

滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発

A development of cable element for flexible cable structures with pulley

岩崎英治*・長井正嗣**

Eiji IWASAKI and Masatugu NAGAI

*正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

A cable element is developed in this paper for flexible cable structures with pulley. This element is formulated by modified functional of variational principle and has the same features as usually finite element based on the displacement method in which displacements are unknown variables. A few numerical examples are to show the accuracy and efficiency of the proposed cable element.

Key Words : flexible cable structure, cable element, pulley

キーワード：柔ケーブル構造、ケーブル要素、滑車

1. はじめに

ケーブル部材を有限要素法で解析する場合には、直線要素を多数用いた方法が簡便であるが、自重や風荷重のような分布荷重が作用し、大きなサグが生じるような柔ケーブル構造の場合には、多数の要素を必要とする。このため、中間節点を設けた曲線ケーブル要素が開発されている^{1),2)}。中西と波田¹⁾は、ケーブル要素を多数の領域に分け、それぞれの領域で応力が一定となるような混合法の定式化による3節点ケーブル要素と、変位法による3節点ケーブル要素を誘導し、二つの領域に分けたケーブル要素の有効性を示している。また、謝ら²⁾は、更新ラグランジュの手法による4節点ケーブル要素を誘導している。これらの研究のように、中間節点を多数設けた高次要素を用いれば、少ない自由度で精度の良い解析が可能になるが、通常のラグランジュ多項式を用いた要素では、剛性行列の条件数が大きくなり、次数をあまり高くできない。そこで、著者の一人は、高次要素でも条件数の増加が少ないハイアラーキ多項式を用いたケーブル要素³⁾を誘導し、多項式の次数を上げることにより、ケーブル構造を構成する各部材を、一つの要素で解析可能であることを示した。

有限要素法の一般性を保持した要素の開発には、変位法や混合法を用いざるを得ず、高精度の要素を誘導するには、高次の変位関数を用いるのは不可欠なものである。しかし、ケーブル部材の応力状態は非常に単純で、平衡方程式の一般解を容易に誘導できる。このため、応力法に基づいたケーブル構造の解析法^{4),5)}が開発されている。これらの解析法は、ケーブル端での平衡条件や適合条件式を解く方法であり、一般の有限要素法とは手法が異なり種々の汎用性に欠けるらしいがある。

ところで、ケーブル構造には、架設途中には支点や、他のケーブル上を滑動し、完成時に固定する形式のものが少なくない。この完成前のケーブルの変形や反力を把握しておく必要がある。また、ケーブル構造の形状は、自重やプレストレス、外力等が作用するまで確定しないので、形状決定の問題も重要である。形状決定の条件は種々あるが、各ケーブルの軸力が等しくなるような条件を考える場合には、プレストレスや自重などの荷重が作用する間は、支点や他のケーブル上の交点で移動可能な状態になっていると、これらの点で隣接するケーブル部材の軸力を等しくすることが可能である。このような状態は見かけ上、ケーブルが滑車を通して支点や他のケーブルに接続しているものと見なすことができる。

このような滑車を有するケーブル構造の解析には、真柄ら⁶⁾、McDonaldら⁷⁾やAufaure⁸⁾の研究がある。真柄ら⁶⁾は、混合法の手法によりケーブルの滑動を許す場合の解析法を示している。しかし、ケーブル要素は直線要素によるリンクケーブルとして扱い、自重などの分布荷重は、等価な節点力に置き換えている。Aufaure⁸⁾は、滑車と隣接するケーブルを含んだ3節点の「滑車要素」を誘導している。このときケーブル部は直線として扱っている。McDonaldら⁷⁾は、ケーブルを懸垂曲線として扱った「滑車要素」を誘導し、たるんだ状態のケーブルと滑車の系には複数の平衡状態が存在することを指摘している。しかし、自重のような一方向の等分布荷重に釣り合うケーブル形状の解析解を用いているために、他の荷重条件への適用が困難である。

著者の一人は、ケーブル要素の全ポテンシャルエネルギーの汎関数を修正して、少ない自由度で解析可能なケーブル要素を提案した⁹⁾。この要素の独立な変分量は、要素両端の変位と要素内の平衡方程式を解いた

時に生じる積分定数であるが、積分定数は各要素に独立な値であるので、これを消去すると、通常の変位法に基づいた剛性方程式に相当する式が得られる利点がある。そこで、本研究では、この手法を更新型ラグランジュの手法に適用し、さらに要素端部に滑車を有する場合のケーブル要素を提案する。

なお、ケーブル要素を誘導する上で、通常用いられる以下の仮定を設ける。

- 1) ケーブルには軸力のみ生じる。
- 2) ケーブルの曲げ剛性は無視できる。
- 3) ケーブルの断面積は、軸力の大きさによらず一定である。

また、滑車の誘導において以下の仮定を設ける。

- 4) 滑車とケーブルとの間の摩擦は小さく無視できる。

2. 変位増分とひずみ増分の関係

有限変位解析の定式化には更新型ラグランジュの手法を用いる。ある増分段階から次の増分段階へのケーブルの変位状態を図1に示す。

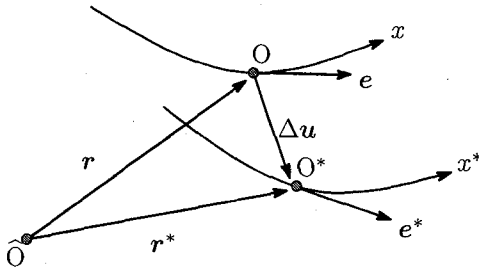


図-1 ケーブルの変位

ある増分段階のケーブルに沿った座標を x とし、このケーブル上の点 O の空間固定点 $\hat{O}$ に対する位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とする。この点 O は、新たな荷重の作用により、点 O^* へ移動し、この点の位置ベクトルを $\mathbf{r}^*$ とすると、これは変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{u}$ から、次のように表される。

