa} = \{ \max(\Delta) \mid D_{smax} \leq D_{sa} (1 - \Delta \leq \gamma_s \leq 1 + \Delta) \} \rightarrow \max. \quad (4)$$

$$\gamma_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\omega_s} \quad (5)$$

$\Delta \gamma_{sa}$: 同調ロバスト幅 D_{smax} : 主系最大応答倍率 ($D_s(\beta)$ の最大値) D_{sa} : 主系許容応答倍率 (= 所要の制振効果を表す) γ_s : 主系振動数変動比 ω_s : 主系固有角振動数 (ノミナル値) $\tilde{\omega}_s$: 変動後の主系固有角振動数 (式 (4) における D_{smax} は、式 (1) で ω_s に $\tilde{\omega}_s$ を代入して求めた $D_s(\beta)$ の最大値)

本報告では、TMD 減衰に対するロバスト幅も同時に考慮した設計を 4. で試みており、TMD 減衰の変動幅を所要値として与えて同調ロバスト幅を最大化するという形で考慮している。いずれの場合も TMD の設計は、式 (4) のような評価関数 J を目的に応じて設定し、それを最大 (小) 化させるような TMD の減衰と振動数を探索することである。本報告で用いた最適解の数値探索法を図-2 に示す。詳細は既に文献 14) 16) で述べているのでここでは概要のみを記すと、TMD 減衰最適化ループの外側に振動数最適化のループを設けて、それぞれのループに山登り法を用いている。

3. 同調ロバスト最適解の近似設計式

制振効果と同調ロバスト幅はトレードオフの関係にあり、最適化問題は、式 (4) のように一方を所要条件として与えて他方を最適化する問題となる。文献 14) 16) では、総質量比 $\mu=0.01, 0.02$ の場合に、TMD 個数と所要の制振効果をパラメータに最適解の傾向を調べた。しか

し、実際の設計では、同様の計算を試行錯誤して、制振効果と同調ロバスト幅が所要値を満足するような総質量比を求める作業が必要となる。このような煩雑な作業に対し、既に単一 TMD で試みられているように⁶⁾、設計パラメータの任意の組み合わせに対して、同調ロバスト幅を最大にする最適解を近似式で計算できれば、設計の見通しが大幅にようになる。そこで、式(4)の評価関数で最適化した数値解を基に TMD 諸元の最適解と所要ストロークの近似設計式を以下に作成した。

近似設計式は、TMD の質量配分を最も基本的な等質量 ($\mu_n = \mu/N$) とし、設計パラメータを以下の 3 つに集約する方法^{14) 16)}で最適化した数値解について近似した。

$$\gamma_{dc} = \gamma_{dcN+1} \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \quad (2 \leq N \text{ の場合に定義}) \quad (7)$$

$$\zeta_{dn} = \zeta_d \quad (8)$$

ここで、

n : 振動数の小さい順につけた TMD 番号 γ_{dc} : TMD 中心振動数 α : TMD 隣接振動数比 ζ_d : 各 TMD 共通の減衰定数

式(6)(7)より各 TMD の振動数比は以下のように表される。

$$\gamma_{dn} = \gamma_{dc} \alpha^{n-1} \quad (9)$$

TMD の所要ストロークは、ロバスト幅 $1 - \Delta\gamma_{sa} \leq \gamma_s \leq 1 + \Delta\gamma_{sa}$ の範囲における最大ストロークである。

$$D_{dn}^{req} = \{ \max(D_{dn}^{rmax}) \mid (1 - \Delta\gamma_{sa} \leq \gamma_s \leq 1 + \Delta\gamma_{sa}) \} \quad (10)$$

D_{dn}^{req} : n 番目 TMD 所要ストローク (応答倍率)

D_{dn}^{rmax} : $D_{dn}^r(\beta)$ の最大値

所要ストロークの近似設計式は、実際は同じ仕様の TMD を複数個配置することが多いと考えられるので、最大のストロークを持つ TMD について作成した (以下 D_{dn}^{req} の添え字 n を省略)。

設計式で近似する総質量比の範囲は、建設系構造物への適用を想定して $0.001 \leq \mu \leq 0.04$ とした。また、主系の許容応答倍率の範囲は上限を $D_{sa} \leq 40$ とし、構造減衰 ζ_s は極めて小さい場合を想定して $\zeta_s = 0$ とした。

近似設計式は以下の手順で作成した。

① D_{sa} を実現できる最小の総質量比 μ_{min} と近似範囲の上限である $\mu = 0.04$ における最適数値解を、 D_{sa} の関数としてそれぞれ近似する。

② その両者を通るような μ の関数で、 $\mu_{min} \leq \mu \leq 0.04$ における最適数値解を近似する。

①の関数形としては、べき・指数関数などの簡便なものを適宜組み合わせた。②は μ のべき関数とし、その係数は D_{sa} の関数として変化させた。設計式の各定数は、最小自乗法で求めたのち、設計式で対象とした μ 、 D_{sa} の範囲で誤差が平均化されるよう微調整を行った。

<ロバスト幅を考慮しない応答最適化>

$$\mu_{min} = \frac{2}{D_{sa}^2 - 1} \quad (N=1), \quad \mu_{min} = \left(\frac{1}{2A_{1\mu min} D_{sa}} \right)^{\frac{1}{A_{2\mu min}}} \quad (N=2 \sim 4) \quad (11-1)$$

(ただし、 $\mu_{min} \leq 0.04$)

$$\gamma_{dc\mu min} = \frac{1}{1 + B_{\mu min} \mu_{min}} \quad (11-2)$$

$$\alpha_{\mu min} = 1 + C_{1\mu min} (\mu_{min})^{C_{2\mu min}} \quad (N=2 \sim 4) \quad (11-3)$$

$$\zeta_{d\mu min} = \sqrt{\frac{D_{\mu min} \mu_{min}}{1 + \mu_{min}}} \quad (11-4)$$

$$D_{d\mu min}^{req} = \frac{E_{1\mu min}}{\mu_{min}} + E_{2\mu min} \quad (11-5)$$

ここで、

μ_{min} : D_{sa} が実現できる最小の総質量比

$\alpha_{\mu min}$ 、 $\gamma_{dc\mu min}$ 、 $\zeta_{d\mu min}$ 、 $D_{d\mu min}^{req}$: μ_{min} における α 、 γ_{dc} 、 ζ_d の最適値 (ロバスト幅を考慮しないときの応答最適化条件) と TMD の所要ストローク

$A_{1\mu min} \sim E_{2\mu min}$ の各定数は N ごとに表-1 に示されている。 $N=1$ の μ_{min} 、 $\gamma_{dc\mu min}$ 、 $\zeta_{d\mu min}$ は、Den Hartog の応答最適条件³⁾である。

