

Spline 要素法を用いた 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析

Vibration of annular sector Mindlin plate varying thickness in two directions using the spline element method

木村健一* 近藤八重** 水澤富作***
Kenichi Kimura Yae Kondo Tomisaku Mizusawa

*大同工業大学大学院 建設工学専攻 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学 非常勤講師 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

***大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

This paper presents vibration of annular sector Mindlin plates with varying thickness in two directions using the spline element method.

To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods. Good accuracy is obtained. Frequencies of annular Mindlin plates with varying thickness are analyzed for the different thickness ratios, radii ratios, the ratio of the width to thickness and sector angles.

Key Words: annular sector thick plate, varying thickness, spline element method, vibration

1. まえがき

最近、構造物の合理的な設計や維持管理の観点から、板厚を変化させた変断面板が多用されるようになってきている。また、優雅な構造美を有する曲線橋のスラブ、建築床版や船舶のデッキなどに用いられる扇形板の板厚は、半径方向や円周方向にテーパ状に変化させる場合がある。板厚を任意に変化させれば、船舶のスクリューやギヤの歯の形状のような最適な剛性や断面形状が求められるので、2 方向に変厚な扇形板の振動特性を知ることが、設計上重要な課題である¹⁾。

任意の変断面を有する扇形板の振動問題では、厳密な解を求めることが困難になるので、Ritz 法や有限要素法などの数値解析法の適用性について研究²⁾が行われている。Kim ら³⁾は、薄板理論に基づく Ritz 法を用いて、周辺固定された変厚扇形板の振動解析を行っている。Tanaka ら⁴⁾は Ritz 法を用いて、片持ち変厚扇形板の振動解析を行っている。Mizusawa ら⁵⁾は spline 要素法を用いて、半径方向に変厚な扇形板の振動解析を行っている。また、せん断変形や回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論を用いた研究として、spline 要素法を用いた、水澤ら⁶⁾による半径方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析がある。また、木村ら⁷⁾は、spline 要素法を用いて、円周方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析を行っている。

しかしながら、半径方向と円周方向に変厚な扇形板の

振動解析は、さほど多く報告されていないように思われる。著者らが知る限りでは、Kim ら³⁾が薄板理論と Ritz 法を用いて、半径方向と円周方向に変厚な扇形板の振動解析を行い、解の収束性について示している。

上記で述べた研究の多くは、1 方向に変厚な扇形板の数値解析法に力点が置かれ、2 方向に変厚な扇形板の振動特性に与える変断面性状の影響については十分に明らかにされていないように思われる。

本研究では、Mindlin 板理論に基づく spline 要素法を用いて、半径方向および円周方向に変厚な扇形厚板の振動解析を行い、解の収束性や精度比較を示している。2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える変厚比、幅厚比、半径比や中心角などの影響について検討している。また、半径方向または円周方向の 1 方向に変厚な扇形板の振動特性と 2 方向に変厚な扇形板の振動特性の相異について明らかにしている。

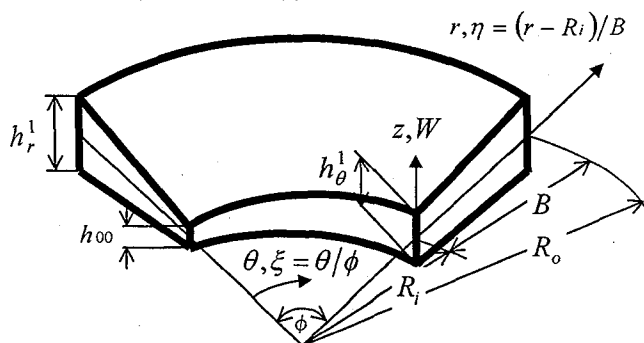


図-1 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板と極座標系

2. 式の定式化

Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1 に示すような 2 方向に変厚な spline 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元極座標系を用いる。

$$\xi = \theta/\phi, \eta = (r - R_i)/B \quad (1)$$

ここで、 $B = R_o(\lambda - 1)$ は板幅、 $\lambda = R_o/R_i$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ扇形板の内径と外径を示す。

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_\theta &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \phi_r &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W' &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $i_\theta = k - 1 + M_\theta$ 、 $i_r = k - 1 + M_r$ 、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化された B-spline 関数である。 $W' = W/B$ はたわみであり、 ϕ_θ と ϕ_r は回転角である。また、 $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi)N_{1,k}(\eta), \dots, N_{i_\theta,k}(\xi)N_{i_r,k}(\eta)]$ である。未定係数ベクトルは、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \{A_{11} \quad A_{12} \quad \dots \quad A_{i_\theta i_r}\}^T \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \{B_{11} \quad B_{12} \quad \dots \quad B_{i_\theta i_r}\}^T \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \{C_{11} \quad C_{12} \quad \dots \quad C_{i_\theta i_r}\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $k-1$ は spline 関数の次数であり、また M_r と M_θ は、それぞれ半径方向と円周方向の要素分割数である。したがって、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (4)$$

