

任意点から出発して平衡解に到達できる ブラニン-ホモトピー法の提案

Branin-Homotopy Method to Attain Equilibria from Arbitrary Points

菊田文枝*・藤井文夫**・野口裕久***

Fumie KIKUTA, Fumio FUJII and Hirohisa NOGUCHI

*名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

**岐阜大学工学部数値デザイン工学科 (〒501-1193 岐阜市柳戸1-1, ff@cc.gifu-u.ac.jp)

***慶応義塾大学理工学部システムデザイン工学科 (〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1, noguchi@sd.keio.ac.jp)

The Homotopy method is a globally convergent solution procedure to solve nonlinear equations and already well established in applied mathematics. The Branin method is also a global solution procedure and its engineering application, however, has been so far limited to optimization problems. The present study will first describe these two solution methods and compare to each other. The Branin method will, then, be reduced to a special form of the Homotopy method and a new procedure "Branin-Homotopy method" with some computational asset will be proposed. In numerical application, an axially compressed circular cylindrical shell is computed and it is shown that post-buckling equilibrium solutions may be attained from arbitrary non-equilibrium points.

Key Words : Homotopy method, Branin method, Branin-Homotopy method

1. はじめに

様々な先端研究の分野で高次非線形問題の強力な解法が必要とされ、これまで数多くの、そして巧みな非線形解法の研究が行われてきた^(1,2,3,4,5)。これらの非線形解法のうち、ニュートン・ラフソン法は、目標解の近くに初期値を設定できる場合に限り、解に到達できる局所的収束性を有する解法である。しかし、非線形方程式には一般に複数の解が存在し、しかも目標解の存在領域も、事前には不明の場合がほとんどである。このため、任意点に初期値を設定しても解に到達できる大域的な非線形解法^(2,3)が、実用計算では有用となる。構造解析ではその代表格として弧長制御法があるが、その他にも応用数学の分野で、ホモトピー法^(6,7,8)がすでに古くからよく知られている。

ブラニン法^(9,10)も大域的な非線形解法の一つであり、これまで主に最適化手法の分野で知られている^(注)。しかしブラニン法は、固体・構造の分野では、その応用例はほとんど見られない。そこで本研究では、従来のブラニン法をまず紹介し、続いてブラニン法の解軌道の追跡途中において、特異点付近で引き起こる問題を解決するため、ブラニン法の改良を試みた。そしてブラニン法を、ホモトピー法の特別な場合と捉えることにより、新たに“ブラニン-ホモトピー法”を提案する。計算例題として円筒シェルの後座屈領域における平衡解

の探索方法を取りあげ、通常のホモトピー法と比較して、非線形有限要素法における有用性について検討する。以下では、まず章2において、ブラニン法のアイデアにつながる背景を解説し、ついで章3と章4において、それぞれホモトピー法とブラニン法を紹介する。章5以降で、本論文の提案を試みる。

2. 反復公式と差分公式

ニュートン・ラフソンの反復公式は、非線形方程式 $f(x) = 0$ (単変数 x) の求根の際に、近似値 x_0 を出発点として、関数値を以下のように近似する。

$$f(x) \cong f_0 + (x - x_0)f'_0 \quad (1)$$

ただし f_0 , f'_0 は、それぞれ x_0 において評価した関数と、その微分係数の値である。

そして、ニュートン・ラフソンの反復公式は次のようである。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n}{f'_n} \quad (2)$$

ここで、下付添字 $n (= 0, 1, 2, \dots)$ は現在の反復点 (近似値) を表す。このニュートン・ラフソン法は、近似値を目標解の十分近くに設定して反復すると2次収束する。この性質を局所的収束性 (local convergence) と呼ぶ。

一方、反復公式 (2) と極めて似通った公式に差分公式がある。例えば $y = y(s)$ について、次のような微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{ds} = g(s) \quad (3)$$

(注) なお、ブラニン法は参考文献 (11,12) では、連続型ニュートン法とも呼ばれている

このときの差分公式は、以下のように与えられる。

$$y_{n+1} = y_n + h g_n \quad (4)$$

ただし h は次式で与えられる差分区間である。

$$h = s_{n+1} - s_n \quad (5)$$

また g_n は次のように定義する。

$$g_n = g(s_n) \quad (6)$$

ここでニュートン・ラフソン反復法による非線形方程式 $f(x) = 0$ の求解法が、どのような微分方程式を差分法で解くことに相当するかを考えてみる。差分公式 (4) で差分区間を単位長さ ($h = 1$) にとると、反復公式 (2) と差分公式 (4) との間で、次のような対応がある。

