

弾性床上梁にモデル化した水中浮遊式トンネルの波浪応答特性

Wave response characteristics of Submerged Floating Tunnel modeled as a beam on elastic foundation

佐藤太裕*, 蟹江俊仁**, 三上 隆***

Motohiro Sato, Shunji Kanie and Takashi Mikami

*修士(工), 北海道大学大学院博士後期課程, 工学研究科社会基盤工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

**博士(工), 北海道大学大学院助教授, 工学研究科社会基盤工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

***工博, 北海道大学大学院教授, 工学研究科社会基盤工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

The purpose of this study is to evaluate the wave response characteristic of Submerged Floating Tunnel (S.F.T.) modeled as a beam on elastic foundation. We have investigated the applicability of the modeling of a beam on elastic foundation from the viewpoint of structural mechanics. The beam model on elastic foundation for the dynamic analysis is the simple one, but it is very effective for designers to assume structural dimensions and evaluate the basic characteristics quickly. To express the wave force acting on the tunnel, Modified Morison's equation is applied. The analytical solution of the model is obtained and dynamic characteristic of global behavior can be considered theoretically.

Key Words: submerged Floating Tunnel, beam on elastic foundation, modified Morison's equation, wave response analysis

キーワード: 水中浮遊式トンネル, 弾性床上梁, 修正モリソン式, 波浪応答解析

1. はじめに

水中浮遊式トンネルは、浮力を有するチューブ状のトンネル本体を係留索(テンションレグ)により海中に安定化させた新規渡海構造物であり、フィヨルドのような大水深域や、橋梁、橋脚などの海上・海中障害物を極力減らしたい海域での渡海手段として大いに期待されているものである¹⁾。

本来水中トンネル外殻部や内部構造に生じる断面力を精度良く算定するには三次元解析が望ましいが、詳細かつ厳密な理論に基づく解析では、各パラメータの応答や強度に及ぼす影響の程度は解析を行うまでその予想が難しい。このため初期構造設計の段階においては比較的簡単でかつ対象とする水中トンネルと等価なモデルを用いた各構造諸元の決定が要求されることとなる。トンネル縦断方向の全体解析を行う場合、弾性支承上梁モデルが候補の1つとして挙げられる。しかし水中トンネルは、動揺を許容するという構造特性から、トンネル函体を安定化させる係留索による局所的な離散ばねの影響が小さく、一様分布ばねとして扱う、つまり弾性床上梁に置き換えた解析が可能な場合も多く予想される。そこで著者らはこれまで弾性支承上の梁とみなした水中浮遊式トンネルと弾性床上梁との等価性について静的、動的な面から検討を行い、その適用範囲を構造力学的に明らかにしている^{2), 3)}。弾性床上梁モデルを用いる最大の利点は支配方程式が簡単な微分方程式で表され、静的変形およ

び断面力はもちろんのこと、動的問題における解析解も比較的容易に得られる点にあるといえる。弾性床上梁モデルは詳細設計の段階で要求される局所的な挙動については必ずしも十分な精度の応答解が得られるとはいえないが、初期構造設計段階における基本応答特性の把握を行う際の精度としては十分であり、解析モデルとして非常に有効であると考えられる。

本研究は波浪が作用する長大な水中浮遊式トンネルを弾性床上梁にモデル化し、その解析解より得られる応答値および計算式から大域的な波浪応答特性の概略把握を行うことを目的としている。支配方程式は動的影響を考慮したものとなり、これを解くことにより多少煩雑であるが周波数応答の厳密解が得られる。本研究では弾性床上梁とみなした水中浮遊式トンネルの曲げ固有振動特性、波と構造物が同調しない波周波数(非共振周波数領域)を有する波浪が作用した場合における水中浮遊式トンネルの動的特性と、波と構造物が同調するような波周波数(共振周波数領域)を有する波浪が作用した場合における構造特性のそれぞれについて考えることとする。作用波力は修正モリソン式を線形化し支配方程式の外力項とすることで評価する。

2. 解析モデル

図-1は解析モデルの断面図と側面図を示したものである。トンネルは円形断面で、トンネル軸方向に係留

索を等間隔 h で配置した水中トンネルを想定する。係留索の形状は (a) に示すタイプのものを考える。この形式は水平方向の剛性が鉛直方向の剛性に比べて非常に低いいため、振動特性が水平方向と鉛直方向で大きく異なる性質を有している。

著者らのこれまでの研究³⁾では、一様梁とみなした水中トンネルは動的問題を考慮した場合、弾性床上梁とほぼ等価である条件は、基本構造諸元及び材料条件により得られる係留索のトンネルに対する相対的剛性を表す無次元パラメータ K_v が以下の式を満たすときであることが確認された。

$$K_v = \frac{k_v h^3}{EI} \leq 1.2 \quad (1)$$

ここで EI はトンネルの曲げ剛性、 h は係留索配置間隔、 k_v は係留索の水平方向復元力ばね定数を表す。このことは鉛直方向の運動についても同様に成り立つことは明らかである。