ここで、

$$[S]_{mn} = \sum_{n=1}^{i_r} \sum_{m=1}^{i_\theta} \begin{bmatrix} N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、 $\{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn} \quad \{\delta_B\}_{mn} \quad \{\delta_C\}_{mn}\}^T$ とし、 $\{d\} = \{\phi_\theta \quad \phi_r \quad W'\}^T$ である。次に、Mindlin 板理論で定義される曲げひずみ $\{\varepsilon_\theta \quad \varepsilon_r \quad \gamma_{r\theta}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\gamma_{z\theta} \quad \gamma_{rz}\}_s$ を無次元極座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1/B\phi/A)(\partial\phi_b/\partial\xi) + (1/B/A)\phi \\ (1/B)(\partial\phi_r/\partial\eta) \\ (1/B\phi/A)(\partial\phi_r/\partial\xi) + (1/B)(\partial\phi_b/\partial\eta) - (1/B/A)\phi_b \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon\}_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_\theta + (1/\phi/A)(\partial W'/\partial\xi) \\ \phi_r + (\partial W'/\partial\eta) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

したがって、式(2)を式(6)と(7)に代入すれば、ひずみベクトル $\{\chi\}$ は、次式で与えられる。

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_b \\ \{\varepsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (8)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、またひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/B\phi/A)\partial/\partial\xi & 1/B/A & 0 \\ 0 & (1/B)\partial/\partial\eta & 0 \\ (1/B)\partial/\partial\eta - 1/B/A & (1/B\phi/A)\partial/\partial\xi & 0 \\ 1 & 0 & (1/\phi/A)\partial/\partial\xi \\ 0 & 1 & \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [B]_{mn} &= [T][S]_{mn} \\ &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} (1/B) \begin{bmatrix} (1/\phi/A)\dot{N}_m N_n & (1/A)N_m \dot{N}_n & 0 \\ 0 & N_m \dot{N}_n & 0 \\ N_m \dot{N}_n - (1/A)N_m N_n & (1/\phi/A)\dot{N}_m N_n & 0 \\ B\dot{N}_m N_n & 0 & B(1/\phi/A)\dot{N}_m N_n \\ 0 & B\dot{N}_m N_n & B\dot{N}_m \dot{N}_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} (1/B) \begin{Bmatrix} \{B_b\}_{mn} \\ \{B_s\}_{mn} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\dot{N}_m = dN_{m,k}(\xi)/d\xi$ 、 $\dot{N}_n = dN_{n,k}(\eta)/d\eta$ 、 $N_m = N_{m,k}(\xi)$ 、 $N_n = N_{n,k}(\eta)$ である。

扇形板の板厚は、それぞれ半径方向および円周方向に直線的に変化するものと仮定する。図-1 に示すように、 $\xi=0$ の内径と外径の板厚は、それぞれ h_{00} 、 h_r^1 で表し、また、 $\xi=1$ の内径の板厚は h_θ^1 としている。

扇形板の板厚は、板厚の定義より、次式で仮定される。

$$h(\xi, \eta) = h_{00} H_\theta(\xi) H_r(\eta) \quad (11)$$

ここで、

$$\begin{aligned} H_\theta(\xi) &= (\delta_\theta - 1)\xi + 1 \\ H_r(\eta) &= (\delta_r - 1)\eta + 1 \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる。また、 δ_θ と δ_r は変厚比であり、それぞれ $h_\theta^1/h_{00}, h_r^1/h_{00}$ で定義する。

等方性な変厚扇形板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは、それぞれ次式で表される。

$$[D]_b = Eh(\xi, \eta)^3 / 12(1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[D]_s = Gh(\xi, \eta)\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 $G = E/2(1 + \nu)$ はせん断弾性係数であり、また κ はせん断修正係数であり、 $5/6$ に仮定している。

変厚扇形 Mindlin 板のひずみエネルギー、 U は、

$$\begin{aligned} U = & (\phi B^2 / 2) \int_0^1 \int_0^1 \{ \varepsilon \}_b^T [D]_b \{ \varepsilon \}_b \\ & + \{ \varepsilon \}_s^T [D]_s \{ \varepsilon \}_s \} Ad\xi d\eta \\ = & (D_{00}\phi/2) \int_0^1 \int_0^1 \{ h(\xi, \eta)^3 \{ (1/\phi/A)(\partial\phi_\theta/\partial\xi) \\ & + (\phi_r/A)^2 + (\partial\phi_r/\partial\eta)^2 \\ & + 2\nu\{ (1/\phi/A)(\partial\phi_\theta/\partial\xi) \\ & + (\phi_r/A)(\partial\phi_r/\partial\eta) \\ & + 0.5(1-\nu)(\partial\phi_\theta/\partial\eta) \\ & + (1/\phi/A)(\partial\phi_r/\partial\xi) - (\partial\phi_\theta/\partial\eta) \}^2 \} \\ & + 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 h(\xi, \eta) \{ (1/\phi/A)(\partial W'/\partial\xi) \\ & + \phi_\theta \}^2 + \{ (\partial W'/\partial\eta) + \phi_r \}^2 \} Ad\xi d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