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

位置ベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}^*$ のケーブルに沿った座標 x に關する導関数は、ケーブルの接線の方角を向き、その大きさはケーブルの初期状態からの伸びを表すので、それぞれ、次のようになる。

$$\mathbf{r}_{,x} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}^*_{,x} = (1 + \Delta \varepsilon_0) \mathbf{e}^* \quad (2)$$

ここで、 $(\cdot)_{,x}$ は、 x に関する微分を表している。また、 $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*$ は、それぞれの荷重状態でのケーブルの単位接線ベクトル、 $\Delta \varepsilon_0$ は、ケーブルの伸び率増分を表している。式(1)を x に関して微分した式に、これらの式を代入すると変位増分とひずみ増分の関係を表す次式が得られる。

$$(1 + \Delta \varepsilon_0) \mathbf{e}^* = \mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}_{,x} \quad (3)$$

上式の両辺の内積をとると、

$$(1 + \Delta \varepsilon_0)^2 = 1 + 2\mathbf{e}^T \Delta \mathbf{u}_{,x} + \Delta \mathbf{u}_{,x}^T \Delta \mathbf{u}_{,x} \quad (4)$$

上式より、ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_0$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_0 &= \sqrt{1 + 2(\mathbf{e}^T \Delta \mathbf{u}_{,x}) + (\Delta \mathbf{u}_{,x}^T \Delta \mathbf{u}_{,x})} - 1 \\ &\doteq \mathbf{e}^T \Delta \mathbf{u}_{,x} + \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{u}_{,x}^T \Delta \mathbf{u}_{,x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{e}^T \Delta \mathbf{u}_{,x})^2 \end{aligned} \quad (5)$$

また、変位とひずみの変分量の間には、式(4)より次の関係式が得られる。

$$\delta(\Delta \varepsilon_0) = \frac{1}{1 + \Delta \varepsilon_0} (\mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}_{,x})^T \delta(\Delta \mathbf{u}_{,x}) \quad (6)$$

3. ケーブル部材の平衡方程式と境界条件式

いま、ケーブルに沿った単位長さ当たり $\mathbf{q}$ の分布荷重と集中荷重 $\mathbf{Q}$ が作用して平衡状態にあるものとする。このときのケーブルに生じている軸力を N とする。この状態のケーブルにさらに分布荷重 $\Delta \mathbf{q}$ と集中荷重 $\Delta \mathbf{Q}$ が作用したときの平衡状態を考える。このときのケーブルの増分全ポテンシャルエネルギー Π は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^l \left(N + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta \varepsilon_0 dx - \int_0^l (\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})^T \Delta \mathbf{u} dx \\ &\quad - [\mathbf{n}_x (\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q})^T \Delta \mathbf{u}]_0^l \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 l は、既知の増分段階でのケーブル長、 $\mathbf{n}_x$ はケーブルの端部の断面の外向き法線ベクトルと x 軸との間の方向余弦を表し、 $x=0$ では $\mathbf{n}_x = -1$ 、 $x=l$ では、 $+1$ の値をとる。また、軸力増分 ΔN は、ケーブルの伸び剛性 EA とひずみ増分 $\Delta \varepsilon_0$ の積で与えられる。

上式の第一変分に式(6)を考慮すると、次の平衡方程式

$$\left\{ \frac{N + \Delta N}{1 + \Delta \varepsilon_0} (\mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}_{,x}) \right\}_{,x} = -(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}) \quad (8)$$

が得られ、力学的境界条件は次のようになる。

$$\frac{N + \Delta N}{1 + \Delta \varepsilon_0} (\mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}_{,x}) = \mathbf{n}_x (\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) \quad (9)$$

これらの式に、式(3)を考慮すると次のような自明な解が得られる。

$$(N + \Delta N)_{,x} = -(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}) \quad (10)$$

また、力学的境界条件式は

$$N + \Delta N = \mathbf{n}_x (\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) \quad (11)$$

なお、 $(N + \Delta N) = (N + \Delta N) \mathbf{e}^*$ とおいている。

4. ケーブル部材の汎関数の修正

式(7)で変分を受ける独立な量は Δu であり、この式に含まれる $\Delta \varepsilon_0$ は、式(3)を用いて Δu から与えられる。この関係式(3)をラグランジュの乗数法を用いて汎関数に含めて、この関係式が、汎関数が停留したときに満足されるような次の汎関数を考える。

$$\Pi_I = \Pi - \int_0^l (N + \Delta N)^T \{ (1 + \Delta \varepsilon_0) e^* - e - \Delta u_{,x} \} dx \quad (12)$$

ここで、 $(N + \Delta N)$ はラグランジュの未定関数ベクトルである。このベクトルは上式の汎関数が停留したときに、前節での軸力ベクトルを表すので、同じ記号を用いている。