また、弾性床上梁との等価性が保証された場合、弾性床の地盤反力係数に相当するばね定数 k'_v は係留索のばね定数を係留索配置間隔で平均化した次式で与えられることとなる。

$$k'_v = \frac{k_v}{h} \quad (2)$$

本研究は式 (1) を満たすような長大な水中浮遊式トンネルを解析対象とするものである。

3. 修正モリソン式による流体力評価

本研究では動的問題を扱うため、作用波力は固定柱体に適用するモリソン式に構造物と流体との相対運動による影響を考慮した修正モリソン式を適用する。モリソン式において作用波力は、柱体軸の法線方向の流速と同位相の抗力と、同方向の流体加速度と同位相の慣性力との線形和で表されることとなる。ここではトンネル軸に対して斜め入射する波浪を想定して流体力（支配方程式の外力項）の定式化を行う。

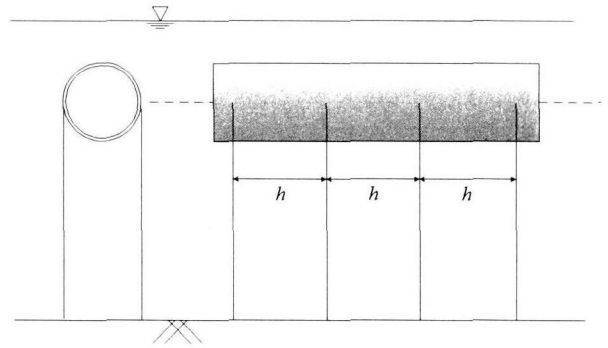
定式化における座標系は図-2 に示すとおりである。 x 軸はトンネル軸、 y 軸は水平軸を表す。波が x 軸に入射する角度を ϕ とし、その x 軸から ϕ 傾いた座標系を $X-Y$ とする。また鉛直下向きを z (Z) 方向の正の向きとする。このとき座標変換は次式のように行われる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Y および Z 方向水粒子速度をそれぞれ \dot{w}_Y 、 \dot{w}_Z とすると、これらは微小振幅進行波理論により次式で表される。

$$\dot{w}_Y = \frac{\omega H \cosh kz}{2 \sinh kd} \cos(kY - \omega t) \quad (4 a)$$

$$\dot{w}_Z = \frac{\omega H \sinh kz}{2 \sinh kd} \sin(kY - \omega t) \quad (4 b)$$



(a) 断面図 (b) 側面図
図-1 解析モデル

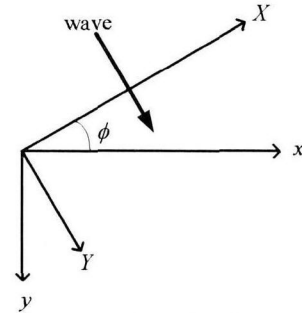


図-2 座標系

ここで ω は波周波数、 H は波高、 d は水深、 k は波数、 t は時間を表す。トンネル軸 (x 軸) 上の y 方向水粒子速度 \dot{w}_y および z 方向水粒子速度 \dot{w}_z は次式となる。

$$\dot{w}_y = \dot{w}_Y \cos \phi = A \cos \Theta \quad (5 a)$$

$$\dot{w}_z = \dot{w}_Z = \frac{\omega H \sinh kz}{2 \sinh kd} \sin \Theta \quad (5 b)$$

ここで

$$A = \frac{\omega H \cosh kz \cos \phi}{2 \sinh kd}$$

$$\Theta = kx \sin \phi - \omega t$$

である。また y 方向 (水平方向) および z 方向 (鉛直方向、下向きを正) の流体力はそれぞれ次式で表される。

$$f_y = \frac{1}{2} \rho D C_D |\dot{w}_y - \dot{v}| (\dot{w}_y - \dot{v}) \quad (6 a)$$

$$+ \rho \frac{\pi D^2}{4} C_M \ddot{w}_y - \rho \frac{\pi D^2}{4} (C_M - 1) \ddot{v}$$

$$f_z = \frac{1}{2} \rho D C_D |\dot{w}_z - \dot{w}| (\dot{w}_z - \dot{w}) \quad (6 b)$$

$$+ \rho \frac{\pi D^2}{4} C_M \ddot{w}_y - \rho \frac{\pi D^2}{4} (C_M - 1) \ddot{w}$$

ここで ρ は海水密度、 D はトンネル断面径、 C_M は慣性力係数、 C_D は抗力係数、 v 、 w は構造物の y 、 z 方向変位をそれぞれ表す。上式に \dot{w}_y 、 \dot{w}_z の式を代入することで斜め入射を考慮した作用波力が表される。

修正モリソン式中の非線形項 (抗力項) は水深が波長に比べて比較的大きく、かつ波高が部材直径に比べて比較的小さい、いわゆる慣性力卓越領域に属する場合は省

略できる。もしそうでない場合は、等価線形化法やフーリエ級数展開などにより線形化を行うか、そのまま支配方程式の外力項に代入して非線形方程式として解くことになる¹⁰⁾。ここでは最小自乗的な考え方をを用いて線形化を行う。まず構造物の速度が水粒子速度に比べて小さいと仮定することで、抗力項は次式のように書くことができる。

$$|\dot{\bar{w}}_y - \dot{v}|(\dot{\bar{w}}_y - \dot{v}) \cong |\dot{\bar{w}}_y| |\dot{\bar{w}}_y - 2|\dot{\bar{w}}_y||\dot{v} \quad (7)$$