また、この板の運動エネルギー、 T は、

$$\begin{aligned} T = & (\rho h_{00}/2) \omega^2 \phi B^4 \int_0^1 \int_0^1 \{ h(\xi, \eta) W'^2 \\ & + (1/12)(h_{00}/B)^2 h(\xi, \eta)^3 (\phi_\theta^2 + \phi_r^2) \} Ad\xi d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 $A = \{ \eta + 1/(\lambda - 1) \}$ 、 ρ は密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。

変厚扇形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U - T \quad (17)$$

したがって、式(2)を式(17)に代入し、 Π を極値化すれば、次式の代数方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \}_{rs} = 0 \quad (18)$$

式(18)をマトリックス表示すれば、次式のようになる。

$$\sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} \sum_{r=1}^{i_\theta} \sum_{s=1}^{i_r} ([K]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn} - n^{*2} [M]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn}) = 0 \quad (19)$$

ここで、 n^* は振動数パラメータであり、

$$n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_{00} / D_{00}} \quad (20)$$

で定義する。また、 $D_{00} = Eh_{00}^3 / 12(1 - \nu^2)$ である。

剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ と質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$[K]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [K\phi_\theta\phi_\theta] & [K\phi_\theta\phi_r] & [K\phi_\theta W'] \\ [K\phi_r\phi_\theta] & [K\phi_r\phi_r] & [K\phi_r W'] \\ [KW'\phi_\theta] & [KW'\phi_r] & [KW'W'] \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[M]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [M\phi_\theta\phi_\theta] & 0 & 0 \\ 0 & [M\phi_r\phi_r] & 0 \\ 0 & 0 & [MW'W'] \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のマトリックスの大きさは、 $3 \times (k + M_r - 1)(k + M_\theta - 1)$ で与えられる。ただし、 $k - 1$ は spline 関数の次数であり、また M_r と M_θ はそれぞれ半径方向と円周方向の要素分割数である。Appendix には、これらのサブマトリックスが示してある。

3. 数値計算例と考察

ここでは、spline 要素法を用いた 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析を行い、変厚扇形 Mindlin 板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、半径比、中心角や境界条件などの影響について示す。ここで、扇形板の境界条件は CF-CS のように表し、それぞれ半径方向の 2 つの直線辺 ($\xi=0, 1.0$) で、固定辺(C)、自由辺(F)であり、他の 2 つの円弧辺 ($\eta=0, 1.0$) が固定辺(C)、単純支持辺(S)に相当している。また、数値計算では、ポアソン比は 0.3 と仮定している。

3.1 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動数パラメータの収束性と精度比較

表-1 には、2 方向に変厚な周辺固定された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_{00} / D_{00}}$ の収束性に与える要素分割数の影響が示されている。こ

ここで、半径方向の変厚比 $h_r^1/h_{00} = 2.0$, 円周方向の変厚比 $h_\theta^1/h_{00} = 2.0$, 半径比 $R_o/R_i = 2.0$, 中心角 $\phi = 45^\circ$ と仮定している。また、幅厚比 B/h_{00} は 10 と 250 とし、要素分割数 $M_r = M_\theta$ を 8 から 24 まで変化させている。これより、幅厚比に関係なく、要素分割数が増大するにつれ、 n^* は一定値への安定した収束状態を示している。

したがって、以降の計算例には、要素分割数は $M_r = M_\theta = 20$ を用いる。

表-2 には、変厚扇形板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_{00}/D_{00}}$ の精度比較が示してある。ここで、幅厚比 $B/h_{00} = 100$, 半径比 $R_o/R_i = 5.0$, 中心角 $\phi = 60^\circ$ と仮定している。また、比較のために、Kim ら³⁾の薄板理論に基づく Ritz 法による結果も示してある。これより、本手法による値は、Kim らの結果と良く一致している。

3.2 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動特性

図-2 は、周辺固定された 2 方向に変厚な扇形 Mindlin 板 ($R_o/R_i = 2.0$, $\phi = 45^\circ$) の基本振動数パラメータ、 $n_1^* = \omega_1 B^2 \sqrt{\rho h_{00}/D_{00}}$ に与える幅厚比と半径方向および円周方向の変厚比の影響を示している。ここで、半径方向の変厚比 h_r^1/h_{00} を 0.5 から 2.0 まで変化させ、円周方向の変厚比 h_θ^1/h_{00} は 1.0, 1.5, 2.0 ととり、また幅厚比、 B/h_{00} は 10 と 100 に仮定している。これより、 h_r^1/h_{00} が増大にすると、 n_1^* に与える h_θ^1/h_{00} の影響が大きく現れてくるが、その影響は B/h_{00} が大きくなると顕著に見られる。また、 B/h_{00} が大きいと h_r^1/h_{00} と n_1^* の関係はほぼ線形的であるが、 B/h_{00} が小さくなると、横せん断変形の影響により、 h_r^1/h_{00} と n_1^* の関係は非線形的な性状を示している。