< $\mu \leq 0.04$ における同調ロバスト幅最適化>

$$\Delta\gamma_{sap4\%} = A_{1\mu 4\%} \left[-1 + \exp \left\{ A_{2\mu 4\%} \left(\frac{1}{2D_{sa}} - \frac{1}{2D_{sap4\%}} \right) \right\} \right] + A_{3\mu 4\%} \left(\frac{1}{2D_{sa}} - \frac{1}{2D_{sap4\%}} \right) \quad (12-1)$$

$$\gamma_{dc\mu 4\%} = \begin{cases} B_{1\mu 4\%} D_{sa}^2 + B_{2\mu 4\%} D_{sa} + B_{3\mu 4\%} & (N=1 \& 4 (D_{sa} \leq 8.02)) \\ B_{1\mu 4\%} D_{sa} + B_{2\mu 4\%} \sqrt{D_{sa}} + B_{3\mu 4\%} & (N=2, 3 \& 4 (8.02 \leq D_{sa})) \end{cases} \quad (12-2)$$

$$\alpha_{\mu 4\%} = C_{1\mu 4\%} D_{sa}^3 + C_{2\mu 4\%} D_{sa}^2 + C_{3\mu 4\%} D_{sa} + C_{4\mu 4\%} \quad (N=2 \sim 4) \quad (12-3)$$

$$\zeta_{d\mu 4\%} = D_{1\mu 4\%} D_{sa}^3 + D_{2\mu 4\%} D_{sa}^2 + D_{3\mu 4\%} D_{sa} + D_{4\mu 4\%} \quad (12-4)$$

$$D_{d\mu 4\%}^{req} = \frac{E_{1\mu 4\%}}{D_{sa}} + E_{2\mu 4\%} D_{sa} + E_{3\mu 4\%} \quad (12-5)$$

ここで、

$\Delta\gamma_{sap4\%}$: 総質量比 $\mu = 0.04$ における同調ロバスト幅

$D_{sap4\%}$: 総質量比 $\mu = 0.04$ で実現できる最小の D_{sa}

$\alpha_{\mu 4\%}$ 、 $\gamma_{dc\mu 4\%}$ 、 $\zeta_{d\mu 4\%}$ 、 $D_{d\mu 4\%}^{req}$: 総質量比 $\mu = 0.04$ における α 、 γ_{dc} 、 ζ_d の最適値と TMD の所要ストローク

$A_{1\mu 4\%} \sim E_{3\mu 4\%}$ の各定数は N ごとに表-1 に示されている。以上式(11)(12)を用いて、同調ロバスト幅 $\Delta\gamma_{sa}$ を最大にする最適解の近似設計式は以下のように表される。

< $\mu_{min} \leq \mu \leq 0.04$ の同調ロバスト幅最適化>

$$\Delta\gamma_{sa} = \begin{cases} \Delta\gamma_{sap4\%} \left[A \left(\frac{\mu - \mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right) + (1-A) \left(\frac{\mu - \mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right)^2 \right] & (N=1, 2 \& 3, 4 (\mu_{c1} \leq \mu)) \\ \Delta\gamma_{sap4\%} \left[A \left(\frac{\mu_{c1} - \mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right) + (1-A) \left(\frac{\mu_{c1} - \mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right)^2 \right] & \\ \times \left(\frac{\mu - \mu_{min}}{\mu_{c1} - \mu_{min}} \right) & (N=3, 4 (\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{c1})) \end{cases} \quad (13-1)$$

$$\gamma_{dcopt} = \gamma_{dc\mu min} - (\gamma_{dc\mu min} - \gamma_{dc\mu 4\%}) \left(\frac{\mu - \mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right)^B \quad (13-2)$$

$$\alpha_{opt} = \begin{cases} \left[C\mu^2 + \left[-C(0.04 + \mu_{min}) + \frac{1}{0.04 - \mu_{min}} \right] \mu \right. \\ \left. + 0.04\mu_{min}C - \frac{\mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right] (\alpha_{\mu 4\%} - \alpha_{\mu min}) + \alpha_{\mu min} & (N=2(\mu_{c2} \leq \mu) \text{ \& 3, 4}) \\ \left[C\mu_{c2}^2 + \left[-C(0.04 + \mu_{min}) + \frac{1}{0.04 - \mu_{min}} \right] \mu_{c2} \right. \\ \left. + 0.04\mu_{min}C - \frac{\mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right] \times \frac{(\alpha_{\mu 4\%} - \alpha_{\mu min})(\mu - \mu_{min})}{\mu_{c2} - \mu_{min}} + \alpha_{\mu min} & (N=2(\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{c2})) \end{cases} \quad (13-3)$$

$$\zeta_{dopt} = \left[D\mu^2 + \left[-D(0.04 + \mu_{min}) + \frac{1}{0.04 - \mu_{min}} \right] \mu \right. \\ \left. + 0.04\mu_{min}D - \frac{\mu_{min}}{0.04 - \mu_{min}} \right] (\zeta_{d\mu 4\%} - \zeta_{d\mu min}) + \zeta_{d\mu min} \quad (13-4)$$

$$D_d^{req} = D_d^{req\mu min} \left[\frac{E}{\mu} + \frac{1 - \frac{D_d^{req\mu 4\%}}{D_d^{req\mu min}} - \left(\frac{1}{\mu_{min}} - \frac{1}{0.04} \right) E}{\frac{1}{\mu_{min}^2} - \frac{1}{0.0016}} \right] \frac{1}{\mu^2} \\ + 1 - \frac{E}{\mu_{min}} \frac{1 - \frac{D_d^{req\mu 4\%}}{D_d^{req\mu min}} - \left(\frac{1}{\mu_{min}} - \frac{1}{0.04} \right) E}{1 - \frac{\mu_{min}^2}{0.0016}} \quad (13-5)$$

ただし、

$$A = a_1 D_{sa}^2 + a_2 D_{sa} + 1 \quad (14-1)$$

$$B = b_1 D_{sa}^2 + b_2 D_{sa} + 1 \quad (14-2)$$

$$C = c_1 D_{sa}^{c_2} \quad (N=2 \sim 4) \quad (14-3)$$

$$D = d D_{sa}^2 + 1 \quad (14-4)$$

$$E = \frac{e_1}{D_{sa}^2} + \frac{e_2}{D_{sa}} + e_3 \quad (N=1 \sim 3), \quad E = e_1 D_{sa}^2 + \frac{e_2}{D_{sa}} + e_3 \quad (N=4) \quad (14-5)$$

ここで、

$\Delta\gamma_{sa}$: 同調ロバスト幅 α_{opt} , γ_{dcopt} , ζ_{dopt} , D_d^{req} : α , γ_{dc} , ζ_d の最適値と TMD の所要ストローク

μ_{c1} , μ_{c2} , $a1 \sim e3$ の各定数は N ごとに表-1 に示されている。これらの式 (11) ~ (14) により、TMD 個数 N 、総質量比 μ 、主系許容応答倍率 D_{sa} が与えられれば、TMD 諸元の最適値 $\{\alpha_{opt}, \gamma_{dcopt}, \zeta_{dopt}\}$ とその際に得られる同調ロバスト幅 $\Delta\gamma_{sa}$ 、所要ストローク D_d^{req} が求められる。図-3 は、総質量比 $\mu = \mu_{min}$ と応答最適条件での等価付加減衰 $\zeta_{eq} = 1/(2D_{sa})$ を近似式 (11-1) と併せて示したものである。また、図-4 (1) ~ (5) は、ロバスト最適解を $N=4$ を例として近似式 (13-1) ~ (13-5) と併せて示したものである。いずれも近似式は数値解を良好に近似している。近似設計式は、近似した $0.001 \leq \mu \leq 0.04$, $D_{sa} \leq 40$ の範囲で、表-2 に示すように、式 (13-1) の $\Delta\gamma_{sa}$ 内で主系の応答倍率が許容値に対し 2.7%、TMD ストロークが式 (13-5) の値に対し 2.8% 内の超過率に収まることを確