式(7)中の水粒子速度の絶対値 $|\dot{\bar{w}}_y|$ を時間平均値 a として近似する。具体的には次の積分値

$$J = \int_0^{2\pi} (|\dot{\bar{w}}_y| |\dot{\bar{w}}_y - a\dot{\bar{w}}_y|)^2 d\Theta \quad (8)$$

を最小とする a を求めることとなる。式(8)を a で偏微分すると

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -2 \int_0^{2\pi} (|\dot{\bar{w}}_y| |\dot{\bar{w}}_y^2 - a\dot{\bar{w}}_y^2) d\Theta = 0 \quad (9)$$

ここで水平方向の運動について考えると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\dot{\bar{w}}_y| |\dot{\bar{w}}_y^2| d\Theta &= A^3 \int_0^{2\pi} |\cos^3 \Theta| d\Theta \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{\omega H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd} \right)^3 \end{aligned}$$

$$a \int_0^{2\pi} \dot{\bar{w}}_y^2 d\Theta = aA^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta d\Theta = a\pi \left(\frac{\omega H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd} \right)^2$$

となるから、これらを式(9)に代入して a について解くと次式となる。

$$a = \frac{8}{3\pi} \frac{\omega H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd} \quad (10)$$

ちなみにこの係数はフーリエ級数展開の第1項目のみをとった結果と一致する。またこの線形化は鉛直方向の運動についても、水粒子速度を式(5b)とすることで同様に得られる。

4. 波浪応答解析

修正モリソン式により評価された流体力を線形化した後に支配方程式の外力項に代入し整理することで波浪応答を記述した次式が得られる。

$$\begin{aligned} m' \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c' \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + k'_v v(x,t) \\ = F_1 \cos(kx \sin \phi - \omega t) + F_2 \sin(kx \sin \phi - \omega t) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで m' 、 c' を単位長さあたりのトンネル本体の質量、粘性減衰係数としたとき

$$m' = m + \rho \frac{\pi D^2}{4} (C_M - 1.0), \quad c' = c + \rho DC_D a$$

$$F_1 = \frac{3}{4\pi} \rho DC_D \left(\frac{\omega H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd} \right)^2$$

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} \rho C_M \frac{\omega^2 H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd}$$

この支配方程式の一般解 $v(x,t)$ は同次解 $v_h(x,t)$ と特解 $v_p(x,t)$ の和となり、それらはそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} v_h(x,t) &= (c_1 \cosh \alpha_1 x \sin \beta_1 x + c_2 \sinh \alpha_1 x \sin \beta_1 x \\ &\quad + c_3 \cosh \alpha_1 x \cos \beta_1 x + c_4 \sinh \alpha_1 x \cos \beta_1 x \\ &\quad + c_5 \cosh \alpha_2 x \sin \beta_2 x + c_6 \sinh \alpha_2 x \sin \beta_2 x \\ &\quad + c_7 \cosh \alpha_2 x \cos \beta_2 x + c_8 \sinh \alpha_2 x \cos \beta_2 x) \sin \omega t \\ &\quad + (-c_4 \cosh \alpha_1 x \sin \beta_1 x - c_3 \sinh \alpha_1 x \sin \beta_1 x \\ &\quad + c_2 \cosh \alpha_1 x \cos \beta_1 x + c_1 \sinh \alpha_1 x \cos \beta_1 x \\ &\quad + c_8 \cosh \alpha_2 x \sin \beta_2 x + c_7 \sinh \alpha_2 x \sin \beta_2 x \\ &\quad - c_6 \cosh \alpha_2 x \cos \beta_2 x - c_5 \sinh \alpha_2 x \cos \beta_2 x) \cos \omega t \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} v_p(x,t) &= [F_1 \{A_p \sin(kx \sin \phi) + B_p \cos(kx \sin \phi)\} \\ &\quad + F_2 \{-A_p \cos(kx \sin \phi) + B_p \sin(kx \sin \phi)\}] \sin \omega t \\ &\quad + [F_1 \{A_p \cos(kx \sin \phi) - B_p \sin(kx \sin \phi)\} \\ &\quad + F_2 \{A_p \sin(kx \sin \phi) + B_p \cos(kx \sin \phi)\}] \cos \omega t \end{aligned} \quad (12b)$$

ここで特性解は $m'\omega^2 - k'_v < 0$ のとき

$$\alpha_1 = \beta_2 = \sqrt[3]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \cos \left\{ \frac{1}{4} (\pi + \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \right\} \quad (13a)$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \sqrt[3]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \sin \left\{ \frac{1}{4} (\pi + \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \right\} \quad (13b)$$

$$(\alpha_0 = \frac{m'\omega^2 - k'_v}{EI}, \quad \beta_0 = \frac{c\omega}{EI})$$