図-3 には、2 方向に変厚な周辺固定された扇形 Mindlin 板 ($B/h_{00} = 10$, $\phi = 45^\circ$) の基本振動数パラメータ、 n_1^* に与える h_θ^1/h_{00} , h_r^1/h_{00} と R_o/R_i の影響が示してある。ここで、 h_r^1/h_{00} を 0.5 から 2.0 まで、 h_θ^1/h_{00} を 1.0, 1.5, 2.0 と変化させ、また、 R_o/R_i は 2.0 と 5.0 である。これより、 n_1^* と h_r^1/h_{00} の関係は、 R_o/R_i の増大とともに h_θ^1/h_{00} の値に関係なく、非線形的な性状を示している。

図-4 は、周辺固定された変厚扇形板 ($B/h_{00} = 10$, $R_o/R_i = 2.0$) の基本振動数パラメータ、 n_1^* に与える h_θ^1/h_{00} , h_r^1/h_{00} と ϕ の影響を示している。ここで、 h_r^1/h_{00} を 0.5 から 2.0 まで変化させ、 h_θ^1/h_{00} は 1.0, 1.5, 2.0 ととり、また、 ϕ を $30^\circ, 90^\circ$ としている。これより、 h_r^1/h_{00} が増大すると n_1^* は増大し、また中心角が

表-1 2 方向に変厚な周辺固定された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ、 n^* の収束性: $\phi = 45^\circ$, $h_r^1/h_{00} = 2.0, h_\theta^1/h_{00} = 2.0, R_o/R_i = 2.0$

B/h_{00}	$M_r = M_\theta$	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
10	8	50.29	81.32	91.73	117.5	120.0
	12	50.32	81.39	91.78	117.6	120.1
	16	50.33	81.40	91.79	117.6	120.1
	20	50.33	81.41	91.80	117.6	120.1
	24	50.34	81.41	91.80	117.7	120.1
250	8	69.56	131.7	152.8	214.3	246.1
	12	68.97	128.3	148.6	208.2	221.8
	16	68.89	128.0	148.1	207.5	219.9
	20	68.88	127.9	148.1	207.4	219.6
	24	68.87	127.9	148.0	207.3	219.5

表-2 周辺固定された変厚扇形薄板の n^* の精度比較: $\phi = 60^\circ$, $R_o/R_i = 5.0$, $B/h_{00} = 100$

h_r^1/h_{00}	h_θ^1/h_{00}		modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
0.5	0.5	SEM	23.83	44.17	49.21	70.34	77.69
		Ritz法 ³⁾	23.84	44.16	49.22	70.27	77.66
1.0	0.5	SEM	35.34	66.59	70.98	108.0	113.3
		Ritz法 ³⁾	35.37	66.69	71.10	108.5	113.7
0.5	1.0	SEM	32.64	61.18	66.86	97.06	110.2
		Ritz法 ³⁾	32.67	61.25	66.94	97.28	110.4

SEM は、spline 要素法。

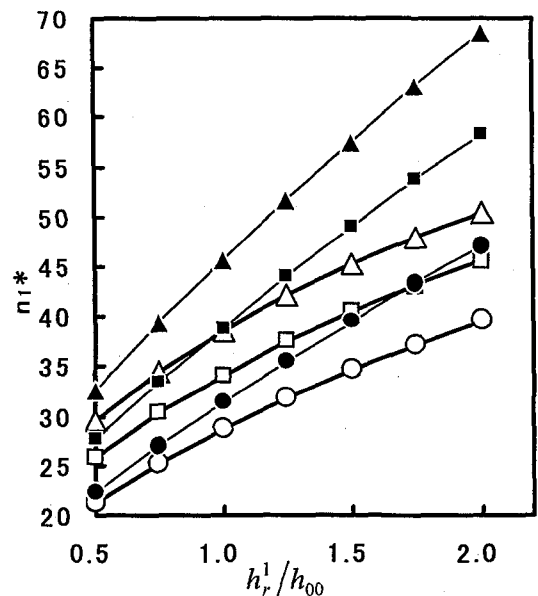


図-2 周辺固定された変厚扇形板の n_1^* に与える h_θ^1/h_{00} , h_r^1/h_{00} と B/h_{00} の影響: $\phi = 45^\circ$, $R_o/R_i = 2.0$