この汎関数で、変分を受ける関数は、 $\Delta \varepsilon_0$ 、 Δu と ΔN であり、この式の停留条件は、部材内部では次のようになる。

$$\delta(\Delta u); (N + \Delta N)_{,x} = -(q + \Delta q) \quad (13a)$$

$$\delta(\Delta \varepsilon_0); (N + \Delta N)^T e^* = N + \Delta N \quad (13b)$$

$$\delta(\Delta N); (1 + \Delta \varepsilon_0) e^* = e + \Delta u_{,x} \quad (13c)$$

また、部材端では次のようになる。

$$\delta(\Delta u); N + \Delta N = n_x(Q + \Delta Q) \quad (14)$$

これらの式とケーブル部材の平衡方程式、力学的境界条件式を比較すると明らかなように、汎関数 Π_I が停留したときには、ラグランジュ定数 $(N + \Delta N)$ は、軸力ベクトルを表していることが分かる。

ところで、式(12)の $\Delta u_{,x}$ に関する項を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \Pi_I = & \int_0^l \left(N + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta \varepsilon_0 dx \\ & - \int_0^l \{ (N + \Delta N)_{,x} + (q + \Delta q) \}^T \Delta u dx \\ & - \int_0^l (N + \Delta N)^T \{ (1 + \Delta \varepsilon_0) e^* - e \} dx \\ & + \left[\{ (N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l \end{aligned}$$

が得られる。ここで、ラグランジュ定数 $(N + \Delta N)$ として、次式

$$(N + \Delta N)_{,x} = -(q + \Delta q)$$

を満足するような関数を選ぶと、上式の汎関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_I = & \int_0^l \left(N + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta \varepsilon_0 dx \\ & - \int_0^l (N + \Delta N)^T \{ (1 + \Delta \varepsilon_0) e^* - e \} dx \\ & + \left[\{ (N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l \end{aligned}$$

上式で、変分を受ける関数を Δu と ΔN の二つだけとし、 $\Delta \varepsilon_0$ と $(N + \Delta N)$ は次式を用いて、 $N + \Delta N$ で表すことにする。

$$\Delta \varepsilon_0 = \frac{\Delta N}{EA}, \quad N + \Delta N = (N + \Delta N)^T e^* \quad (15)$$

上式を用いて、汎関数を変形すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x + \Delta F_x) - (N + \Delta N)] \right\} dx \\ & + \left[\{ (N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l \quad (16) \end{aligned}$$

なお、 $(F_x + \Delta F_x)$ は、 $(N + \Delta N)$ の e 成分である。

上式は、変位 Δu が積分演算の中に含まれず、 $x=0$ と l の境界の項に現れるだけなので、ケーブル内部での変位を節点での変位から補間する必要がない。この式は、応力仮定のハイブリッド型変分原理の汎関数に相当している。ケーブル要素の場合、有限変位問題においても平衡方程式を満足する応力を容易に誘導でき、この方程式の一般解は容易に表すことができ、 $(N + \Delta N)$ は、次式のようになる。

$$N + \Delta N = c + \Delta c - \int_0^x (q + \Delta q) dx$$

この式中の $c + \Delta c$ は積分定数である。したがって、汎関数 Π_C に含まれる変分を受ける関数は、ケーブル端部での変位 $\Delta u_a (= \Delta u(0))$ 、 $\Delta u_b (= \Delta u(l))$ と積分定数 Δc である。

汎関数 Π_C の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta u]_0^l = 0 \quad (17a)$$

$$-(c + \Delta c) - (Q_a + \Delta Q_a) = 0 \quad (17b)$$

$$(c + \Delta c) - \int_0^l (q + \Delta q) dx - (Q_b + \Delta Q_b) = 0 \quad (17c)$$

上式中のケーブル要素の単位接線ベクトル e 、 e^* は、 N と $(N + \Delta N)$ から、次式で与えられる。

$$e = \frac{N}{|N|}, \quad e^* = \frac{N + \Delta N}{|N + \Delta N|}$$

式(17)は、非線形方程式になっているので、ニュートン法で求めるための反復式を誘導すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -H_{(k)} - I & I \\ -I & O & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta c_{(k+1)} - \Delta c_{(k)} \\ \Delta u_{a(k+1)} - \Delta u_{a(k)} \\ \Delta u_{b(k+1)} - \Delta u_{b(k)} \end{Bmatrix} \\ & = - \begin{Bmatrix} f_{c(k)} \\ f_{a(k)} \\ f_{b(k)} \end{Bmatrix} \quad (k > 0) \quad (18) \end{aligned}$$

ここで、式(17a,b,c)の左辺の式をそれぞれ、上式右辺の $f_{c(k)}$ 、 $f_{a(k)}$ 、 $f_{b(k)}$ で表している。また、上式中の

$H_{(k)}$ は次式のようになる。

$$H_{(k)} = \int_0^l \left\{ \frac{I}{EA} + \left(1 - \frac{N}{EA}\right) \frac{I - e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{N + \Delta N_{(k)}} \right\} dx$$

$k=0$ の場合に相当する初期値は、式 (17) を増分量に関して線形化した次式により求める。

$$\begin{pmatrix} -H_{(0)} & -I & I \\ -I & O & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_{(1)} \\ \Delta u_{a(1)} \\ \Delta u_{b(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{c(0)} \\ f_{a(0)} \\ f_{b(0)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