$m'\omega^2 - k'_v > 0$ のとき

$$\alpha_1 = \beta_2 = \sqrt[3]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \cos \left(\frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) \quad (13c)$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \sqrt[3]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \sin \left(\frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) \quad (13d)$$

となりまた

$$A_p = \frac{-m'\omega^2 + k'_v + EI(k \sin \phi)^4}{\{-m'\omega^2 + k'_v + EI(k \sin \phi)^4\}^2 + c'^2 \omega^2} \quad (14a)$$

$$B_p = \frac{c' \omega}{\{-m'\omega^2 + k'_v + EI(k \sin \phi)^4\}^2 + c'^2 \omega^2} \quad (14b)$$

である。また式(12a)中の積分定数 $c_1 \sim c_8$ は境界条件により決定される。

5. 動的構造特性に関する考察

支配方程式(11)及び周波数応答解析解(12)の理論的な考察により得られる動的構造特性についてここではいくつか述べる。

5.1 曲げ固有振動特性

弾性床上梁の j 次曲げ振動の固有振動数 ω_j については文献 6), 8) で証明されているように

$$\omega_j > \sqrt{\frac{k'_v}{m'}} (= \omega_{b0}) \quad (15)$$

をいかなる境界条件においても満たすことがわかっている。つまり水中トンネルが弾性床上梁にモデル化可能な場合、外力周波数が $\omega < \omega_{b0}$ ならば曲げ変形に関する共振は起こらない。このことは初期設計上の 1 つの目安として有用な情報である。

曲げ固有振動特性をさらに検討するために、次の無減衰支配方程式について考える。

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + k'_v v(x,t) = 0 \quad (16)$$

ここで $v(x,t) = v_0(x)e^{i\omega t}$ と変数分離し上式に代入すると、 x に関する次の方程式が得られる。

$$\frac{d^4 v_0(x)}{dx^4} - \frac{m'\omega^2 - k'_v}{EI} v_0(x) = 0 \quad (17)$$

上式を解いて

$$v_0(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px + C_3 \sinh px + C_4 \cosh px \quad (18)$$

$$(C_1, C_2, C_3, C_4 : \text{積分定数}, p = \sqrt[4]{\frac{m'\omega^2 - k'_v}{EI}})$$

ここで例えば両端単純支持の境界条件を考えた場合、 l をトンネルの長さとする

$$v_0(x) = C \sin \frac{j\pi}{l} x \quad (j : \text{振動の次数}) \quad (19)$$

となるから、これと式 (18) より次式が得られる。

$$p = \sqrt[4]{\frac{m'\omega_j^2 - k'_v}{EI}} = \frac{j\pi}{l} \quad (20)$$

上式を満たす ω_j が曲げ自由振動の固有振動数となる。これを ω_j について解くと

$$\omega_j = \sqrt{\frac{EI}{m'} \left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 + \frac{k'_v}{m'}} = \sqrt{\frac{EI}{m'} \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{K_v n^4}{j^4 \pi^4}}} \quad (21)$$

ここで $n = l/h$ である。または上式においても $k'_v \neq 0$ ならば、剛体モードの固有振動数 $\omega_{b0} = \sqrt{k'_v/m'}$ に対する ω_j の比として次式で表される。

$$\frac{\omega_j}{\omega_{b0}} = \sqrt{1 + \frac{j^4 \pi^4}{K_v n^4}} \quad (22)$$

上式は弾性床上梁の固有振動数の決定要因が

$$K_v n^4 = \frac{k'_v l^4}{EI} \quad (23)$$

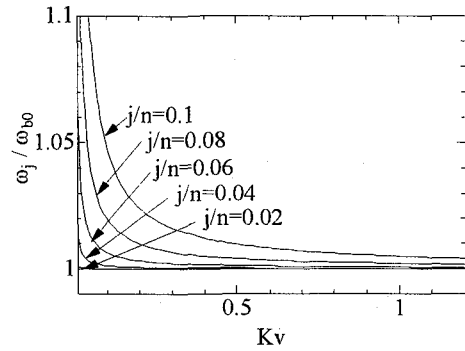


図-3 曲げ固有振動特性

であり、この値の増加に伴い ω_j/ω_{b0} が 1 に収束することを表している。図-3 は上式をグラフに表したものである。地盤反力係数に相当する値が大きくなるか、または長大になればなるほど、1 次（最低次）モードの固有振動数は剛体モードの固有振動数に近い値となり、かつ低次と高次モードの固有振動数が互いに接近することがわかる。以上のことから曲げ振動においては、相対的に長大であれば波など周期外力との同調は $\omega_j > \omega_{b0}$ において ω の増加とともに連続的に発生するため、 ω_{b0} がより重要なパラメータとなる。言い換えると、 ω_{b0} を把握することで構造物としてのおおよその固有振動数を把握できるといえる。

5.2 非共振領域の応答ピーク値に関する考察

外力振動数 ω が $\omega > \omega_{b0}$ であるならば、構造物の固有振動数との同調による共振が起こり得ることは 5.1 で触れたとおりだが、以下では共振を回避できる周波数領域 ($\omega < \omega_{b0}$) における特性について検討する。