反復公式 差分公式

$$x(\text{又は } f) \leftrightarrow y \quad (7)$$

$$-\frac{f_n}{f'_n} \leftrightarrow g_n \quad (8)$$

$$t \leftrightarrow s \quad (9)$$

ただし t は、ニュートン・ラフソン法の反復解 x が依存する変数である ($x = x(t)$)。したがって、 f も t に依存する。このことから、非線形方程式 (x) = 0 をニュートン・ラフソン法で解くことは、実は収束する解の近傍で次の微分方程式を解いていることになる。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{f}{f'} \quad (10)$$

さらに、式 (10) より x を消去すると、 t に依存する f について、次のような微分方程式 (11) を差分法 (単位差分幅) を用いて解いていることになる。

$$\frac{df}{dt} = -f \quad (11)$$

この初期値問題 (11) の解は、次のように容易に求まる。

$$f = f_0 e^{-t} \quad (12)$$

ただし初期値 f_0 は、次の式 (13) と (14) で与えられる。

$$f_0 = f(x_0) \quad (13)$$

および

$$x_0 = x(0) \quad (14)$$

$t \rightarrow \infty$ のとき、 $e^{-\infty} \rightarrow 0$ で式 (12) の右辺は零となり、 $f = 0$ の解 $x = x(\infty)$ に到達する。これが後述のブラニン法につながるアイデアである。このアイデアはブラニン自身の論文^(9,10)には述べられていない。

3. ホモトピー法

一般に、 N 元連立非線形方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (15)$$

を解くことを考える。ここに $\mathbf{F}$ は、ベクトル $\mathbf{x}$ を変数とするベクトル関数である。

まずホモトピー法では、 $\mathbf{x}_0$ を $\mathbf{x}$ の初期値として、新しい変数 t を導入し、軌道方程式

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (16)$$

を設定する。ここで、

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - a(t)\mathbf{F}_0 \quad (17)$$

であり、 $a(t)$ はスカラー関数で、出発点と到達点において、それぞれ、

$$a = 1, a = 0 \quad (18ab)$$

であるように選択する。また $\mathbf{F}_0$ は、出発点 $\mathbf{x}_0$ での残差ベクトル $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ である。式 (16) は $(N+1)$ 個の変数 $(\mathbf{x}, t)$ に対する N 本の拘束条件式であり、 $(N+1)$ 次元空間で 1 本のホモトピーパスを定義する。

このように設定したホモトピーパスを、軌道追跡法を用いて、予測子・修正子 (節 5.2 で後述) を逐次計算して追跡していく。そして、 $a = 0$ となると、式 (15) の解に到達する。

より一般的には、式 (17) にスカラー関数 $b(t)$ を導入し、

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = b(t)\mathbf{F}(\mathbf{x}) - a(t)\mathbf{F}_0 \quad (19)$$

とする。ただし $b(t)$ は、出発点と到達点においてそれぞれ、

$$b = 1, b \neq 0 \quad (20ab)$$

を満たすスカラー関数である。

たとえば、 t の初期値を 1.0 として、

$$b(t) = 1, a(t) = t \quad (21ab)$$

と設定すると、

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - t\mathbf{F}_0 \quad (22)$$

が、基本的なホモトピーパスのひとつある。

4. ブラニン法^(9,10)

4.1 ブラニンパス

ブラニン法では式 (15) の解法を、式 (11) のように、次の微分方程式の初期値問題に帰着させて考える。

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = -\mathbf{F} \quad (\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)) \quad (23)$$

$t = 0$ での初期条件 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$ のもとで、この微分方程式の解析解を求めると

$$\mathbf{F} = e^{-t} \mathbf{F}_0 \quad (24)$$

となり、 $t = +\infty$ で式(15)の解に到達する。また式(23)は、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \quad (25)$$

となる。ここで

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} \quad (26)$$

である。 $\mathbf{J}$ はベクトル関数 $\mathbf{F}$ のヤコビアン行列であり、構造系の剛性行列に相当する。式(25)が N 次元空間でのブラニンパスを与え、このパスを予測子・修正子法を用いて追跡する。

4.2 ブラニン法のスキーム

予測子ベクトルは、式(25)より

$$d\mathbf{x} = -\Delta t \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \quad (27)$$

で与えられる。ここで Δt は規定量である。

式(24)より、ブラニンパス上では、残差ベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は、 $\mathbf{F}_0$ と平行となるが、予測子計算により解を更新した結果、パスから外れた予測子ベクトルの先端で評価した $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (旧 $\mathbf{F}$)は、 $\mathbf{F}_0$ とは平行にならない。そのため修正子計算では、この $\mathbf{F}$ を $\delta\mathbf{F}$ だけ修正したベクトル $\mathbf{F} = \mathbf{F} + \delta\mathbf{F}$ (図1の新 $\mathbf{F}$)が、 $\mathbf{F}_0$ の κ (スカラー)倍となるよう次のように拘束する(図1)。