1.0 1.5 2.0
 $B/h_{00} = 10$ ○ □ △
 $B/h_{00} = 100$ ● ■ ▲

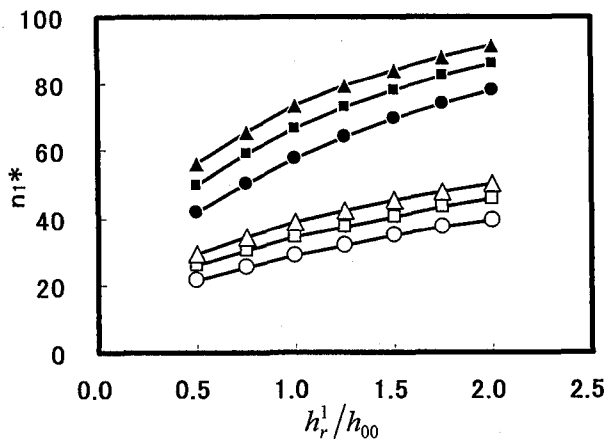


図-3 周辺固定された変厚扇形板の n_1^* に与える h_r^1/h_{00} , h_θ^1/h_{00} と R_o/R_i の影響: $\phi=45^\circ$, $B/h_{00}=10$

h_θ^1/h_{00}
1.0 1.5 2.0

$R_o/R_i=2.0$ ○ □ △
 $R_o/R_i=5.0$ ● ■ ▲

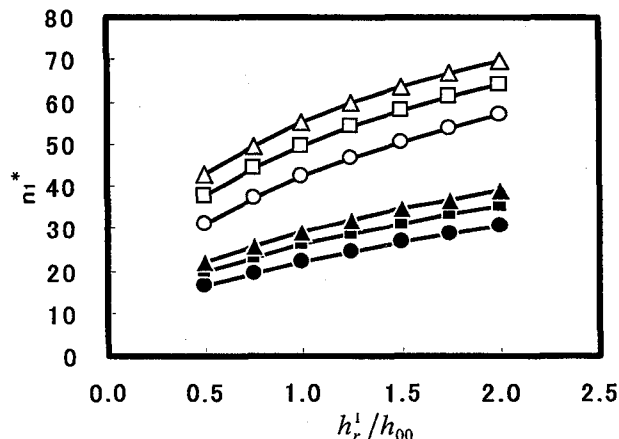


図-4 周辺固定された変厚扇形板の n_1^* に与える h_r^1/h_{00} , h_θ^1/h_{00} と ϕ の影響: $B/h_{00}=10$, $R_o/R_i=2.0$

h_θ^1/h_{00}
1.0 1.5 2.0

$\phi=30^\circ$ ○ □ △
 $\phi=90^\circ$ ● ■ ▲

小さいほど n_1^* に与える h_θ^1/h_{00} の影響が大きく現れてくる。

表-3 には、2 方向に変厚な扇形板 ($R_o/R_i=2.0$, $h_r^1/h_{00}=2.0$, $h_\theta^1/h_{00}=2.0$, $\phi=45^\circ$) の振動数パラメータ n^* に与える B/h_{00} と境界条件の影響が示されている。ここで、 B/h_{00} は 10 から 30 まで変化させ、また境界条件は 4 辺のうち 2 辺を固定とし、他の 2 辺を自由とした組み合わせを示している。これより、相対する 2 辺が固定された場合や外径が固定される場合に、 n^* は拘束条件の影響を大きく受けることがわかる。

3.3 扇形 Mindlin 板の振動特性に与える変厚方向の影響

扇形 Mindlin 板の振動特性に与える変厚方向の影響について示す。ここで、表-4 に示すような 2 方向変厚と 1 方向変厚の 3 つのタイプを仮定している。

図-5 と表-5 では、それぞれ周辺固定された変厚扇形板 ($\phi=45^\circ$, $R_o/R_i=2.0$) の振動数パラメータ、 n^* に与える変厚タイプと B/h_{00} の影響が示されている。ここで、 B/h_{00} は 10 から 30 まで変化させている。また、比較のために等厚板の結果も示してある。これより、円周方向と半径方向のどちらか一方を変厚にした場合、半径方向に変厚にした方が n^* が大きな値を示しているが、高次の振動数パラメータには、変厚方向の影響がさほど大きく現れなくなる。一方、2 方向に変厚にした場合には、 n^* はかなり大きな値が示されている。

図-6 は、周辺固定された変厚扇形板 ($B/h_{00}=10$, $R_o/R_i=2.0$) の基本振動数パラメータ、 n_1^* に与える変厚タイプと ϕ の影響を示している。ここで、 ϕ を 15° から 90° まで変化させている。これより、 ϕ が大きくなると、一方向のみに変厚な扇形板の n_1^* に与える影響に違いはあまり見られなくなる。

表-3 変厚扇形板の n^* に与える境界条件の影響:

$R_o/R_i=2.0$, $h_r^1/h_{00}=2.0$, $h_\theta^1/h_{00}=2.0$, $\phi=45^\circ$

境界条件	B/h_{00}	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
CC-FF	10	23.68	39.31	53.60	63.27	81.19
	15	26.26	44.76	63.88	72.68	98.14
	20	27.42	47.35	69.31	77.51	107.5
	25	28.04	48.76	72.42	80.25	112.9
	30	28.40	49.60	74.33	81.95	116.3
FF-CC	10	34.83	42.64	59.01	77.05	89.32
	15	38.63	50.09	69.04	90.51	110.7
	20	40.31	53.88	74.46	97.33	120.8
	25	41.19	55.98	77.61	101.1	126.9
	30	41.71	57.25	79.58	103.4	130.7
CF-FC	10	18.24	43.19	50.89	72.44	83.11
	15	19.50	48.89	58.77	85.37	99.12
	20	20.04	51.63	62.65	92.29	107.7
	25	20.32	53.13	64.76	96.29	112.7
	30	20.49	54.04	66.02	98.78	115.7
FC-CF	10	9.144	26.51	34.96	56.73	61.22
	15	9.460	29.23	38.52	66.00	71.13
	20	9.593	30.44	40.12	70.75	76.24
	25	9.662	31.08	40.97	73.43	79.13
	30	9.704	31.46	41.47	75.07	80.90
CF-CF	10	6.659	22.21	36.72	54.02	60.61
	15	6.942	24.60	42.19	62.62	70.74
	20	7.068	25.69	44.77	67.02	76.03
	25	7.137	26.28	46.15	69.50	79.06
	30	7.179	26.63	46.96	71.02	80.93
FC-FC	10	19.03	44.46	48.18	72.14	86.06
	15	20.08	49.17	54.12	83.76	102.3
	20	20.52	51.31	56.89	89.72	110.1
	25	20.75	52.44	58.37	93.09	114.4
	30	20.89	53.12	59.24	95.15	117.0

表-4 変厚扇形板の変厚タイプ

変厚方向	Type	変厚比	
		h_θ^1/h_{00}	h_r^1/h_{00}
2方向	Type1	2.0	2.0
半径方向	Type2	1.0	2.0
円周方向	Type3	2.0	1.0

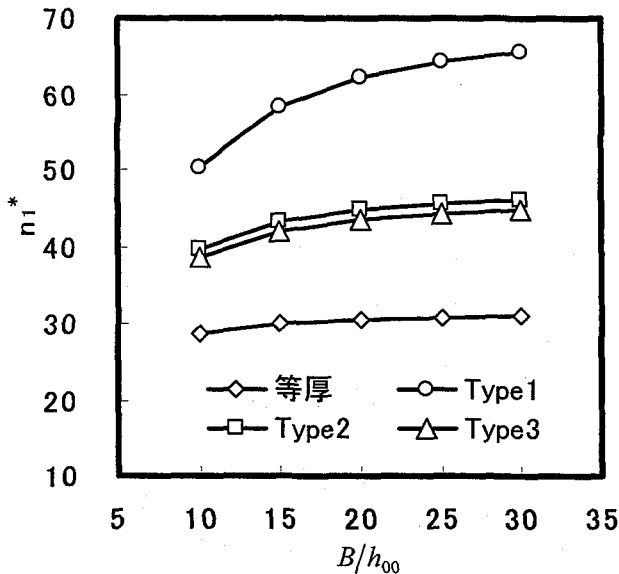


図-5 周辺固定された変厚扇形板の n_1^* に与える幅厚比と変厚タイプの影響: $R_o/R_i = 2.0$, $\phi = 45^\circ$

表-5 周辺固定された変厚扇形板の n^* に与える幅厚比と変厚タイプの影響: $R_o/R_i = 2.0$, $\phi = 45^\circ$

変厚タイプ	B/h_{00}	modes			
		1st	2nd	3rd	4th
等厚	10	28.68	49.59	59.70	77.89
	15	30.07	53.18	64.80	85.74
	20	30.62	54.67	66.98	89.22
	25	30.89	55.42	68.08	91.01
	30	31.04	55.84	68.71	92.04
Type1	10	50.33	81.41	91.80	117.6
	15	58.19	98.86	112.6	147.4
	20	62.11	108.6	124.4	165.7
	25	64.27	114.4	131.5	177.3
	30	65.56	118.0	135.9	184.9
Type2	10	39.55	67.05	76.67	99.68
	15	43.20	76.14	88.13	116.7
	20	44.80	80.47	93.72	125.6
	25	45.62	82.79	96.75	130.6
	30	46.09	84.16	98.55	133.6
Type3	10	38.62	64.53	76.10	97.37
	15	42.04	72.79	87.06	113.6
	20	43.53	76.67	92.34	121.8
	25	44.29	78.73	95.17	126.4
	30	44.72	79.94	96.85	129.2