表-1 近似設計式の定数

	N=1	N=2	N=3	N=4
A1 μ_{min}	-	3.874E-01	3.927E-01	4.011E-01
A2 μ_{min}	-	4.959E-01	4.904E-01	4.891E-01
B μ_{min}	1	8.821E-01	8.108E-01	8.411E-01
C1 μ_{min}	-	6.321E-01	4.235E-01	3.711E-01
C2 μ_{min}	-	5.091E-01	4.945E-01	5.130E-01
D μ_{min}	3.750E-01	1.694E-01	1.045E-01	7.131E-02
E1 μ_{min}	1.033E+00	1.435E+00	1.757E+00	2.101E+00
E2 μ_{min}	1.047E+00	2.854E+00	5.923E+00	2.596E+00
A1 $\mu 4\%$	3.687E-04	8.759E-04	2.113E-03	3.478E-03
A2 $\mu 4\%$	-1.150E+02	-9.104E+01	-7.657E+01	-6.864E+01
A3 $\mu 4\%$	-2.386E+00	-2.786E+00	-2.627E+00	-2.262E+00
Dsa $\mu 4\%$	7.141E+00	6.370E+00	6.172E+00	6.017E+00
B1 $\mu 4\%$	-2.156E-04	-1.875E-02	-1.795E-02	see the
B2 $\mu 4\%$	2.490E-03	1.065E-01	9.926E-02	bottom
B3 $\mu 4\%$	9.541E-01	8.152E-01	8.328E-01	table *
C1 $\mu 4\%$	-	0	0	-1.801E-06
C2 $\mu 4\%$	-	3.430E-04	1.169E-04	1.943E-04
C3 $\mu 4\%$	-	1.612E-02	1.311E-02	7.090E-03
C4 $\mu 4\%$	-	1.013E+00	1.001E+00	1.024E+00
D1 $\mu 4\%$	2.122E-07	-3.825E-06	-2.458E-06	-2.232E-06
D2 $\mu 4\%$	2.042E-04	3.093E-04	2.113E-04	1.738E-04
D3 $\mu 4\%$	2.021E-03	0	0	0
D4 $\mu 4\%$	1.019E-01	6.952E-02	5.572E-02	4.729E-02
E1 $\mu 4\%$	-8.701E+01	-1.300E+02	-2.718E+02	-3.888E+02
E2 $\mu 4\%$	2.162E-01	4.458E-02	-2.836E-01	-2.436E-01
E3 $\mu 4\%$	3.716E+01	5.987E+01	9.383E+01	1.167E+02
μ_{c1}	-	-	0.012	0.010
a1	-5.527E-05	-4.337E-06	6.028E-05	1.266E-04
a2	-8.376E-04	2.974E-03	3.075E-03	1.710E-03
b1	0	-4.462E-04	-6.010E-04	-6.348E-04
b2	2.300E-02	3.627E-02	4.053E-02	4.142E-02
μ_{c2}	-	0.012	-	-
c1	-	1.623E+00	1.136E+00	2.522E+00
c2	-	1.391E+00	1.311E+00	9.301E-01
d	1.404E-01	2.313E-02	7.324E-04	-6.775E-02
e1	1.334E+00	1.939E+00	2.013E+00	1.050E-06
e2	8.645E-02	3.633E-02	2.033E-02	2.254E-01
e3	-1.371E-03	-6.905E-04	-3.393E-04	-5.988E-03

※	N=4		
	$7 \leq D_{sa} \leq 8.02$	$8.02 \leq D_{sa} \leq 11.02$	$11.02 \leq D_{sa}$
B1 $\mu 4\%$	9.840E-04	3.776E-03	-1.733E-02
B2 $\mu 4\%$	-1.656E-02	-7.055E-02	9.326E-02
B3 $\mu 4\%$	1.032E+00	1.285E+00	8.473E-01