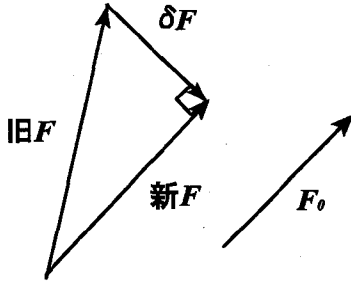


図1 修正子ベクトル

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{F} = \kappa \mathbf{F}_0 \quad (28)$$

すなわち、

$$\delta\mathbf{F} = \kappa \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (29)$$

また、スカラー κ の計算は、 $\mathbf{F}_0$ と $\delta\mathbf{F}$ とを直交させ

$$\kappa \mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_0^T \mathbf{F} = 0 \quad (30)$$

より、スカラー κ は、

$$\kappa = \frac{\mathbf{F}_0^T \mathbf{F}}{\mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0} \quad (31)$$

で与えられる。

これで $\delta\mathbf{F}$ が式(29)より決まり、修正子 $\delta\mathbf{x}$ は

$$\delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1} \delta\mathbf{F} \quad (32)$$

となり、 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ と解を更新する。

5. ブラニン法の改良(本研究の提案)

5.1 ブラニン-ホモトピーパス

節4.2でのスキームで実際にブラニンパスを追跡すると、特異点近傍で反復計算が発散してしまうため、パスの追跡が困難となることがある。これは、ブラニンパスのスキームで終始、同じ変数 t を規定しているためである。

そこで、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, q) = 0 \quad (33)$$

で定義されるパスを考える。ここで式(24)から

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, q) = \mathbf{F} - e^{-q} \mathbf{F}_0 \quad (34)$$

である(変数 t を変数 q に置き換えた)。

ここでホモトピー法との関連を考慮してみる。式(19)との対比において、

$$b(q) = 1, a(q) = e^{-q} \quad (35ab)$$

および、

$$a(0) = 1, a(+\infty) = 0 \quad (36ab)$$

とした式が、式(34)である。すなわち、ブラニンパスは、ホモトピーパスの特別な場合と捉えることができる。そこで以下、式(33,34)で定義されるパスを、ブラニン-ホモトピーパスと呼ぶ。基本的には、ホモトピーパスの追跡スキームと同様に、弧長制御型のスキームを用いて、ブラニン-ホモトピーパスを軌道追跡することができる。これにより従来のブラニン法では困難であった特異点を、容易に通過することが可能となる。これは、荷重制御法では乗り越えられなかった構造系の平衡路上の特異点(荷重極限点)が、弧長制御法によって容易に軌道追跡できる状況に似ている。

5.2 ブラニン-ホモトピーパスを追跡するスキーム

式(33)が成立するブラニン-ホモトピーパス上で線形化した接線方程式を、予測子ベクトル $(d\mathbf{x}, dq)$ の長さを規定量 Δ として解き、予測子ベクトル $(d\mathbf{x}, dq)$ を求める。

$$\begin{cases} \mathbf{J} d\mathbf{x} + e^{-q} dq \mathbf{F}_0 = 0 \\ d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} + dq^2 = \Delta^2 \end{cases} \quad (37ab)$$

ここで

$$\mathbf{x}_q = -e^{-q} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (38)$$

とすると、式 (37a) より

$$d\mathbf{x} = dq\mathbf{x}_q \quad (39)$$

また式 (39) と式 (37b) より、

$$dq = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\mathbf{x}_q^T \mathbf{x}_q + 1}} \quad (40)$$

となる。±は予測子ベクトルの向きを表す。これを式 (39) に代入して、予測子ベクトル ($d\mathbf{x}, dq$) が求められる。そして、

$$\begin{cases} \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + d\mathbf{x} \\ q \leftarrow q + dq \end{cases} \quad (41)$$

と近似解を更新する。

修正子ベクトル ($\delta\mathbf{x}, \delta q$) は、修正子ベクトルが予測子ベクトルに直交するものとして、

$$\begin{cases} \mathbf{J}\delta\mathbf{x} + e^{-q}\delta q\mathbf{F}_0 = -\mathbf{B} \\ d\mathbf{x}^T \delta\mathbf{x} + dq\delta q = 0 \end{cases} \quad (42ab)$$