ここで、

$$f_{c(0)} = \int_0^l \left(\frac{I}{EA} + \frac{I - ee^T}{N} \right) \int_0^x \Delta q dx dx \quad (20a)$$

$$f_{a(0)} = -c - (Q_a + \Delta Q_a) \quad (20b)$$

$$f_{b(0)} = c - \int_0^l (q + \Delta q) dx - (Q_b + \Delta Q_b) \quad (20c)$$

$$H_{(0)} = \int_0^l \left(\frac{I}{EA} + \frac{I - ee^T}{N} \right) dx \quad (20d)$$

なお、線形化に際して、軸力は $N \neq 0$ と扱っている。

式 (18) や (19) 中の Δc は、隣接要素とは無関係な変数なので、構造全体の剛性方程式を組み立てる前に消去できる。 Δc を消去すると、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} H_{(k)}^{-1} & -H_{(k)}^{-1} \\ -H_{(k)}^{-1} & H_{(k)}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_{a(k+1)} - \Delta u_{a(k)} \\ \Delta u_{b(k+1)} - \Delta u_{b(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{a(k)} - H_{(k)}^{-1} f_{c(k)} \\ f_{b(k)} + H_{(k)}^{-1} f_{c(k)} \end{pmatrix} \quad (21)$$

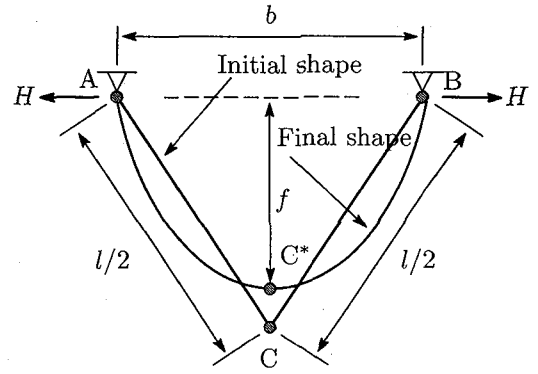
なお、 Δc は、次式により求められる。

$$\Delta c_{(k+1)} = H_{(k)}^{-1} \{ f_{c(k)} - (\Delta u_{a(k+1)} - \Delta u_{a(k)}) + (\Delta u_{b(k+1)} - \Delta u_{b(k)}) \} + \Delta c_{(k)} \quad (22)$$

$k=0$ の場合の式 (19) も同様に Δc を消去できる。

上式の剛性方程式では、未知量が節点変位だけであり、通常の有限要素法の手法を用いることができる。また、この方程式は、ケーブル内の変位を節点での変位から補間する通常の有限要素法の離散化を行う必要が無いので、精度を上げるために要素数を多くする必要が無い。代わりに方程式内の H, f_c の積分計算を正確に行う必要がある。この積分には数値積分法を用いるので、精度の良い解を得るためには積分点数を多く用いる必要がある。

本ケーブル要素は、ケーブルの形状を表すベクトル e を軸力 N から求めているので、ケーブル要素の形状を節点での位置から補間する必要が無い。しかし、ケーブルに軸力が作用していない解析初期の段階では、軸力に代わる別の方法で、ベクトル e を表す必要がある。これには種々の方法が考えられるが、本論文では、解



$EA=150\text{MN}$, $q=50\text{N/m}$, $l=100\text{m}$

図-2 単一ケーブルの解析

析初期のケーブルは両節点を結んだ直線形状になっているものとし、解析初期のベクトル e には、両節点を結んだ直線の単位接線ベクトルを用いる。

また、解析初期の段階では、軸力がゼロのため、 $H_{(0)}$ と $f_{c(0)}$ が不定になる。そこで、数値計算上では、桁落ちが起きない程度に小さな値を軸力として用いる。このように扱ってもニュートン法の初期値に影響を与えるだけで、収束値には影響を与えない。

ケーブル要素の形状は、節点 a の位置ベクトル r_a^* とケーブルの接線ベクトルの積分値から次式により求められる。

$$r^* = r_a^* + \int_0^x \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* dx \quad (23)$$

5. ケーブル要素の数値計算例

5.1 単一ケーブルによる精度の比較

図2のような単一ケーブル部材について、両支点間の距離 b が 60m, 40m, 20m の場合について、積分方法と積分次数を変えてサグ f と水平反力 H を求め、解の精度を調べる。本ケーブル要素は積分演算を正確に行えば、一要素で単一ケーブルの正確な解析が行える。しかし、本論文では、ケーブル要素の初期形状を与えるために最も簡便な直線形状を用いているために、図2のような節点 A, C, B を通る2要素からなる折れ線形状の初期形状を用いて計算を行うことにする。計算では、伸び剛性が $EA=150\text{MN}$ 、分布荷重が $q=50\text{N/m}$ 、無応力時のケーブル長が $l=100\text{m}$ とする。