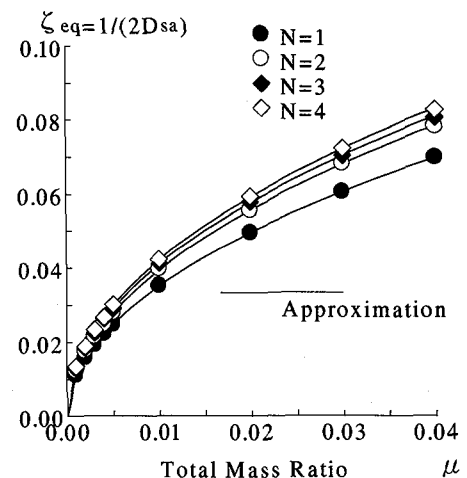


図-3 総質量比と応答最適化

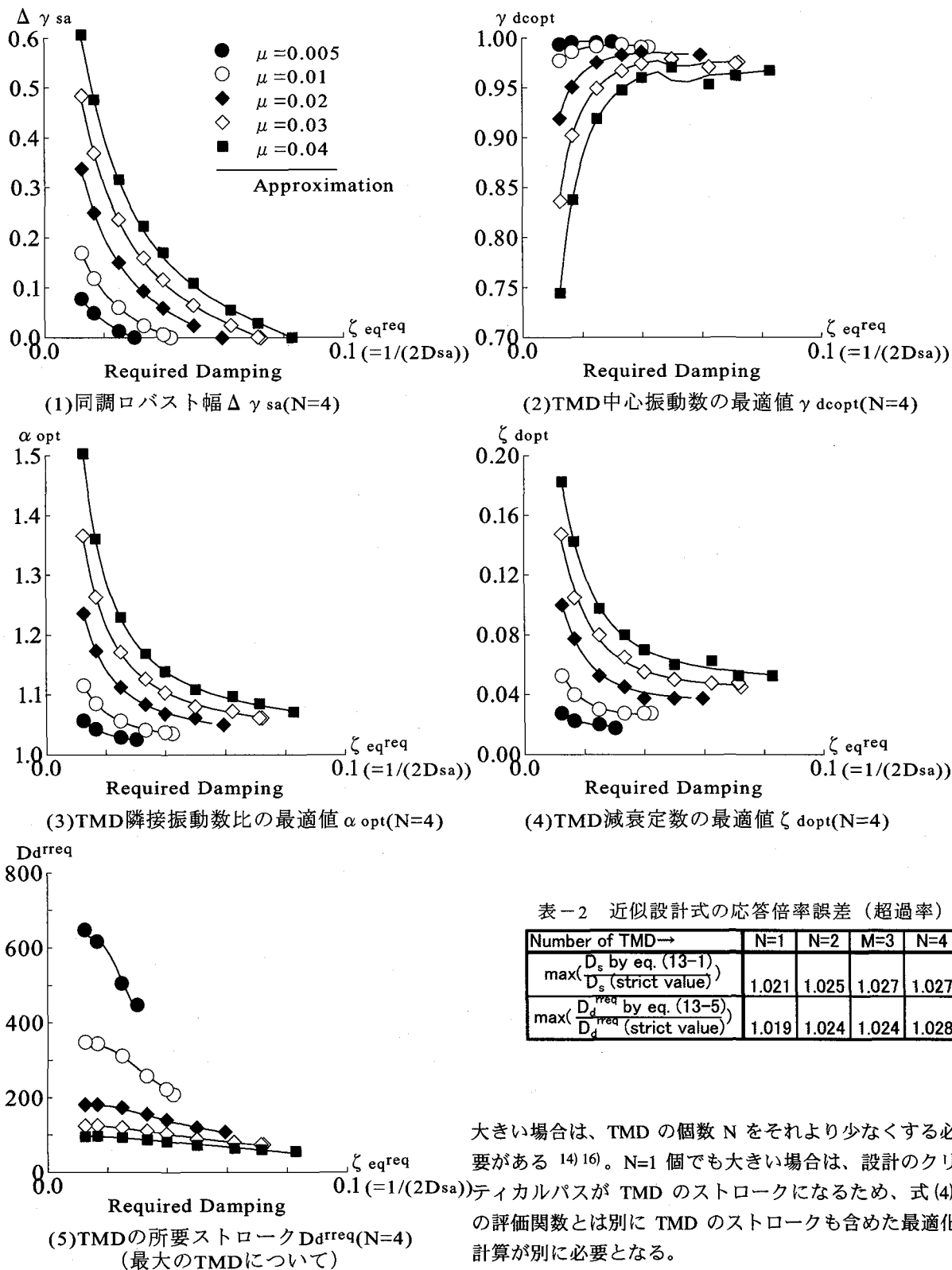


図-4 複数TMDの同調ロバスト幅最適解 (TMD個数N=4)

認した。

なお、個数 N が多いと最適解におけるロバスト幅も大きくなるが、TMD の所要ストローク D_{dreq} も増加する。式 (13-5) で得られるストローク D_{dreq} が許容値より

大きい場合は、TMD の個数 N をそれより少なくする必要がある^{14) 16)}。N=1 個でも大きい場合は、設計のクリティカルパスが TMD のストロークになるため、式 (4) の評価関数とは別に TMD のストロークも含めた最適化計算が別に必要となる。

4. TMD 減衰のロバスト幅も考慮した設計

3. では、同調ロバスト幅に着目した最適設計を示したが、実設計では同時に TMD の減衰 ζ_d に対するロバスト性も考慮する必要がある。そこで、少数個方式において、TMD 減衰の変動幅を所要値として与えた上で、同調ロバスト幅を最大化することを試みた。TMD 減衰の変動幅は以下のようにノミナル値との比率で考える。

$$Z = \frac{|\Delta \zeta_{dn}|}{\zeta_{dn}} \quad (15-1)$$

$$\Delta \zeta_{dn} = \tilde{\zeta}_{dn} - \zeta_{dn} \quad (15-2)$$

ここで

Z : TMD 減衰の変動幅、 $\Delta \zeta_{dn}$: n 番目 TMD のノミナル値 ζ_{dn} からの変動値、 $\tilde{\zeta}_{dn}$: 変動後の n 番目 TMD の減衰定数

また、最悪条件としてすべての TMD が片方へ一斉にずれる場合（各 TMD で Z が共通）を想定すると、最適化の評価関数 J は式 (4) の代わりに以下になる。

$$J = \{ \max(\Delta) \mid D_{smax} \leq D_{sa} ((1 - \Delta \leq \gamma_s \leq 1 + \Delta) \cap (1 - Z^{req} \leq \tilde{\zeta}_{dn}/\zeta_{dn} \leq 1 + Z^{req} (n=1, 2, \dots, N))) \} \rightarrow \max. \quad (16)$$

ここで、

Z^{req} : Z の設計所要値（設計で考慮する TMD 減衰の変動幅）

TMD 減衰の変動幅を考慮して同調ロバスト幅を最適化した結果を、図-5 に示す。横軸が TMD 減衰の変動幅の所要値 Z^{req} 、縦軸が同調ロバスト幅 $\Delta \gamma_{sa}$ であり、総質量比 $\mu=0.02$ 、許容応答倍率 $D_{sa}=20$ とし、複数方式では各 TMD を等質量として TMD の振動数 γ_{dn} と減衰 ζ_{dn} を 1 つ 1 つ個別に最適化した結果である。TMD 減衰の変動幅を考慮した場合 ($Z^{req}>0$) にも、複数方式は単一方式に比べ高い同調ロバスト幅が得られることが分かる。図-5 に示した結果のうち、個数 $N=1, 4$ 、 $Z^{req}=0, 0.4$ について、 $\Delta \zeta_{dn}/\zeta_{dn}$ を横軸、主系振動数の振動数比 γ_s を縦軸にとり、主系最大応答倍率 D_{smax} を等高線で表したものを図-6 に示す。単一方式では、許容領域 ($D_{smax}=20$) がどちらも楕円状なのに対し、4 個方式では $Z^{req}=0$ では楕形に、 $Z^{req}=0.4$ では四角形に近い形状となっている。複数方式はこのようにロバスト性の設計条件に応じた柔軟な設計が可能であるといえる。

次に、TMD 減衰の変動幅を考慮した場合の設計パラメータの補正方法を検討した。図-7 は、上記の計算で得られた TMD 振動数 γ_{dn} と減衰 ζ_{dn} の最適値のうち $N=4$ の例である。これより、TMD 減衰の変動幅を考慮した場合 ($Z^{req}>0$) は、TMD 減衰 ζ_{dn} の値は余り変化せず、振動数 γ_{dn} の分布を若干縮小させればよいことがわかる。そこで、等質量の複数方式で式 (6) ~ (8) の 3 パラメータによる最適化計算を、総質量比 μ 、所要の制振効果 D_{sa} を変えて実施し、TMD 振動数の分布幅ともいえる α_{opt}^N の値を調査した。図-8 は、 $Z^{req}=0$ における $\Delta \gamma_{sa}$ と、 α_{opt}^N の $Z^{req}=0$ に対する縮小幅の関係を、TMD 減衰の変動幅 $Z^{req}=0.2$ と 0.4 についてプロットしたものである。これより、TMD の総質量比 μ によらず、 α_{opt}^N の縮小幅は $Z^{req}=0$ における $\Delta \gamma_{sa}$ でほぼ整理できることが分かる。この性質を利用して、調査した α_{opt}^N の縮小幅を基に、同調ロバスト幅のみを考慮している近似設計式 (13-3) を補正する補正式を導いた。

$$\alpha_{opt} = v^{1/N} \alpha_{opt} \quad (17)$$

$$v = A_v Z^{req 2} + B_v Z^{req} + 1 \quad (18)$$

$$A_v = a_{1v} \Delta \gamma_{sa}^2 + a_{2v} \Delta \gamma_{sa} \quad (19-1)$$

$$B_v = b_{1v} \Delta \gamma_{sa}^2 + b_{2v} \Delta \gamma_{sa} + b_{3v} \quad (19-2)$$