を解くことにより求められる。

$\mathbf{B}$ は式 (34) で定義されるブラニン-ホモトピーパスの残差ベクトルで、

$$\delta\mathbf{x}_B = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \quad (43)$$

$$\mathbf{x}_q = -e^{-q}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}_0 \quad (44)$$

として、式 (42a) より

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}_B + \delta q\mathbf{x}_q \quad (45)$$

この式 (45) と式 (42b) から

$$\delta q = -\frac{d\mathbf{x}^T \delta\mathbf{x}_B}{d\mathbf{x}^T \mathbf{x}_q + dq} \quad (46)$$

となる。これを式 (45) に代入して $\delta\mathbf{x}$ が求まる。そして

$$\begin{cases} \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} \\ q \leftarrow q + \delta q \end{cases} \quad (47)$$

と近似解を更新する。この修正子計算を ($\delta\mathbf{x}, \delta q$) が十分小さくなるまで繰り返し、ブラニン-ホモトピーパスの軌道に乗せる (図 2)。

この方法は式 (37b) が示すように、弧長幅を規定するため、従来のブラニン法では困難であった特異点 (変数の折り返し点) の通過が可能となり、目標解に安定的に到達することができる。

6. 非線形平衡方程式への応用

N 個の自由度 $\mathbf{u}$ 、荷重変数 p の構造系における平衡方程式は、不つり合い力ベクトル $\mathbf{E}$ を用いて一般に、

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = 0 \quad (48)$$

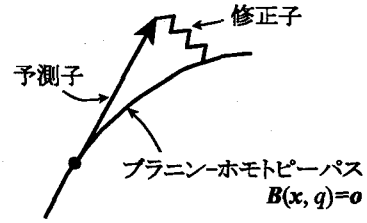


図2 予測子・修正子

と表せる。

さらに、変形 $\mathbf{u}$ に依存した系の抵抗力を $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ 、 e を荷重モードとすると、比例载荷された弾性保存系モデルについては、式 (48) の左辺は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - p\mathbf{e} \quad (49)$$

である。また、式 (48) を平衡点で線形化すると

$$\mathbf{K}d\mathbf{u} - dp\mathbf{e} = 0 \quad (50)$$

となる。ここで、 $\mathbf{K}$ は (接線) 剛性行列で

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{u}} \quad (51)$$

である。

いま、荷重変数を $p = p_A$ と規定すると、式 (48) は N 元連立非線形方程式

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, p_A) = 0 \quad (52)$$

となり、これを $\mathbf{u}$ について解くことを考える。すなわち任意の非平衡点 ($\mathbf{u}_0, p_A$) を出発点として、同じ荷重レベル p_A にある平衡点を求めることを考える。

この解法には、式 (34) において

$$\begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u} \\ \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E} \\ \mathbf{F}_0 \rightarrow \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{u}_0) \end{cases} \quad (53)$$

及び、ヤコビアン行列 $\mathbf{J}$ を

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{K} \quad (54)$$

と置き換えることにより、ブラニン-ホモトピー法を用いて解くことができる。

7. ブラニン-ホモトピー法の特長

ブラニン-ホモトピー法では、従来のブラニン法の特異点近傍での発散を回避できる。実際、ブラニン法を用いて計算すると、ブラニンプスの追跡過程で、特異点がない場合は図 3 のように目標解に漸近収束した。図 3 では横軸に代表的な変位 δ 、縦軸には q をプロットし

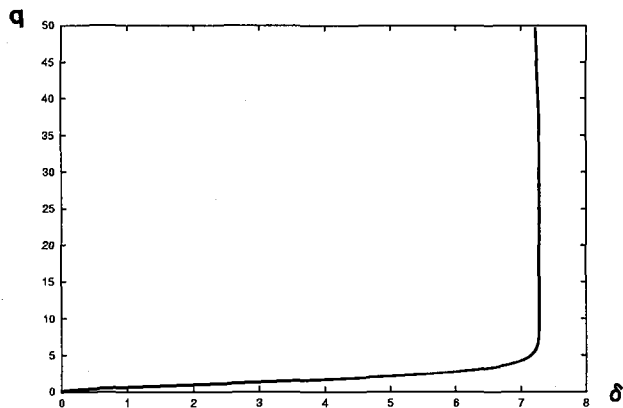


図3 解に収束する場合 (ブラニン法)