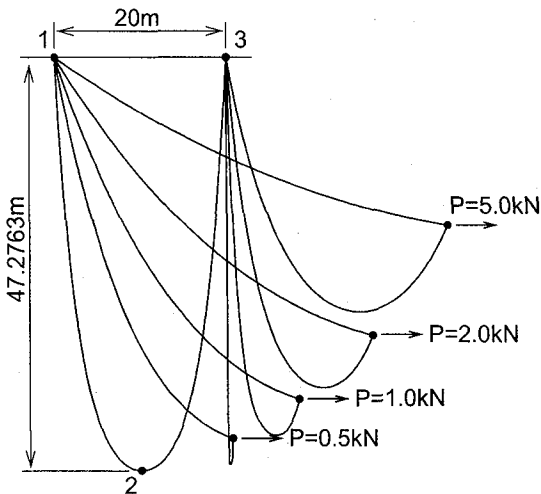
表1は、各ケーブル要素をガウス積分により、積分点数を変えたときの解析解⁵⁾との比を示している。また、表2は各ケーブルを台形則により積分区間の数を変えて積分したときの解析解との比を示している。積分区間数が2で、 $b=20\text{m}$ の場合には、50回の繰り返し計算を行っても収束しなかった。なお、他の場合には、5回前後の繰り返し計算で収束している。このとき、初期の変位ノルムと各繰り返し計算での変位ノル

表-1 ガウス積分による単一ケーブルの解析

積分 点数	b=60m		b=40m		b=20m	
	H	f	H	f	H	f
2	0.9630	1.0247	1.0167	1.0396	1.2428	1.0290
3	0.9952	0.9987	0.9728	1.0100	1.0596	1.0198
4	1.0009	0.9994	0.9916	0.9996	0.9933	1.0109
5	1.0001	1.0000	1.0001	0.9991	0.9799	1.0042
6	1.0000	1.0000	1.0008	0.9998	0.9865	1.0007
7	1.0000	1.0000	1.0002	1.0000	0.9947	0.9996
解析解 ⁵⁾	815.82N	36.279m	391.74N	42.776m	139.73N	47.284m

表-2 台形則による単一ケーブルの解析

積分 区間数	b=60m		b=40m		b=20m	
	H	f	H	f	H	f
2	0.9968	0.9053	0.7852	0.8576	—	—
3	1.0067	0.9575	0.9510	0.9286	0.3583	0.8804
4	1.0048	0.9764	0.9870	0.9583	0.6900	0.9210
5	1.0032	0.9851	0.9968	0.9732	0.8312	0.9437
6	1.0022	0.9897	0.9997	0.9815	0.9015	0.9580
7	1.0016	0.9925	1.0004	0.9866	0.9400	0.9676
解析解 ⁵⁾	815.82N	36.279m	391.74N	42.776m	139.73N	47.284m



$EA=150\text{MN}$, $q=50\text{N/m}$, $l=100\text{m}$

図-3 大きくたわんだケーブル

Δ の比が、 10^{-6} 以下になることを収束判定としている。

5.2 大きくたわんだケーブル

非常にたわんだ状態のケーブルの計算例を図3に示す。これは、文献^{5),3)}に示されているものであるが、ここでは、伸び剛性 $EA = 150\text{MN}$ 、分布荷重 $q=50\text{N/m}$ 、ケーブルの無応力長が $l=100\text{m}$ の場合について、2要素でモデル化を行い、分布荷重が作用した状態での形状を計算し、この状態のケーブルの最下点に、さらに水平荷重 P を、 0.5kN 、 1.0kN 、 2.0kN 、 5.0kN と順次載荷したときのケーブルの変形状態を解析した結果を示している。この計算例の未知量は、節点2の変位3成分と二つのケーブルの積分定数 c の6成分の合計9成分

分である。ただし、この計算例は面外方向の変位や力成分はないので、実質の未知量は6成分である。この図より $P=0.5\text{kN}$ のケーブル形状のように一本のケーブルが弛緩に近い状態になっていても少ない自由度で計算が行えている。ただし、 H や f_c の積分を正確に行う必要があり、この計算例では、折れ曲がったところで被積分関数が折れ曲がったような関数になるので、台形則のような低次の数値積分法を用いて、ケーブル要素を多くの区間に分割して積分する必要がある。

6. 滑車を有するケーブル

図4のように、ケーブル (h), (i), (j) が節点 I, J に取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える。滑車を介して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}$, $\Pi_C^{(i)}$, $\Pi_C^{(j)}$ とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ & + \Delta \tilde{u}_I \{ (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)}) - (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) \} \\ & + \Delta \tilde{u}_J \{ (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) - (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I$, $\Delta \tilde{u}_J$ は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点 I と J のケーブルのずれ変位を表している。この変位は、ケーブルに沿った x 軸方向の変位を正としている。また、式中の $(N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$ の添え字は、要素 (h) の節点 I での軸力を表している。

上式を変形して、要素ごとに表すと。

$$\Pi_C = \Pi_C^{(h)} + \Delta \tilde{u}_I (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$$

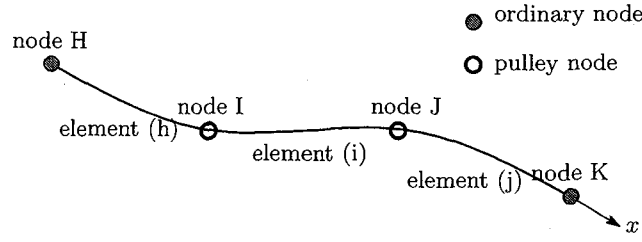


図-4 滑車を有するケーブル

$$\begin{aligned}
 & + \Pi_C^{(i)} - \Delta \tilde{u}_I(N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) + \Delta \tilde{u}_J(N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) \\
 & + \Pi_C^{(j)} - \Delta \tilde{u}_J(N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \quad (25)
 \end{aligned}$$