非共振周波数領域の応答は入射角の影響を大きく受けることが推測される。大雑把にいうと、例えば $\phi \cong 0^\circ$ ならば、 ω の増加とともに応答が大きくなる、つまり 1 質点系の強制振動に近い周波数特性を示す。逆に $\phi \cong 90^\circ$ ならば、外力波の波長の長さ依存する変形が予想される。このことから $\phi \cong 0^\circ$ では周波数応答は比較的単純であるが、入射角の増加に伴いトンネル軸方向に向かう作用波力の影響に起因する応答特性を考慮しなければならないこととなる。文献 6), 8) では $\phi = 90^\circ$ において共振によるピークではない曲げ応答ピーク値が $\omega < \omega_{b0}$ で存在し、そのピーク値をとるおおよその周波数（特性周波数）を理論的に導出している。ここでは任意の入射角を考慮した場合の特性周波数を導出する。分散関係式として次式が成り立つ。

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (24)$$

ここで g は重力加速度である。上式は波長の減少に伴い波周波数が増加することを示している。一方構造物と作用波に目を向けると、弾性床上梁は梁の曲げ剛性と弾性床の両方で曲げ変形に抵抗するが、その両者を比較して曲げ剛性の影響がより大きい場合は作用外力に対して剛

体的であり、入射波の波長が長くなるにつれその柔軟な傾向を示す。一方弾性床の影響がより大きい場合においては梁は相対的に柔軟であり、波長が短くなるにつれその傾向は顕著となる。このことからそのおおよその中間点、すなわち

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \cong k'_v v \quad (25)$$

を満たす波数に対応する波周波数が曲げモーメント振幅を極大とする振動数に近い値をとることが考えられる。たわみとして $v = e^{kx \sin \phi}$ を仮定して式 (25) に代入すると k に関する次式が得られる。

$$k = \sqrt[4]{\frac{k'_v}{EI \sin^4 \phi}} \quad (26)$$

上式が斜め入射において曲げモーメント振幅を極大にする波数を表す式となる。これと分散関係式 (24) より、曲げモーメント振幅を極大にする波周波数はおおよそ次式となる。

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{g^4 k'_v}{EI \sin^4 \phi} \tanh^4 \sqrt{\frac{k'_v d^4}{EI \sin^4 \phi}}} \quad (27)$$

5.3 共振領域の応答ピーク値に関する考察

ここでは共振ピーク値を解析的に導出し、考察を行う。長大な弾性床上梁においては $\omega > \omega_{b0}$ は共振周波数領域である。系の減衰が小さい場合、モード形状は無減衰の場合の固有振動モードでよい近似となる。このとき共振時の応答は次式で表される。

$$v(x, t) = \bar{A} \bar{v}(x) \sin(\omega t + \gamma) \quad (28)$$

ここで、 ω は励起される固有振動モードの固有振動数（共振時であることから波周波数と一致している）、 \bar{A} は応答振幅を表す。また $\bar{v}(x)$ は正規化されているものとする。これを支配方程式 (11) に代入し、 $\bar{v}(x) \sin(\omega t + \gamma)$ が無減衰の場合の支配方程式を満たすことを考慮すると次式が成り立つ。

$$m' \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + k'_v v(x, t) = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \bar{A} c' \omega \bar{v}(x) \cos(\omega t + \gamma) \\ & = F_1 \cos(kx \sin \phi - \omega t) + F_2 \sin(kx \sin \phi - \omega t) \end{aligned} \quad (30)$$

ここでモード形状 $\bar{v}(x)$ と両辺の内積をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \bar{A} c' \omega (\cos \omega t \cos \gamma - \sin \omega t \sin \gamma) \int \bar{v}^2(x) dx \\ & = \cos \omega t \int \bar{v}(x) \{F_1 \cos(kx \sin \phi) + F_2 \sin(kx \sin \phi)\} dx \\ & \quad + \sin \omega t \int \bar{v}(x) \{F_1 \sin(kx \sin \phi) - F_2 \cos(kx \sin \phi)\} dx \end{aligned}$$

$\int \bar{v}^2(x) dx = 1$ を考慮し $\cos \omega t$ 成分と $\sin \omega t$ 成分にそれぞれ分けると、次の2式が得られる。

$$\bar{A} c' \omega \cos \delta = \int \bar{v}(x) \{F_1 \cos(kx \sin \phi) + F_2 \sin(kx \sin \phi)\} dx \quad (31)$$

$$\bar{A} c' \omega \sin \delta = \int \bar{v}(x) \{F_1 \sin(kx \sin \phi) - F_2 \cos(kx \sin \phi)\} dx \quad (32)$$

上の2式の辺々を2乗してそれぞれ足すと共振時の応答振幅 \bar{A} は次式で表されることとなる。

$$\begin{aligned} \bar{A} & = \frac{1}{c' \omega} \left[\left[\int \bar{v}(x) \{F_1 \cos(kx \sin \phi) + F_2 \sin(kx \sin \phi)\} dx \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + \left[\int \bar{v}(x) \{F_1 \sin(kx \sin \phi) - F_2 \cos(kx \sin \phi)\} dx \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33) \end{aligned}$$