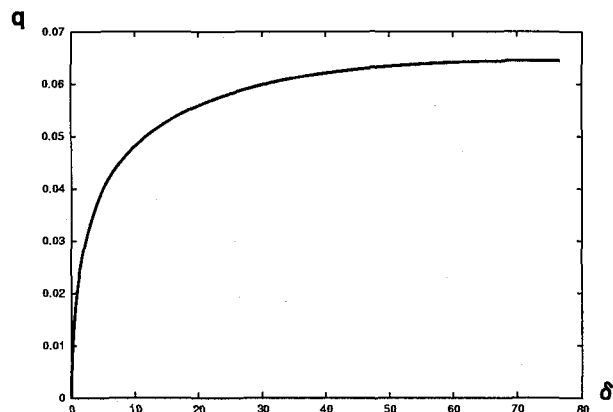


図4 解に収束しない場合 (ブラニン法)

た。一方、軌道追跡途中で追跡点が特異点に近づくと、修正子の反復計算がパスに収束できなくなり、 $q-\delta$ プロットは図4のようになる。そこで、この図4と同じ出発点から出発して、ブラニン-ホモトピー法によりパスの追跡を行ったところ、特異点を通り目標解に収束することを確認した。

ブラニン-ホモトピー法とホモトピー法との比較では、同一の初期値とステップ幅を与え軌道追跡を行うと、ほとんど同じ計算負荷で、目標解に到達することができるため両解法に大差はない。しかし、ブラニン-ホモトピー法は、ホモトピー法(式(22))では必要とされていた解の精算(予測子・修正子法で求めた近似解からのニュートン・ラフソン法による解への収束計算)が不要であるという利点をもつ。これは、軌道方程式に指数関数を用いることにより、パスに沿って解に漸近収束するためである。

また、円筒シェルのように複数の平衡路が密集する場合、ニュートン・ラフソン法などによる解の精算では、それまで追ってきたパス上の目標解ではなく、その近傍にある異なった解に収束する可能性がある。しかし、ブラニン-ホモトピー法は、パス上で解に収束するという特徴からこれを回避することができ、この点ではホモトピー法に比べ優れているといえる。

8. 初期値の設定について

初期値として荷重 p_A と u_0 とを任意に与えることができる。例えば、変位 u の初期値には以下のように求めた変位を与える。

- p_A とは異なる荷重レベルの平衡点の変位
- 剛性行列の固有値解析を行い、固有ベクトルを変位として与える。
- 単数もしくは複数の集中荷重を与え求めた変位

設定した初期値によっては、軌道追跡途中に発散したり、目標解とは異なる解に到達することがある。その

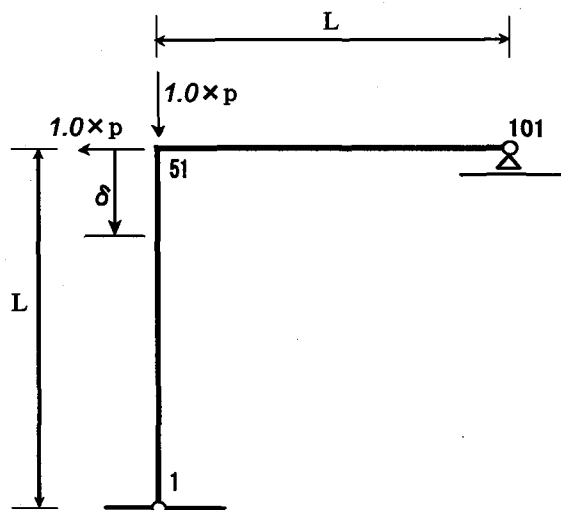


図5 平面骨組フレーム

ため、モデルや目標とする解に応じて初期値を設定する必要がある。

9. 例題計算

9.1 平面骨組フレーム

本研究で提案するブラニン-ホモトピー法を検討するために、まずテスト用モデルとして図5で示すような平面骨組フレームを取りあげる。ただし、 $L=1000$ cm, $EI=1.53 \times 10^5$ kN·m, $EA=2.05 \times 10^6$ kN である。水平鉛直部材をそれぞれ 50 本の要素に区切り、要素数 100, 節点数 101, 自由度数 300 とする。このモデルの主経路及び、ブラニン-ホモトピー法により求めた平衡点と、その出発点における変形を図6に示す。初期形状において荷重レベルを $p = -50$ N と設定した非平衡点(出発点 1)から、ブラニン-ホモトピーパスの追跡を行ったところ、主経路上にない平衡点、すなわち、分岐経路(又は遊離経路)上の平衡点(到達解 A)に到達す