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u}(N + \Delta N)]_0^l \quad (26)$$

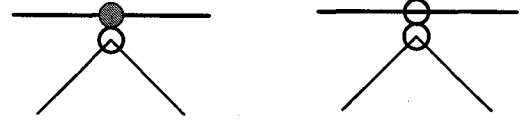
上式の汎関数の停留条件を求め、この非線形方程式をニュートン法で解くための反復式を誘導すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -H_{(k)}^* & \text{symm.} \\ -I & 0 \\ -e_{a(k)}^{*T} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ e_{b(k)}^{*T} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta c_{(k+1)} - \Delta c_{(k)} \\ \Delta u_{a(k+1)} - \Delta u_{a(k)} \\ \Delta \tilde{u}_{a(k+1)} - \Delta \tilde{u}_{a(k)} \\ \Delta u_{b(k+1)} - \Delta u_{b(k)} \\ \Delta \tilde{u}_{b(k+1)} - \Delta \tilde{u}_{b(k)} \end{Bmatrix} \\
 & = - \begin{Bmatrix} f_{c(k)} \\ f_{a(k)} \\ \tilde{f}_{a(k)} \\ f_{b(k)} \\ \tilde{f}_{b(k)} \end{Bmatrix} \quad (k > 0) \quad (27)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 f_{c(k)} &= \int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N_{(k)}}{EA} \right) e_{(k)}^* \right\} dx \\
 & \quad + \left[\Delta u_{(k)} + \Delta \tilde{u}_{(k)} e_{(k)}^* \right]_0^l \\
 f_{a(k)} &= -(c + \Delta c_{(k)}) - (Q_a + \Delta Q_a) \\
 f_{b(k)} &= (c + \Delta c_{(k)}) - \int_0^l (q + \Delta q) dx - (Q_b + \Delta Q_b) \\
 \tilde{f}_{a(k)} &= -e_{a(k)}^{*T} (c + \Delta c_{(k)}) \\
 \tilde{f}_{b(k)} &= e_{b(k)}^{*T} \left\{ (c + \Delta c_{(k)}) - \int_0^l (q + \Delta q) dx \right\} \\
 H_{(k)}^* &= \int_0^l \left\{ \frac{I}{EA} + \left(1 - \frac{N}{EA} \right) \frac{I - e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{N + \Delta N_{(k)}} \right\} dx \\
 & \quad + \left[\Delta \tilde{u}_k \frac{I - e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{N + \Delta N_{(k)}} \right]_0^l
 \end{aligned}$$

$k = 0$ の場合に相当する初期値は第一変分の式を増



(a) 一方のケーブル
に固定

(b) 両方のケーブル
が自由に移動可能

図-5 滑車の状態

分量に関して線形化した次式により求める。

$$\begin{pmatrix} -H_{(0)} & \text{symm.} \\ -I & 0 \\ -e_{a(0)}^T & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ e_{b(0)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta c_{(1)} \\ \Delta u_{a(1)} \\ \Delta \tilde{u}_{a(1)} \\ \Delta u_{b(1)} \\ \Delta \tilde{u}_{b(1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f_{c(0)} \\ f_{a(0)} \\ \tilde{f}_{a(0)} \\ f_{b(0)} \\ \tilde{f}_{b(0)} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ここで、

$$f_{c(0)} = \int_0^l \left(\frac{I}{EA} + \frac{I - ee^T}{N} \right) \int_0^x \Delta q dx dx \quad (30a)$$

$$f_{a(0)} = -c - (Q_a + \Delta Q_a) \quad (30b)$$

$$f_{b(0)} = c - \int_0^l (q + \Delta q) dx - (Q_b + \Delta Q_b) \quad (30c)$$

$$\tilde{f}_{a(0)} = -e_a^T c \quad (30d)$$

$$\tilde{f}_{b(0)} = e_b^T \left(c - \int_0^l (q + \Delta q) dx \right) \quad (30e)$$

$$H_{(0)} = \int_0^l \left(\frac{I}{EA} + \frac{I - ee^T}{N} \right) dx \quad (30f)$$

これらの式でも、積分定数 Δc は各ケーブル要素ごとに定義されているので、構造全体の剛性方程式を組み立てる前に消去できる。その結果、各要素の未知量は、両端での節点変位 Δu_a 、 Δu_b と滑車を通ったケーブルのずれ変位を表す $\Delta \tilde{u}_a$ と $\Delta \tilde{u}_b$ になる。なお、節点 a だけに滑車を取り付けられている場合には、節点 b の $\Delta \tilde{u}_b$ に関する式と項を削除すればよい。また、両端のずれ変位に関する式と項を削除すると、前節に示した通常のケーブル要素の式が得られる。

上述の定式化のように、要素端部に滑車を付加する方法を用いると、図 5 のような一方のケーブルに固定された滑車と二本以上の複数のケーブルが滑車内で自由に移動可能な状態を容易に再現することができる。