上式より共振時の応答ピーク値は振動数および減衰係数に反比例することと、入射波の x 軸方向に関する加振パターンと固有振動モードの内積に依存することがわかる。

5.4 動的影響を考慮した境界の影響範囲の考察

境界から十分離れた、すなわち境界の影響が非常に小さい位置の動的特性は、支配方程式より得られる特解の性質のみにより把握することができる。このことは初期設計上非常に有効な情報であるといえる。境界の影響が及ばないということは、集中力、集中モーメントの作用による変形及び断面力の空間方向（本研究の場合は x 方向）の収束を意味する。理論的に考えるとこのことは指数関数を含む同次解の性質に起因するものである。以下では同次解の性質を表す支配方程式の特性解を無次元量で表示し、その特性解の理論的解釈から動的影響が考慮された場合の境界の影響範囲に関する条件式を導出する。式 (13 a) 及び式 (13 b) より、同次解の指数部となる $\alpha_1 x$ 、 $\beta_1 x$ 等について多少の式変形を行うと次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 x (= \beta_2 x) & = \alpha_1 h \xi \\ & = \sqrt[8]{K_v^2 \{(\Omega^2 - 1)^2 + (2h_0 \Omega)^2\}} \cos \frac{\pi + \tan^{-1} \frac{2h_0 \Omega}{\Omega^2 - 1}}{4} \cdot \xi \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 x (= \alpha_2 x) & = \beta_1 h \xi \\ & = \sqrt[8]{K_v^2 \{(\Omega^2 - 1)^2 + (2h_0 \Omega)^2\}} \sin \frac{\pi + \tan^{-1} \frac{2h_0 \Omega}{\Omega^2 - 1}}{4} \cdot \xi \end{aligned} \quad (35)$$

ここで $\Omega = \omega / \omega_{b0}$ 、 $h_0 = c' / 2\sqrt{m' k'_v}$ 、 $\xi = x / h$ なる無次元量である。文献 11) によると、弾性床上無限長梁に荷重が作用した場合、荷重載荷点との距離を x としたとき、指数関数の性質より

$$\alpha_1 x \text{ (or } \beta_1 x) > \pi \quad (36)$$

を満たす位置においては荷重載荷の影響が変形、断面力

に影響を及ぼさないことがわかっている。この式 (36) と、式 (34) 及び式 (35) 中における $\alpha_1 > \beta_1$ を考慮することにより、動的な場合において境界の影響を無視できる条件式はおおよそ次式となる。

$$\xi > \frac{\pi}{\sqrt[8]{K_v^2 \{(\Omega^2 - 1)^2 + (2h_0\Omega)^2\}} \sin \frac{\pi + \tan^{-1} \frac{2h_0\Omega}{\Omega^2 - 1}}{4}} \quad (37)$$

ここでの ξ は荷重載荷点からトンネル軸方向に数えた係留索配置箇所数を表す。つまりこの式 (37) を満たす ξ は弾性床上梁と等価な水中トンネルにおいて、動的応答に対する境界から数えた境界の影響を考慮しなくてもよい係留索配置箇所数を表す無次元量であるといえる。

5.5 特解の性質

5.4 において境界の影響を受けない範囲に関する条件式 (37) を示したが、境界の影響を受けない範囲での動的応答は特解により決定されることとなる。以下ではその特解の性質について考察する。式 (12) より特解のたわみ振幅 $|v_p|$ および曲げモーメント振幅 $|M_p|$ はそれぞれ次式で表される。

$$|v_p| = \sqrt{(F_1^2 + F_2^2)(A_p^2 + B_p^2)} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - \Omega^2 + K_v(kh \sin \phi)^4\}^2 + 4h_0^2\Omega^2}} \frac{F}{k'_v} \quad (38)$$

$$|M_p| = EI(k \sin \phi)^2 \sqrt{(F_1^2 + F_2^2)(A_p^2 + B_p^2)} = \frac{EI(k \sin \phi)^2}{\sqrt{\{1 - \Omega^2 + K_v(kh \sin \phi)^4\}^2 + 4h_0^2\Omega^2}} \frac{F}{k'_v} \quad (39)$$

ここで $F = (F_1^2 + F_2^2)^{1/2}$ である。以上の2式は x を含まない。つまり境界の影響を受けない範囲、すなわち特解の性質のみにより決まる位置における応答は場所によらず、しかも非常に簡単な式で決定されることがわかる。