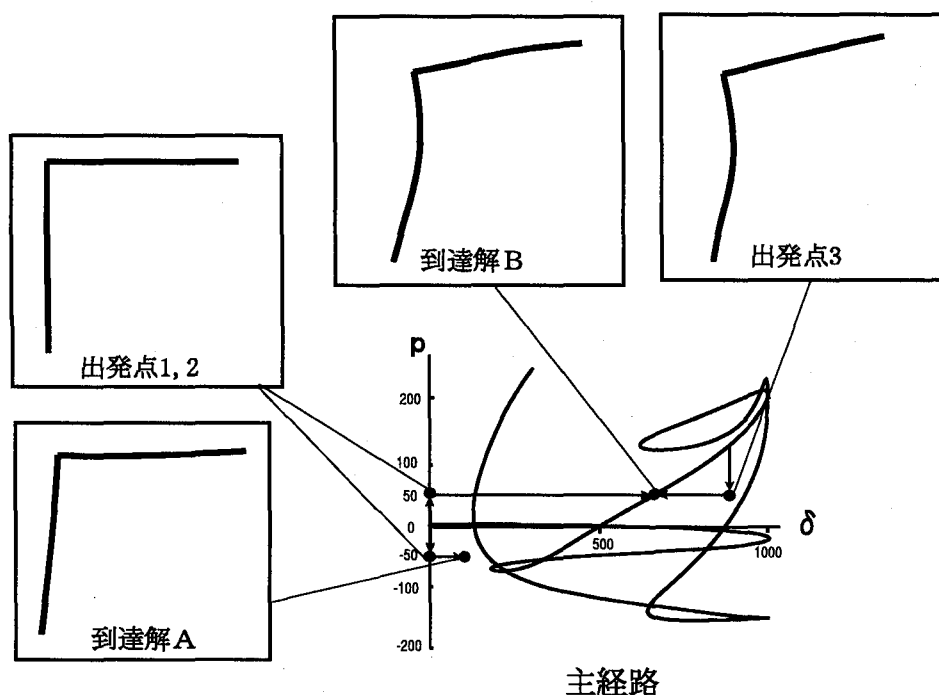


図6 主経路と、出発点と到達点での変形

ることができた。また、荷重レベルを $p = 50 \text{ N}$ と設定し、出発点 2,3 のような異なる非平衡点から軌道追跡を行っても、同一の平衡点 (到達解 B) に到達した。さらに、 $p = 50 \text{ N}$, $p = -50 \text{ N}$ のそれぞれの荷重レベルにおいて、異なった初期値を与えて軌道追跡を行った結果、到達解 A,B 以外の多くの平衡点 (図 6 には示していない) に到達することを確認した。

9.2 円筒シェル

次にブラニン-ホモトピー法を用いて、任意の非平衡点から出発し、円筒シェルの後座屈領域における平衡解を求めることを試みた。図 7 に示すような軸圧縮を受ける円筒形シェルについて、シェルの載荷端の軸方向の変位 δ は均一となるよう円端を拘束した。このシェルの主経路はほぼ直線であり、 $p = 162.84 \text{ MN}$, $\delta = 0.13402 \text{ m}$ が第一分岐点となる (13,14,15,16,17)。円筒シェルの最終座屈強度は通常、初期座屈荷重の約 30 % 程度であり、この低い荷重レベルにおける後座屈安定解を見つけることが工学的に重要である。また、最終荷重強度に対応する平衡解は、局所的な変形モードを示すことが知られている (15,16,17,18)。

任意の非平衡点を初期値として、ブラニン-ホモトピー法により多くの後座屈領域の平衡解を得たが、その一例を図 8 に示す。これは荷重レベルを $p = 60 \text{ MN}$ に設定し、図 8 の左上のような非平衡点を初期値とし、ブラニン-ホモトピーパスの追跡を行ったところ、図 8 の右上に示す後座屈領域の平衡解に到達した。この平

衡解は、剛性行列 K が負の固有値を持つ不安定解である。荷重レベルは非常に低く初期座屈荷重の約 37 % であり、その変形も局所的なものとなっている。図 9 は、同じ荷重レベル ($p = 60 \text{ MN}$) における別の探索例を示す。ブラニン-ホモトピー法で、後座屈領域における安定解を見つけるまでには、まだ至っていないが、出発点 (非平衡点) は任意に設定できることから、安定解に到達できる可能性は十分にある。また、到達した不安定解より弧長制御法を用いて後座屈領域の平衡路を追跡し、安定解を探索する方法も可能である。

10. まとめ

本研究により従来のブラニン法は、実はホモトピー法の特別な場合であることが明らかになった。そして、従来のブラニン法で困難とされていた特異点の通過が可能となり、大域的非線形解法としての工学的有用性を持たせることができた。さらにブラニン-ホモトピー法とホモトピー法とを比較すると、解の精算が不要であり、パスに沿って目標解に漸近収束するという利点をもつ方法であるといえる。