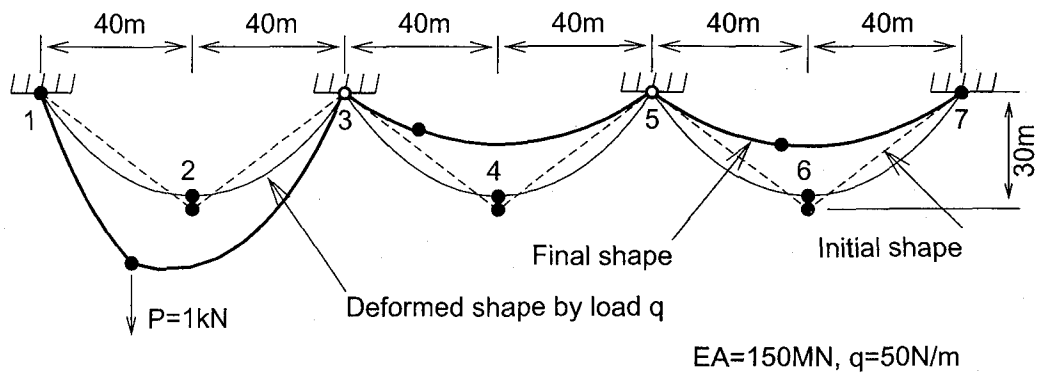


図-6 滑車を有する3径間ケーブルの計算例

表-3 3径間ケーブルの反力とずれ変位

節点	水平反力 (右向き正, N)	鉛直反力 (上向き正, N)	ずれ変位 (右向き正, m)
1	-1420.8	4014.0	—
3	-1600.9	5571.5	-28.76
5	27.4	4270.0	-14.02
7	2994.3	2144.5	—

7. 滑車を有するケーブルの計算例

7.1 3径間ケーブル

滑車を有するケーブルとして図6のような4個の支点で支持されたケーブルの解析を行う。ここでは、中間支点(節点3, 5)に滑車を取り付けられている状態を考える。各支点の距離は80m, これらの支点を通して無応力長300mのケーブルが取り付けられている。荷重の作用していない初期の状態ではケーブル長が300mになるように、図に破線で示しているように折れ曲がった状態でモデル化している。この初期状態のケーブルに分布荷重 $q=50\text{N/m}$ を作用させたときの形状が図の細実線である。この例では、各支点間のケーブル長が同じであり、分布荷重も同じ値であるので、滑車を通ったケーブルのずれ変位はない。この状態のケーブルの節点2にさらに鉛直荷重 $P=1\text{kN}$ を作用させたときの形状を太実線で示している。各支点の反力と滑車での変位を表3に示す。この荷重により、節点1と3, 3と5, 5と7の間のケーブル長はそれぞれ, 128.76m, 85.26m, 85.98mとなった。

7.2 ケーブルトラス

ケーブルトラスの計算例を図7に示す。ケーブルトラスの初期形状は細破線で示しているように、直線部材で表している。このケーブルトラスは、節点1と7が固定支持、節点6と11には滑車を取り付けられ、この滑車を固定支持している。ただし、滑車のずれ変位は拘束されていない。節点13と14は、節点6と11での主ケーブルのずれ変位を許容させるためと、構造全

体の反力を与えるための節点である。また、節点12はハンガーケーブルのずれ変位と反力を与えるための節点である。ケーブルトラス内の節点2から5と節点8から10は、滑車内を主ケーブルとハンガーケーブルの両方が自由に滑り変位可能な状態になっている。すなわち、このトラスケーブルは2本の主ケーブルと1本のハンガーケーブルが結合されることなく滑車により形成されている。

図中の太破線は節点12から14に集中荷重を作用させることにより、ケーブルにプレストレスを与えたときの形状を表している。滑車内を二組のケーブルが自由に移動可能なので、節点2や8等の位置が大きく移動している事がわかる。この状態で、主ケーブルには一定の軸力10kNが、ハンガーケーブルには0.5kNが作用している。この状態で、節点11のハンガーケーブルは、下方に23.09m移動し、主ケーブルは節点6で0.339m, 節点11で0.271m左側にずれている。図中の細実線は、この状態で主ケーブルに $q=63\text{N/m}$, ハンガーケーブルに 3.27N/m の分布荷重を作用させたときの形状を表している。この状態で、節点11のハンガーケーブルは、下方に25.69m移動し、主ケーブルは節点6で0.935m, 節点11で0.0592m左側にずれている。

分布荷重が作用して釣り合い状態にあるケーブルの節点6と11のずれ変位を拘束し、節点8に $P=100\text{kN}$ の鉛直荷重を作用させたときの形状を図中に太実線で示す。なお、このケーブルのヤング係数は $E=140\text{GN/m}^2$, 主ケーブルの断面積は、 $A=758.0\text{mm}^2$, ハンガーケーブルの断面積は、 39.4mm^2 である。

この計算例のように、全ての節点が滑車で構成されているようなケーブル構造を考えると、軸力がケーブル全体に均等に作用するので、想定外の荷重によるケーブルの弛緩を避けることができる。また、滑車で構成されたケーブル構造に荷重が作用したときの形状を基に、剛結ケーブル構造の形状を決めると、剛結ケーブル構造の軸力の不均衡を避けることができるので、このような構造の解析にも、滑車を有するケーブル要素は有効である。