6. 波浪応答特性についての検討

ここでは得られた周波数応答解析解を用いて、実際に想定する水中トンネルの波浪応答解析を行う。解析する構造条件、材料条件及び海洋条件は表-1に示すものとした。この構造諸元において鉛直方向は

$$K_v \cong 0.34, \omega_{b0} = 2.83$$

でありまた水平方向については

$$K_v \cong 0.000028, \omega_{b0} = 0.0259$$

となる。これらの K_v は共に弾性床上梁の適用条件である式 (1) を満たしている。

6.1 鉛直方向の周波数応答特性

図-4 (a), (b) はトンネル中央点における単位

表-1 解析条件

トンネル長さ l	2500[m]
係留索のトンネル軸方向取付間隔 h	50[m]
トンネルのヤング係数 E	2.74×10^{10} [N/m ²]
トンネル外径	23[m]
トンネル内径	21[m]
トンネルの単位長さ当たりの質量 m	2.88×10^5 [N/m]
減衰係数 c	0
トンネルの比重	0.7
係留索のヤング係数	2.06×10^{11} [N/m ²]
係留索の断面積	0.12[m ²]
抗力係数 C_D	1.0
慣性力係数 C_M	2.0
水深 d	200[m]
水面からのクリアランス	30[m]

波高 ($H = 1m$) の波が作用した場合の鉛直方向無次元たわみ及び曲げモーメント振幅の周波数応答を示したものである。鉛直方向の運動はこの諸元においては波浪との共振を回避できる非共振領域の議論となる。非共振領域では 5.2 で理論的に考察したとおり、共振ではないピーク値が存在することがこれらの図よりわかる。式 (27) によると曲げモーメント振幅の極大値をとるおおよその波周波数はそれぞれ

$$\phi = 45^\circ : \omega = 0.460$$

$$\phi = 30^\circ : \omega = 0.547$$

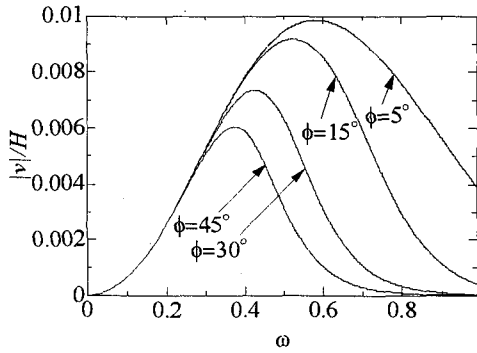
$$\phi = 15^\circ : \omega = 0.760$$

$$\phi = 5^\circ : \omega = 1.310$$

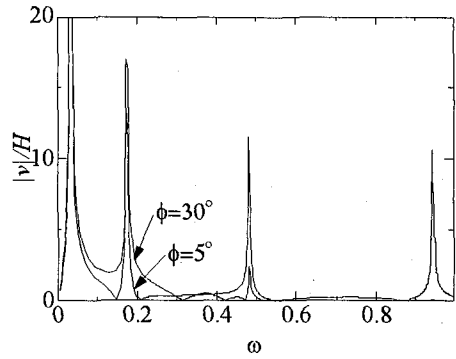
となる。上述の結果を図-4 (b) の結果と照らし合わせると、 $\phi \geq 15^\circ$ では理論的考察と実際の応答計算結果がよく一致していることがわかる。またたわみ振幅のピーク値は曲げモーメント振幅より若干低周波側に存在している。一方図-5は式 (37) で得られた条件式による $K_v = 0.39$ における境界の影響を無視できる範囲を示したものである。図の各線より上の領域における ξ (境界からトンネル軸方向に数えた係留索配置箇所数) では境界の影響は無視しうることとなる。この図より、静的 ($\Omega = 0$) の場合と比較して、動的な影響により境界の影響範囲が広がること、また $h_0 = 0.05$ 程度の減衰の影響は $\Omega < 0.5$ ではほとんどないことがわかる。

6.2 水平方向の周波数応答特性

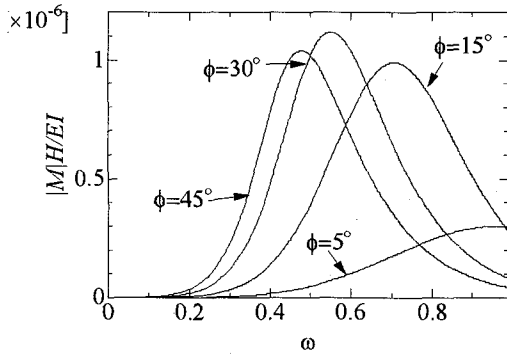
図-6 (a), (b) はトンネル中央点における水平方向無次元たわみ及び曲げモーメント振幅の周波数応答を示したものである。鉛直方向の特性とは大きく異なり、水平方向の場合は係留索による復元力が非常に小さいために ω_{b0} が小さな値となり、その結果有意なエネルギーをもつ波周波数領域が共振周波数領域と重なり構造物との同調が起こり得る。図中にみられる発散的なピーク値はいずれも共振によるものであり、図-4 (a), (b) のピークとは根本的に異なる性質のものである。



(a) たわみ振幅

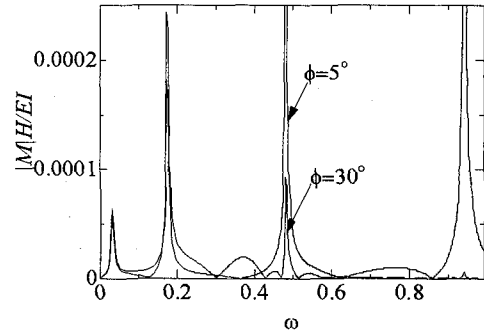


(a) たわみ振幅



(b) 曲げモーメント振幅

図-4 周波数応答 (鉛直方向)