参考文献

- 1) 篠原 能材：数値解析の基礎，日新出版，1978
- 2) 星野 聰：数値計算の技法，コロナ社，電気電子工学大系 50，1977
- 3) 藤井文夫，岡澤重信：構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法，機械学会論文集，62 巻，

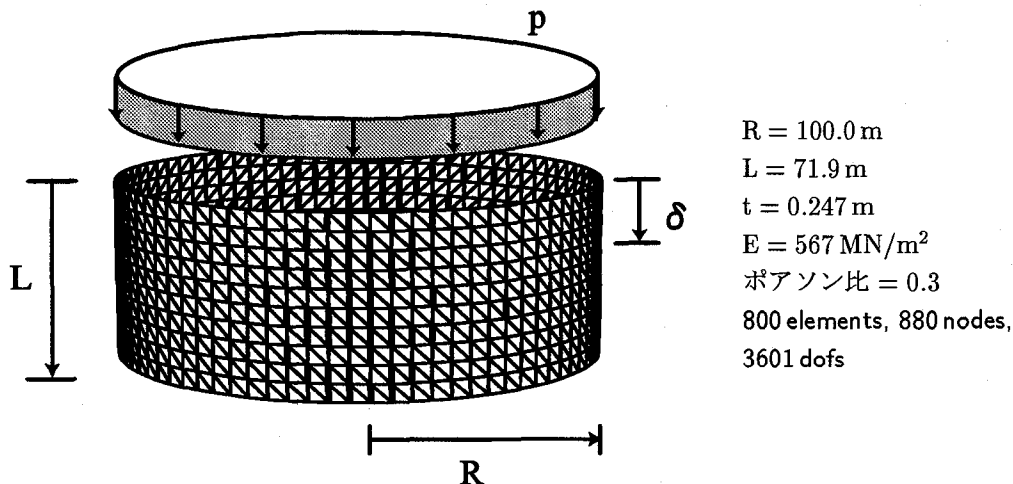


図7 円筒シェル

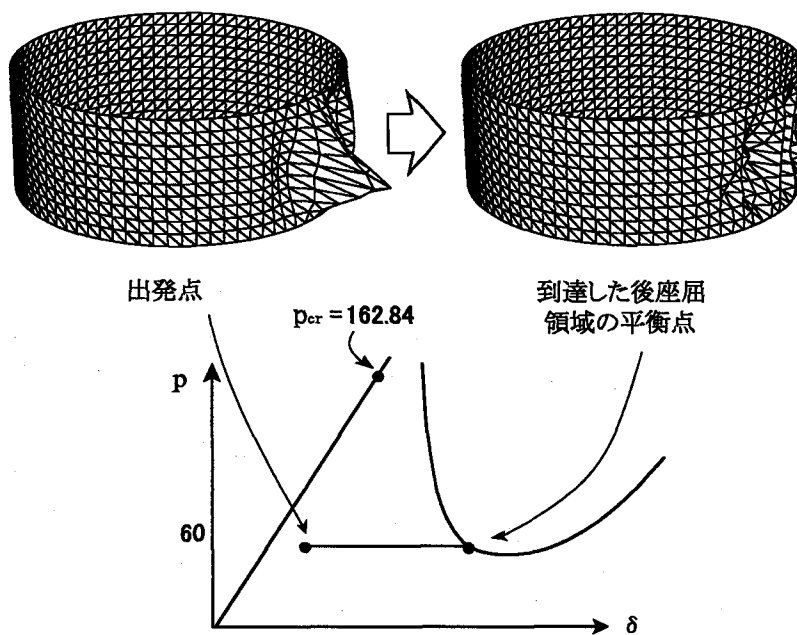


図8 $p=60$ における後座屈領域の平衡解の探索

- 603号, A編, 特集号「ハイパフォーマンスコンピューティング」, 2448-2455, 1996
- 4) 藤井文夫, 内藤幹夫: 特異つり合い点をピンポイントするための局所的大域的非線形解法, 構造工学論文集, Vol.41A, 455-464, 1995
 - 5) 瀧 諭, 萩原 伸幸, 藤井 文夫, 本間 俊雄, 三井 和男: 非線形構造モデルの動的応答と安定性, コロナ社, 2002(出版予定)
 - 6) J. K. Park and B. M. Kwak: Three-Dimensional Frictional Contact Analysis Using the Homotopy Method, Journal of Applied Mechanics, Vol.61, 703, September 1994
 - 7) L. T. Watson and C. Y. Wang: A Homotopy Method Applied to Elastica Problems, Int. J. Solids Structures Vol.17, 29-37, 1981
 - 8) M.P.Kamat, L.T.Watson and V.B.Venkayya: A Quasi-Newton Versus A Homotopy Method for Nonlinear Structural Analysis, Computers & Structures, Vol.17, No.4, 579-585, 1983
 - 9) Branin, F. H. Jr.: A Widely Convergent Method For Finding Multiple Solutions of Simultaneous Nonlinear Equations, Technical Report, 21.466, IBM Systems Development Division Laboratory, Kingston, NY, 1972
 - 10) Branin, F. H. Jr. and Stanley K. Hoo: A Method for Finding Multiple Extrema of a Function of n Variables, Numerical Methods for Nonlinear Optimization. Edited by F. A. Lootsna, Academic Press, London, 231-237, 1971
 - 11) 藤田宏, 今野浩, 田邊國士: 「最適化法」, 岩波講座 応用数学 15, 岩波書店, 1998
 - 12) Tanabe, K.: A Geometric Method in Nonlinear Pro-