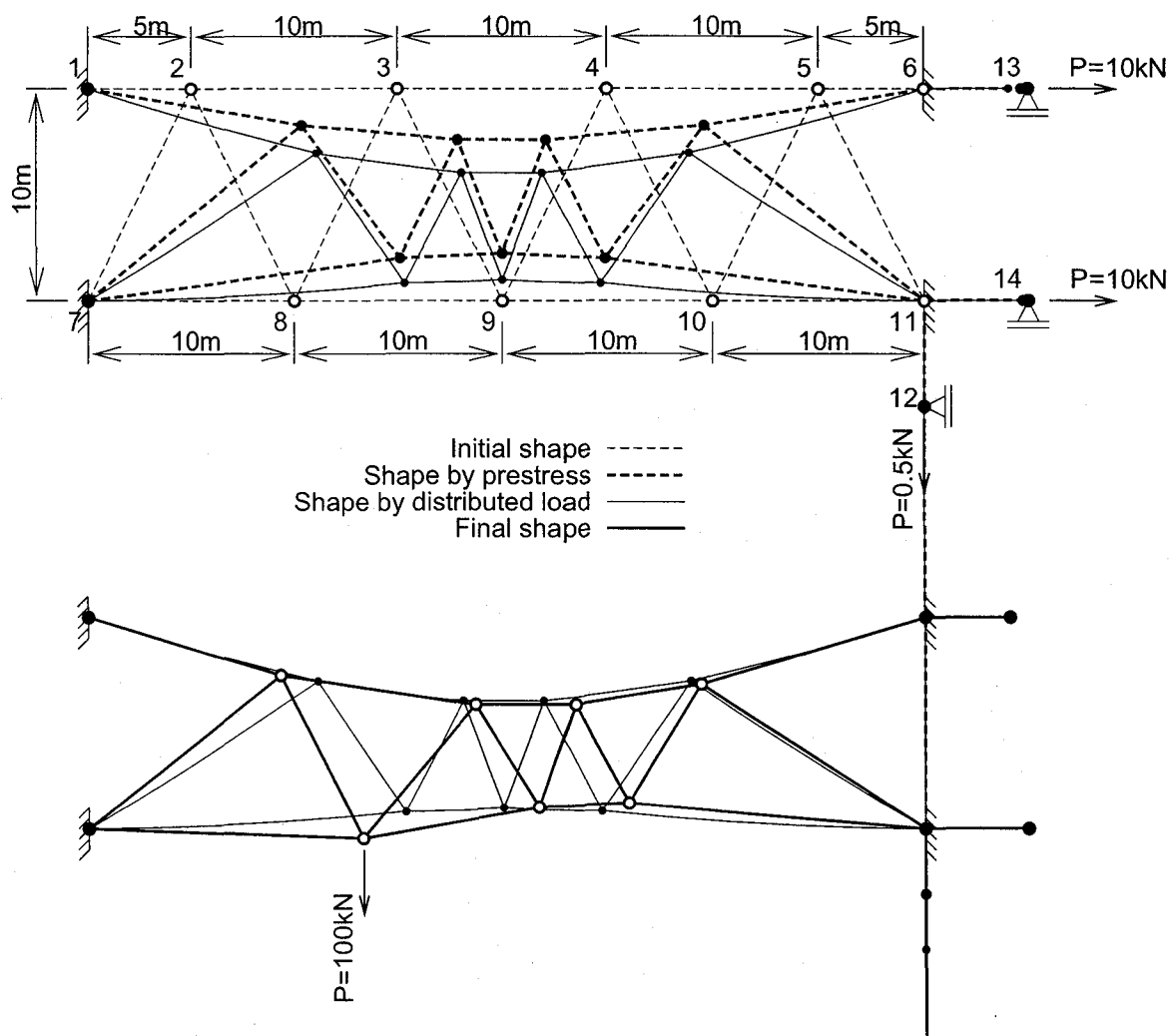


図-7 滑車を有するケーブルトラス

8. あとがき

ケーブル要素の汎関数を修正し、両節点での変位から要素内での変位を補間する必要の無い汎関数を示し、この汎関数によるケーブル要素の剛性方程式を誘導した。この要素は、剛性方程式の積分を正確に行えば、ケーブル要素の正しい剛性方程式が得られるので、少ない自由度で、大きくたわんだ状態のケーブルの解析が行えることを示した。

また、汎関数に隣接するケーブル要素間の軸力が等しい条件を付加することにより、節点に滑車を有するケーブル要素の剛性方程式を誘導し、数値計算により、その妥当性と有効性を示した。

参考文献

- 1) 中西 宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第 318 号, pp.41-50, 1982.
- 2) 謝 旭, 伊藤 学, 山口広樹: Updated Lagrangian

手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.427-434, 1995 年 3 月.

- 3) 林 正, 岩崎英治, 山野長弘, 時 譲太: ハイアラーキ要素によるケーブル構造の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No.668/I-54, pp.207-216, 2001.
- 4) 阿井正博, 西岡 隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, 第 260 号, pp.17-32, 1977.
- 5) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, 第 270 号, pp.41-49, 1978.
- 6) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也: 混合法によるケーブルネットの解析 その (2) 幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, 第 220 号, pp.35-45, 1974.
- 7) B. M. McDonald and A. H. Peyrot: Analysis of Cable Suspended in Sheaves, *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol.114, No.3, 1988.
- 8) M. Aufaure: A Finite Element of Cable Passing Through a Pulley, *Computers & Structures*, Vol.46, No.5, pp.807-812, 1993.
- 9) 岩崎英治, 林 正: 修正された変分原理による空間曲線材の有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.367-380, 1991.

(2001 年 9 月 14 日受付)