ここで、

α_{opt} : $Z^{req}=0$ における α の最適値（式 13-3） α_{opt}' : TMD 減衰のロバスト幅を考慮したときの α の最適値
 v : α_{opt}^N の縮小幅 $\Delta \gamma_{sa}$: $Z^{req}=0$ における同調ロバスト幅 $\Delta \gamma_{sa}$ （式 (13-1)）

式 (19) 中の定数は表-3 に示す通りである。図-8 には、補正式の曲線を併せて示しているが、数値解を良好に近似している。総質量比 $\mu=0.005 \sim 0.04$ 、 $D_{sa}=10 \sim 40$ 、 $Z^{req}=0 \sim 0.4$ について補正式の検算を行い、数値最適解で得られた $\Delta \gamma_{sa}$ の範囲で、主系の応答倍率が許容値に対し、 $N=2$ で 3.8%、 $N=3$ で 3.7%、 $N=4$ で 2.9% 内の超過率に収まることを確認した。

5. 不等質量の場合の同調ロバスト最適設計

実構造物では、架設状態で架設ステップの進捗に伴って TMD を増設するときなど、TMD の設置場所が分散することも考えられ、そのような場合は制振対象モードにとっては各 TMD が等質量ではなくなる。そこで、不等質量とした場合の少数個 TMD の同調ロバスト幅の最適化を試み、単一方式に対する優位性を調査した。最適化の評価関数は式 (4) と同じである。

不等質量としたときの各 TMD の質量配分の種類は無限に考えられるが、ここでは、1 つの TMD に質量を集中させて残りを等分した場合を扱った。集中の度合いは、各個数 N ($2 \leq N$) の等質量分 μ/N を N より多い TMD 個数で集中させたケースに加え、総質量の 9/10 を集中させたケースを扱った。総質量比 $\mu=0.02$ 、主系許容応答倍率 $D_{sa}=20$ としたときの最適解の結果を表-4 と図-9 に示す。これらの結果で特徴的なのは、総質量比の 9/10 を 1 つの TMD に集中させたケースでも、複数方式は依然として単一方式より 1.5 倍程度の大きな同調ロバスト幅を有していることである。このようなかなり極端な不等質量でも単一方式より大きな同調ロバスト幅が得られるため、例えば、架設系でモード振幅が大きい位置の TMD に加えて小さい位置の TMD も積極的に利用し、架設ステップに伴う主系の振動数変動にロバストな調整を行うといったことも考えられる。ただし、集中度が大きくなるとロバスト幅は低下する傾向にあり、同調ロバスト幅を最大化する上では、等質量分布が最も有利といえる。ところで、不等質量とすると、各 TMD 質量の大きさと振動数の順番の組み合わせにより、数値探索では複数の局所解が存在する。そこで、探索初期値を変えて、これらの局所解を求めた。結果を表-5 に示すが、大きな質量をもった TMD を中間に配置する場合が最も有利なようである。

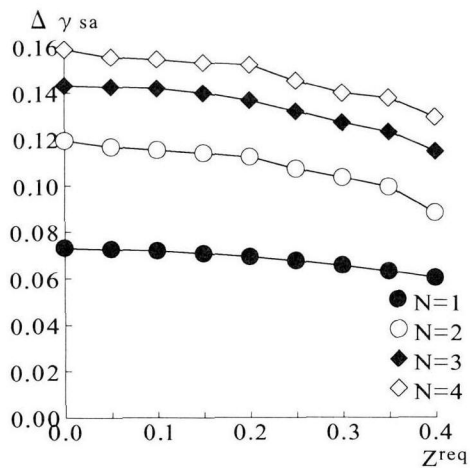


図-5 TMD減衰定数変動幅と同調比ロバスト性

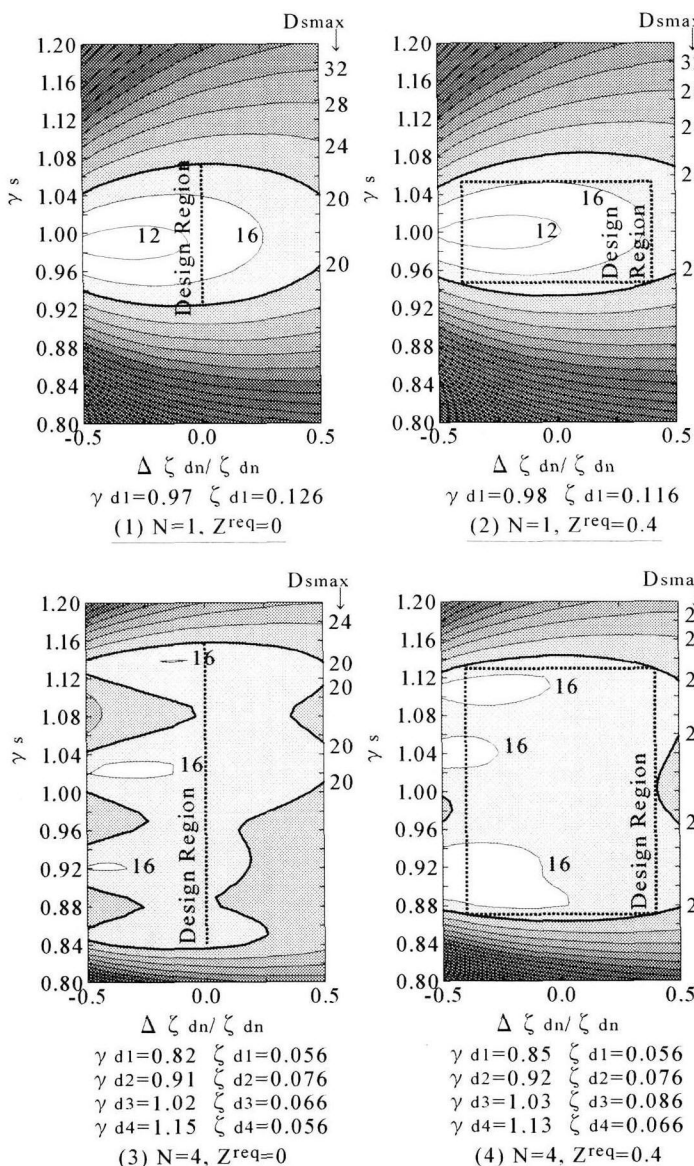
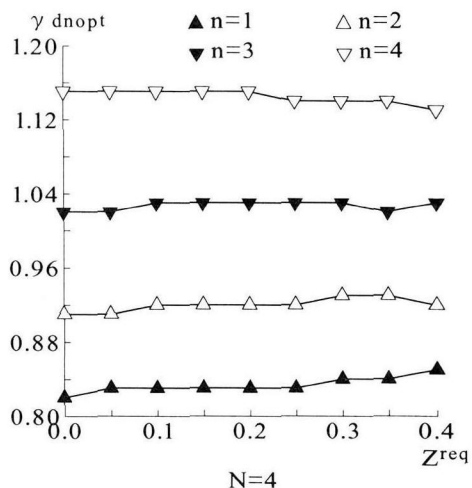