ただし、等厚タイプでは $h_r^1/h_{00} = h_\theta^1/h_{00} = 1.0$ である。

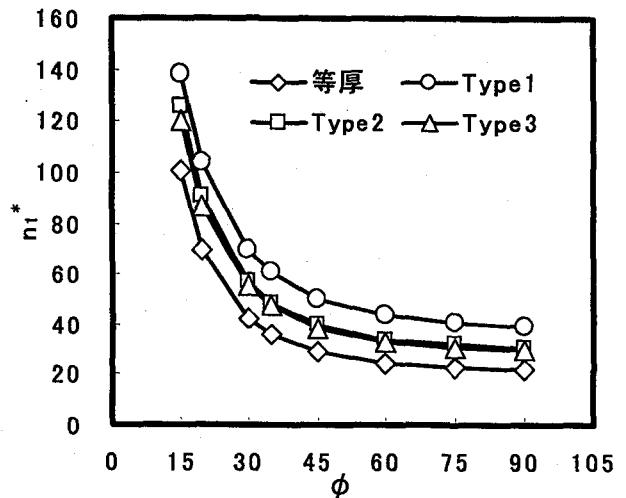


図-6 周辺固定された変厚扇形板の n_1^* に与える ϕ と変厚タイプの影響: $R_o/R_i = 2.0$, $B/h_{00} = 10$

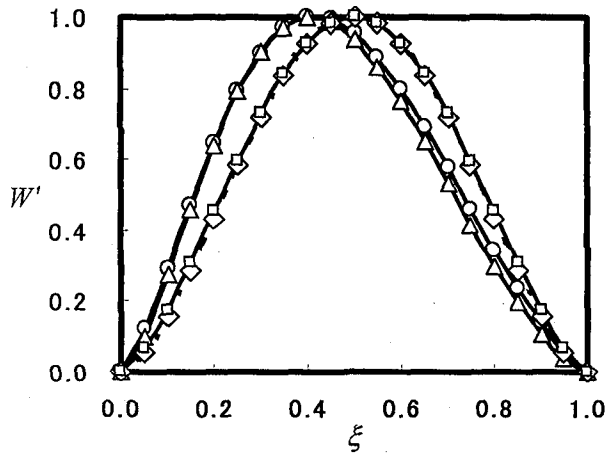
図-7には、変厚扇形板 ($B/h_{00} = 10$, $\phi = 45^\circ$, $R_o/R_i = 2.0$) の2方向の中央線での正規化された、たわみの振動モード形状に与える変厚タイプの影響が示してある。比較のために、等厚板の結果も示してある。これより、Type1とType3のように円周方向に変厚になる場合には、円周方向の中央線 ($\eta = 0.5$) のモード形状は、非対称になる。一方、中央断面 ($\xi = 0.5$) でのモード形状は、半径方向に変厚な Type1 と Type2 で、変厚の影響により非対称になる。

図-8では、周辺固定された変厚扇形板 ($B/h_{00} = 10$, $\phi = 45^\circ$) の基本振動数パラメータ, n_1^* に与える変厚タイプと R_o/R_i の影響について示している。ここで、 R_o/R_i を1.25から5.0まで変化させている。これより、変厚扇形板の n_1^* に与える変厚タイプの相異が顕著にみられる。1方向のみ変厚にした Type2 と Type3 を比較してみると、 R_o/R_i の増大とともに、半径方向に変厚にした n_1^* は円周方向に変厚な Type3 と比較して、大きな値が示される。また、2方向に変厚すると、板厚を1方向変厚にするより、かなり大きな振動数パラメータが得られている。したがって、2方向に変厚すれば、扇形板の振動特性または剛性をより効果的に変化させられるので、曲線板の経済的で合理的な動的設計が可能と思われる。

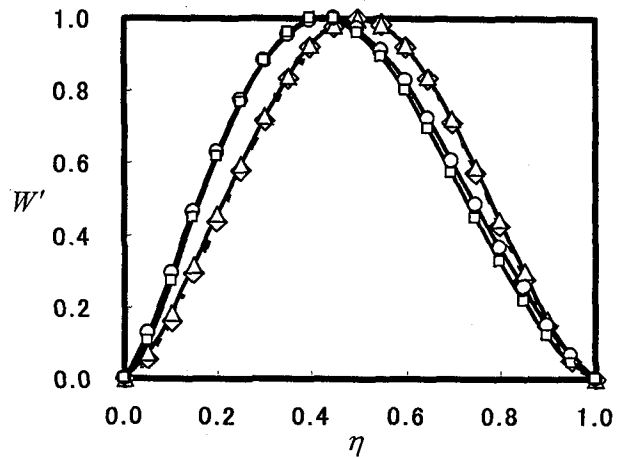
4. あとがき

本文では、Mindlin 板理論に基づく spline 要素法を用いて、2方向に変厚な扇形板の振動解析を行い、振動数パラメータに与える変厚比、幅厚比、半径比、中心角や境界条件の影響について検討を行った。本文で得られた主な結果をまとめると、以下ようになる。

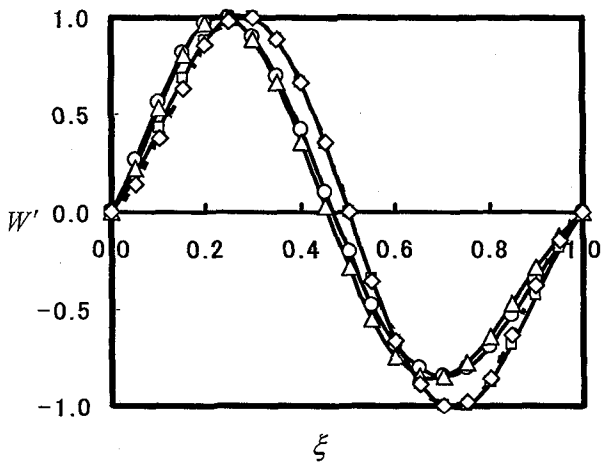
1) 本手法を用いれば、変厚扇形 Mindlin 板の解の安定した収束性と精度が得られる。