出発点(非平衡点)

後座屈領域の平衡解

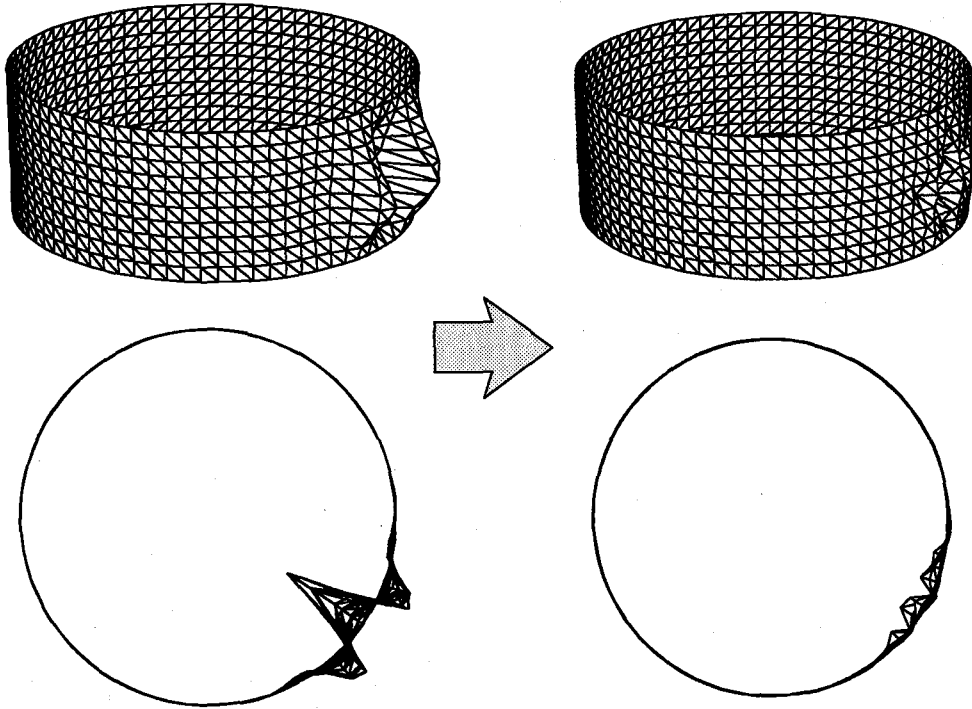


図9 別の探索例

- graming, Journal of Optimization Theory and Applications, 30, No2, 181-210, 1980
- 13) Fujii, F. and Noguchi, H : Eigenanalysis-free Procedures in Computational Stability Analysis, The first International Conference on Structural Stability and Dynamics, 173-182, December 7-9, 2000
 - 14) Fujii, F., Noguchi, H. and Ramm, E. : Static Path Jumping to Attain Postbuckling Equilibria of a Compressed Circular Cylinder, Computational Mechanics 26, 259-266, 2000
 - 15) Fujii, F. and Noguchi, H : Postbuckling Strength of an Axially Compressed Elastic Circular Cylinder with All Symmetry Broken, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 11, No. 2, 2001
 - 16) Fujii, F., Noguchi, H. and Ramm, E. : Static Path Jumping and Stable Postbuckling Equilibria of an Axially Compressed Circular Cylindrical Shell, International Conference on Computational Engineering Science, Modeling and Simulation Based Engineering, Tech science Press, 637-642, 1998
 - 17) Fujii, F. and Noguchi, H : Symmetry-Breaking Bifurcation and Postbuckling Strength of a Compressed Circular Cylinder, Proceeding of APCOM'99, Fourth Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, 563-568, 1999
 - 18) Yamaki, N. : Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells, North-Holland, Amsterdam, 1984

(2001年9月14日受付)