図-6 主系最大応答倍率の等高線($D_{sa}=20$)
 (TMD減衰定数の変動幅を考慮しない場合 (左)
 と考慮した場合 (右))

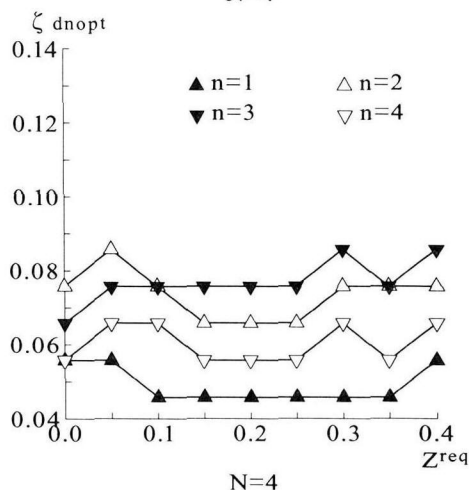


図-7 TMD減衰定数の変動幅を考慮した
 場合の最適解 (TMD個数 $N=4$)

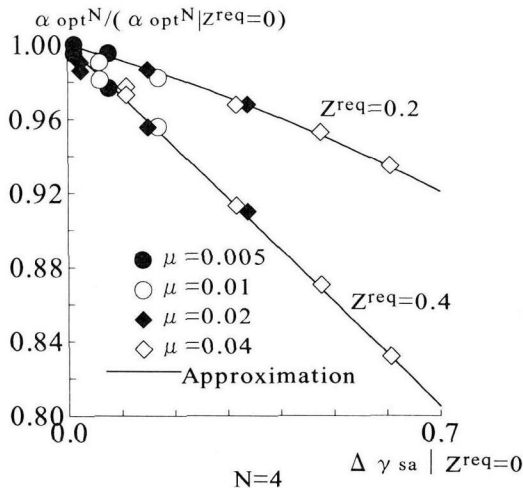


図-8 TMD減衰定数の変動幅を考慮した場合
 のTMD分布幅の縮小率 (TMD個数 $N=4$)

表-3 TMD減衰の変動幅を考慮した補正式の定数

	N=2	N=3	N=4
a1v	1.330E+00	8.320E-01	1.070E+00
a2v	-1.444E+00	-1.276E+00	-1.412E+00
b1v	-9.975E-01	-2.269E-01	-4.524E-01
b2v	-1.397E-02	-2.984E-01	-1.129E-01
b3v	-3.858E-02	0	0

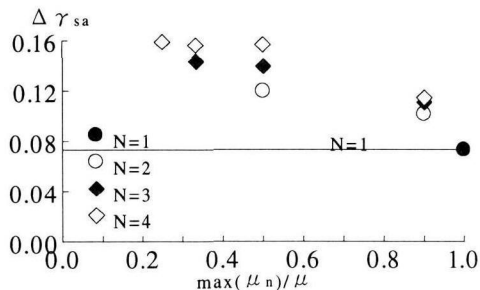
表－４ 不等質量の同調ロバスト幅

No. of TMD (N)	n-th TMD	μ_n	γ_{dn}	ζ_{dn}	$\Delta\gamma_{sa}$	Ratio to N=1
1	1	0.020	0.97	0.1257	0.073	1.000
2	1	0.010	0.88	0.0957	0.119	1.633
	2	0.010	1.07	0.0857		
	1	0.018	0.93	0.1357	0.101	1.385
	2	0.002	1.10	0.0357		
3	1	0.006666	0.85	0.0557	0.143	1.957
	2	0.006666	0.97	0.0857		
	3	0.006666	1.12	0.0657		
	1	0.005	0.85	0.0557	0.139	1.906
	2	0.010	0.97	0.1257		
	3	0.005	1.12	0.0657		
	1	0.001	0.86	0.0257	0.111	1.513
	2	0.018	0.97	0.1157		
	3	0.001	1.13	0.0257		
4	1	0.005	0.82	0.0557	0.159	2.173
	2	0.005	0.91	0.0757		
	3	0.005	1.02	0.0657		
	4	0.005	1.15	0.0557		
	1	0.004444	0.82	0.0557	0.156	2.135
	2	0.006666	0.91	0.0857		
	3	0.004444	1.03	0.0657		
	4	0.004444	1.15	0.0457		
	1	0.003333	0.82	0.0457	0.157	2.143
	2	0.010	0.92	0.0957		
	3	0.003333	1.06	0.0557		
	4	0.003333	1.16	0.0457		
	1	0.000666	0.86	0.0157	0.114	1.563
	2	0.018	0.95	0.1357		
	3	0.000666	1.09	0.0357		
	4	0.000666	1.13	0.0157		

表－５ 不等質量の同調ロバスト幅（振動数順の影響）

No. of TMD (N)	n-th TMD	μ_n	γ_{dn}	ζ_{dn}	$\Delta\gamma_{sa}$	Ratio to N=1
2	1	0.018	0.93	0.1357	0.101	1.385
	2	0.002	1.10	0.0357		
	1	0.002	0.88	0.0357	0.098	1.336
	2	0.018	1.01	0.1357		
3	1	0.018	0.93	0.1057	0.107	1.459
	2	0.001	1.08	0.0257		
	3	0.001	1.13	0.0157		
	1	0.001	0.86	0.0257	0.111	1.513
	2	0.018	0.97	0.1157		
	3	0.001	1.13	0.0257		
	1	0.001	0.86	0.0257	0.103	1.401
	2	0.001	0.89	0.0257		
	3	0.018	1.01	0.1257		
4	1	0.018	0.92	0.1357	0.111	1.516
	2	0.000666	1.07	0.0357		
	3	0.000666	1.13	0.0257		
	4	0.000666	1.11	0.0357		
	1	0.000666	0.86	0.0157	0.114	1.563
	2	0.018	0.95	0.1357		
	3	0.000666	1.09	0.0357		
	4	0.000666	1.13	0.0157		
	1	0.000666	0.86	0.0257	0.111	1.518
	2	0.000666	0.87	0.0257		
	3	0.018	0.98	0.1357		
	4	0.000666	1.13	0.0257		
	1	0.000666	0.88	0.0357	0.103	1.407
	2	0.000666	0.86	0.0157		
	3	0.000666	0.89	0.0357		
	4	0.018	1.01	0.1157		

： the best order of masses



図－９ 不等質量の集中度と同調ロバスト幅

6. 近接２モード同時制振

同調型のダンパーである TMD は、１モードに対する制振に用いるのが基本であり、５．までの検討はすべて１モードに対する制振問題である。しかし、実構造物では近接２モードの制振に直面することも考えられ、近接２モードの同時制振問題における少数個 TMD の可能性を検討した。

6.1 応答最適化

まず、ロバスト性を考慮せず、近接２モードに対する制振効果を最大にする最適化を行った。近接２モードの条件は、モード質量 $M_{s1,2}$ （以下添え字 1,2 は各モードを表す）の比を 1:1、モード外力は同相で振幅 $F_{s1,2}$ の比を固有振動数 $\omega_{s1,2}$ の 2 乗の比 ($F_{s2}/F_{s1}=\omega_{s2}^2/\omega_{s1}^2$) として各 TMD を等質量とした。周波数応答は、主系 2 モー