(b) 曲げモーメント振幅

図-6 周波数応答 (水平方向)

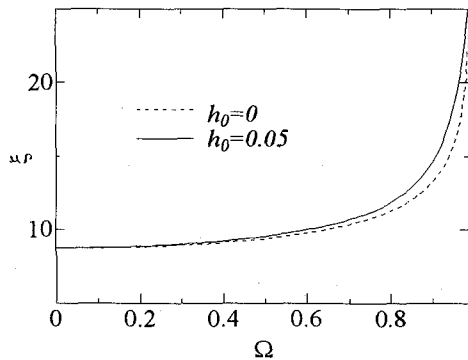


図-5 境界の影響範囲

(図の各線より上の領域において境界の影響は無視する)

6. まとめ

本研究は水中トンネルを弾性床上梁にモデル化し、波浪応答の周波数特性を理論的な解釈のもとに考察したものである。弾性床上梁によるモデル化は簡単ではあるが、支配方程式及びその解析解から理論的に得られる情報が多く、初期設計段階の解析モデルとしては非常に適したものであるといえる。本研究で得られた結果をまとめると以下のとおりである。

- (1) トンネル軸に対して斜めに入射する作用外力を修正モリソン式により定式化し、その外力波による周波数応答解析解を導出した。
- (2) 水中トンネルの曲げ固有振動数は長大であれば

あるほど、またトンネル曲げ剛性に対して係留索剛性の影響が有意であればあるほど、剛体変位に関する固有振動数 ω_{b0} ($=\sqrt{k'_v/m'}$) 及びトンネルの曲げ固有振動数は互いに接近する値をとる。このような場合には ω_{b0} は固有振動数の支配的なパラメータになり重要であるといえる。

- (3) 非共振周波数領域の曲げモーメント振幅ピーク値とそのピーク値をとるおよその波周波数を波の斜め入射を考慮して導出した。また共振周波数領域における応答ピーク値を理論的に導出した。
- (4) 動的影響を考慮した境界の影響範囲が及ぶ範囲を示す式 (37) を導出した。
- (5) 実際に想定する水中トンネルの諸元に対して導出した周波数応答解析解の特性を考察した。鉛直方向の運動と水平方向の運動は係留索の剛性の相違により動的特性は大きく異なることが解析解からも顕著にみられた。特に水平方向については波周波数と構造物の固有振動数の一致による共振が問題となる。また鉛直方向の運動においては、導出した非共振領域における曲げモーメント振幅ピーク値をとる波周波数は $\phi \geq 15^\circ$ においてよく一致している。

参考文献

- 1) (社)水中トンネル研究調査会：水中トンネル 第I編 計画から設計施工まで，第II編 ケーススタディー，1995.
- 2) 佐藤太裕，蟹江俊仁，三上 隆：水中浮遊式トンネル解析における等価な弾性床上梁モデルについて，構造工学論文集，Vol.46A，pp.41-49，2000.
- 3) 佐藤太裕，蟹江俊仁，三上 隆：動的問題における水中浮遊式トンネルと弾性床上梁の等価性に関する検討，構造工学論文集，Vol.47A，pp.1-8，2001.
- 4) 佐藤太裕，横濱秀明，蟹江俊仁，三上 隆：水中浮遊式トンネルの初期構造設計法に関する一考察，海洋開発論文集，VOL.17，pp.277-280，2001
- 5) 遠藤久芳：浮遊式可撓性プラットフォームの波浪中弾性振動，日本造船学会論文集，第155号，pp.284-292，1984.
- 6) 鈴木英之，吉田宏一郎：超大型浮体の構造挙動および構造設計に関する考察，日本造船学会論文集，第178号，pp.473-483，1995.
- 7) 鈴木英之，吉田宏一郎：超大型浮体の構造挙動および構造設計に関する考察—その2：弾性変形を考慮した復原性及び構造応答の設計—，日本造船学会論文集，第179号，pp.339-348，1996.
- 8) 坪郷 尚，岡田博雄：弾性支床上の梁モデルによる長大浮体構造の動的撓み挙動特性に関する考察，日本造船学会論文集，第181号，pp.289-298，1997.
- 9) 岡田博雄，坪郷 尚，広瀬隆之，田中正治：緊張係留式水中トンネル構造体の波浪中弾性応答と強度に関する研究，第14回海洋工学シンポジウムテキスト，pp.95-102，1998.
- 10) 土木技術者のための振動便覧，土木学会，1985.
- 11) 構造力学公式集，土木学会，1986.
- 12) Chakrabarti, S.K. : Hydrodynamics of Offshore Structures, Computational Mechanics Publications, 1987.
- 13) P.Fogazzi and F.Perotti : The dynamic response of seabed anchored floating tunnels under seismic excitation, EARTHQUAKE ENGINEERING AND STRUCTURAL DYNAMICS, Vol.29, pp.273-295, 2000.
- 14) 榎木 亨：波と漂砂と構造物，技報堂出版，1991.

(2001年9月14日受付)