ドと複数 TMD の連成系の運動方程式^{13) 17)}から求め、最適化においては、各モードの外力振幅の静的換算変位 ($X_{st1,2}=F_{s1,2}/(M_{s1,2}\omega_{s1,2}^2)$) で無次元化した応答倍率 ($D_{s1,2}=|X_{s1,2}|/|X_{st1,2}|$) を両モードで等しく最小化させた。従って、最適化の評価関数 J は以下のである。

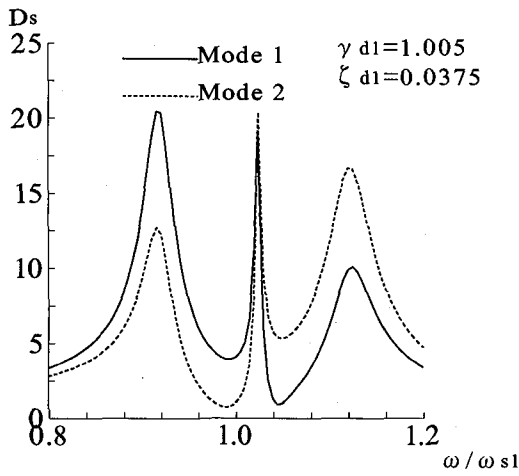
$$J=D_{smax}(=D_{s1max}=D_{s2max})\rightarrow \min. \quad (20)$$

$D_{s1,2max}$ ：主系各モードの最大応答倍率

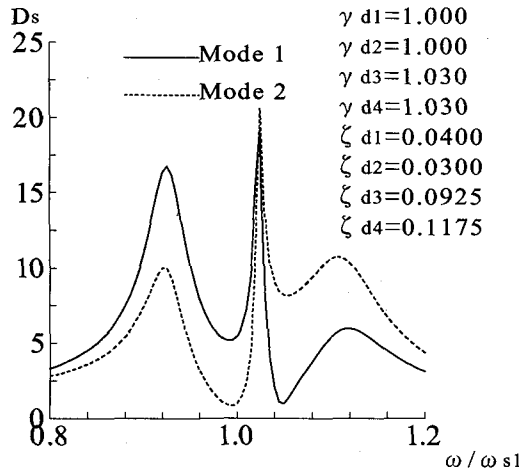
図－１０は、 $\omega_{s2}/\omega_{s1}=1.05$ の最適解に対する応答曲線である。最大応答については $N=1$ の単一方式と比べて $N=4$ が優位な結果は得られなかったが、共振域全体の応答は $N=4$ の方が若干小さくなっている。図－１１は、主系 2 モードの振動数比 ω_{s2}/ω_{s1} を変化させて最適化した結果得られた最大応答倍率である。振動数比が増大すると、 $N=1$ の単一方式は両モードとも同調条件を外れて制振効果が劣化し（最適振動数は両モード振動数の間に存在）、 $N=3$ も中間の振動数に位置する TMD が有効に機能せず効果が劣化している。しかし、TMD 個数 N が 2～4 とモードの数以上であれば、それらの差はせいぜい主系 1 自由度に対する $N=1, 2$ の差と同程度である。山口らは、近接モードが存在する場合の 1 モードに対する応答最適化問題で、最大応答については多数個方式にする効果は小さいという検討結果を示している¹²⁾が、今回の近接 2 モードを同時に制振する場合も、複数にすることによる改善は僅かである。

6.2 同調ロバスト最適化

次に、近接２モードの同時制振における同調ロバスト

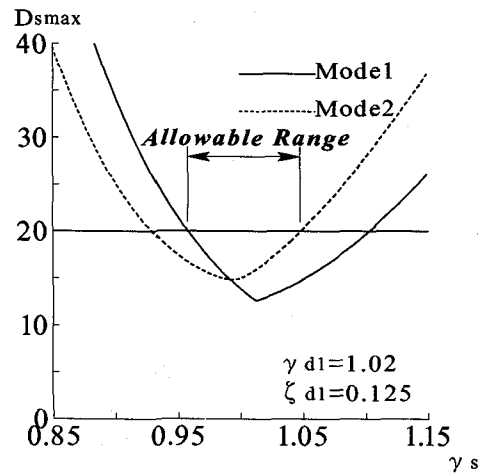


(1)N=1

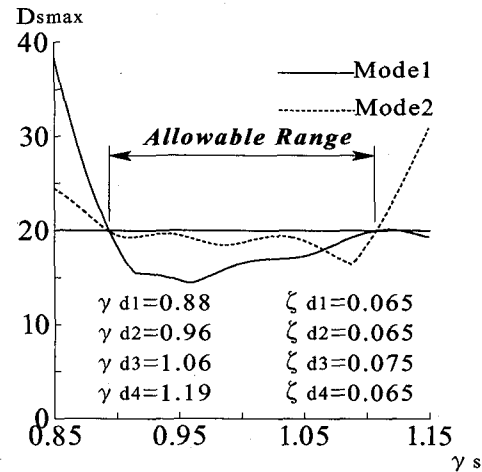


(2)N=4

$M_{s2}/M_{s1}=1$, $\zeta_{s1}=\zeta_{s2}=0$, $\omega_{s2}/\omega_{s1}=1.05$
 $F_{s2}/F_{s1}=1.21$, $(\sum m d_n)/M_{s1, 2}=0.02$
 図-10 近接2モード同時制振の主系応答

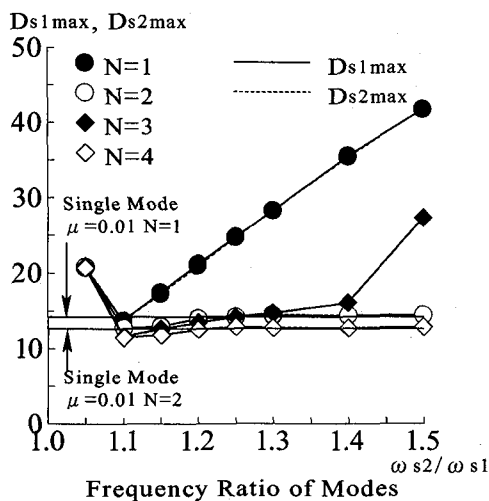


(1)N=1



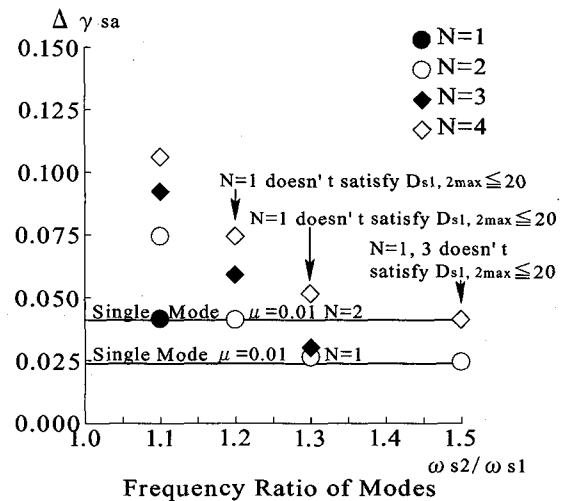
(2)N=4

$M_{s2}/M_{s1}=1$, $\zeta_{s1}=\zeta_{s2}=0$, $\omega_{s2}/\omega_{s1}=1.1$
 $F_{s2}/F_{s1}=1.21$, $(\sum m d_n)/M_{s1, 2}=0.02$, $D_{sa}=20$
 図-12 近接2モード同時制振の同調ロバスト性



$M_{s2}/M_{s1}=1$, $\zeta_{s1}=\zeta_{s2}=0$, $F_{s2}/F_{s1}=(\omega_{s2}/\omega_{s1})^2$
 $(\sum m d_n)/M_{s1, 2}=0.02$

図-11 近接2モードの振動数比と主系応答の関係



$M_{s2}/M_{s1}=1$, $\zeta_{s1}=\zeta_{s2}=0$, $F_{s2}/F_{s1}=(\omega_{s2}/\omega_{s1})^2$
 $(\sum m d_n)/M_{s1, 2}=0.02$, $D_{sa}=20$

図-13 近接2モードの振動数比と同調ロバスト幅の関係

幅の最大化を試みた。近接 2 モードと TMD の条件は 6.1 と同様とし、許容応答倍率は両モードとも $D_{sa}=20$ とし、構造物の近接 2 モードの固有振動数 $\gamma_{s1,2}$ が同じ比率で変動する ($\gamma_{s1}=\gamma_{s2}=\gamma_s$) と仮定している。最適化の評価関数 J は以下のものである。

$$J=\Delta\gamma_{sa}=\{\max(\Delta) \mid D_{s1\max}, D_{s2\max}\leq D_{sa} \\ (1-\Delta\leq\gamma_{s1}=\gamma_{s2}=\gamma_s\leq 1+\Delta)\} \rightarrow \max. \quad (21)$$

$\gamma_{s1,2}$: 主系各モードの固有振動数変動比

図-12 は、主系振動数の変動比に対する近接 2 モードの最大応答倍率を表したものである。TMD 個数 $N=4$ の場合は、 $N=1$ と比較して 2 モードの許容 γ_s 領域が揃っており、より効率的に各 TMD を 2 モードの制振に利用できている。図-13 は、2 モードの固有振動数比 ω_{s2}/ω_{s1} を変化させたときの同調ロバスト幅 $\Delta\gamma_{sa}$ を示したものであるが、複数方式は単一方式より大きなロバスト幅が得られている。ただし、2 モードの振動数比 ω_{s2}/ω_{s1} が大きい場合、6.1 と同様に、 $N=3$ が $N=2$ より不利な場合がある。振動数比の他にもモード質量比、外力比、許容応答倍率比といった主系の条件や TMD の質量分布によって、TMD 個数とロバスト幅の優劣の関係はそれぞれ異なってくることが予想される。

7. まとめ

複数 TMD (MTMD) の中でも製作や調整作業が容易となる少数個 TMD を対象として、基本的な等質量条件におけるロバスト幅の近似設計式を作成した。更に不等質量における同調ロバスト幅と近接 2 モードを同時に制振する問題について少数個 TMD の特性を論じた。

(1) 4 個までの少数個 TMD について、同調ロバスト幅の数値最適解を基に近似設計式を作成した。

(2) TMD 減衰のロバスト幅を考慮した場合も、複数方式は単一方式に比べて大きな同調ロバスト幅が得られることが確認された。また、TMD 減衰のロバスト幅を考慮する場合は、TMD 間の振動数比を縮小すればよく、数値最適解を基にその縮小幅を補正する補正式を導いた。

(3) 不等質量の少数個 TMD の同調ロバスト幅は、等質量に比べて減少するものの、総質量比の 90% を 1 つの TMD に集中させた極端な不等質量のケースでも、単一方式の 1.5 倍程度の大きなロバスト幅が得られた。

(4) 固有振動数が近接する 2 モードを同時に制振する場合、応答倍率については複数にする効果は僅かである。一方、同調ロバスト幅については、近接する 2 モードの振動数が同じ比率で変動するという仮定の下であるが、1 モードを制振する場合と同じく複数方式の優位性が確認された。

参考文献

1) 津村直宜編：制振事例、振動制御コロキウム Part A

「構造物の振動制御」土木学会構造工学委員会振動制御小委員会、pp. 102-172、1991. 3

2) 日本建築構造技術者協会編：応答制御構造設計法、彰国社、2000. 12

3) Den Hartog, J. P. : Mechanical Vibrations, pp. 93-105, Dover publications, New York, 1984.

4) 山口宏樹：構造振動・制御、共立出版、1996

5) 山口宏樹、藤野陽三、津村直宜：構造物のパッシブコントロール (2) -TMD を中心として-、振動制御コロキウム Part A 「構造物の振動制御」土木学会構造工学委員会振動制御小委員会、pp. 36-60、1991. 3

6) 堀内博、藤澤伸光、津村直宜：TMD の設計における実用算定式、構造工学論文集 vol. 37A, pp. 781-788、1991. 3

7) 岩浪孝一、背戸一登：2 個の複合動的吸振器の最適設計法とその効果、日本機械学会論文集 (C 編) 50 巻 449 号、pp. 44-52、1984. 1

8) 神谷圭二、鎌形健太郎、松本進、背戸一登：多重動吸振器の最適設計法、日本機械学会論文集 (C 編) 62 巻 601 号、pp. 22-27、1996. 9

9) 藤野陽三、孫利民、山口宏樹：マルチプル TMD・TLD の特性の把握、構造工学論文集 vol. 38A, pp. 825-836、1992. 3

10) 阿部雅人、藤野陽三：マルチプル同調質量ダンパー (MTMD) の基本的特性、土木学会論文集 No. 485/I-23, pp. 87-96、1993. 4

11) 阿部雅人、藤野陽三：マルチプル同調質量ダンパー (MTMD) の性能評価式、土木学会論文集 No. 485/I-23, pp. 97-106、1993. 4

12) 山口宏樹、陳清、菊池準也：マルチプル TMD を用いた構造物の振動制御、構造工学論文集 vol. 40A, pp. 897-903、1994. 3

13) Poovarodom, N., Yamaguchi, H. and Warnitchai, P. : Optimal Allocation of Multiple Tuned Mass Dampers for Continuous Systems, Proc. 2nd International Conf. on MOVIC, Yokohama, pp. 474-479, 1994. 8

14) 吉住文太、井上浩男：数値計算による複数 TMD 周波数応答制御のロバスト性検討、構造工学論文集 vol. 46A, pp. 565-574、2000. 3

15) 高橋宏榮、大澤廣和、津村直宜、中村宏、山口宏樹、N. Poovarodom : 奥多摩大橋の制振対策、第 3 回振動制御コロキウム Part B 講演論文集、pp. 55-62、1995. 8

16) 吉住文太、佐野健一、井上浩男：複数 TMD の同調比ロバスト設計、三井造船技報第 171 号、pp. 8-17、2000. 10

17) 津村直宜、倉西茂：アクティブマスダンパーによる多自由度構造物の制振について、振動制御コロキウム Part. B 講演論文集、pp. 205-212、1991. 7

(2001 年 9 月 14 日受付)