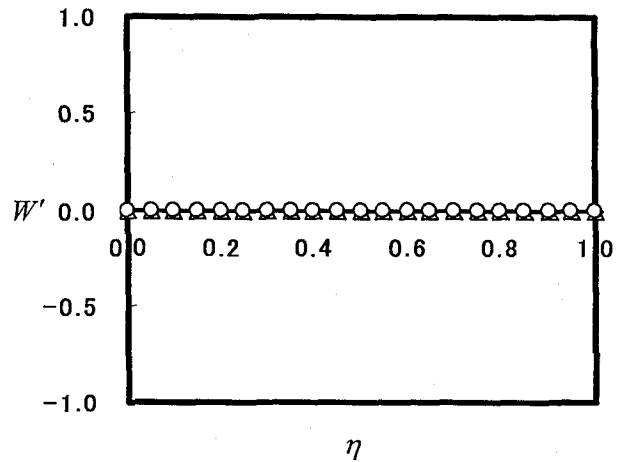
a) 半径方向の中央線($\eta = 0.5$)の 1st mode 形状



b) 円周方向の中央線($\xi = 0.5$)の 1st mode 形状



c) 半径方向の中央線($\eta = 0.5$)の 2nd mode 形状



d) 円周方向の中央線($\xi = 0.5$)の 2nd mode 形状

図-7 変厚扇形板の2方向の中央線での正規化された振動モード形状に与える変厚タイプの影響: $B/h_{00} = 10$, $\phi = 45^\circ$, $R_o/R_i = 2.0$ —○—Type1 —□—Type2 —△—Type3 —◇—等厚

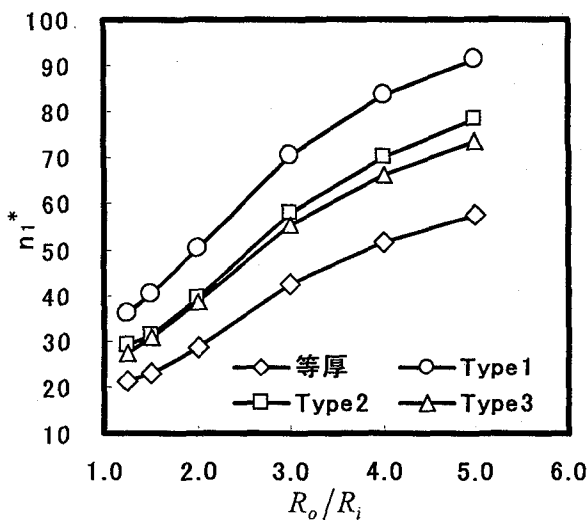


図-8 周辺固定された変厚扇形板の n_1^* に与える R_o/R_i と変厚タイプの影響: $B/h_{00} = 10$, $\phi = 45^\circ$

2) 2方向に変厚な扇形 Mindlin 板の n_1^* と B/h_{00} の関係は, B/h_{00} が大きいとほぼ線形的に変化するが, B/h_{00} が小さくなると, 横せん断変形の影響により, 非線形な性状を示す.

3) 変厚扇形板の n_1^* は, R_o/R_i が大きいほど, 変厚比の影響を大きく受ける. また, ϕ が小さいと, 変厚比の影響が大きく現われる.

4) 変厚扇形板の n^* と境界条件の関係は, 相対する 2 辺が固定される場合や高次の振動数パラメータで外径が固定される場合に, 境界条件の影響を大きく受ける.

5) 変厚扇形板の n_1^* に与える変厚タイプの影響は, 1 方向のみに変厚な扇形板では, 半径方向に変厚にした方が n_1^* は大きな値を示し, また, 2 方向に変厚にすると, n_1^* がかなり大きな値を示す.

6) 扇形板の振動モード形状は, 変厚方向の影響を受け, 非対称な性状を示す. 特に, 2 方向に変厚にすると非対称性が顕著に現われる.

Appendix

式(21)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 K\phi_\theta\phi_\theta &= (1/\phi)^2 \left(I_{mr}^{113} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) + 0.5(1-\nu) \left\{ \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{1113} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{1003} \right) - \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{0103} \right) + \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) \right\} \\
 &\quad + 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left(I_{mr}^{001} \cdot J_{ns}^{0011} \right) \\
 K\phi_\theta\phi_r &= (1/\phi) \left(I_{mr}^{103} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) + (\nu/\phi) \left(I_{mr}^{103} \cdot J_{ns}^{0103} \right) \\
 &\quad + 0.5(1-\nu)(1/\phi) \left\{ \left(I_{mr}^{013} \cdot J_{ns}^{1003} \right) - \left(I_{mr}^{013} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) \right\} \\
 K\phi_\theta W' &= 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left\{ (1/\phi) \left(I_{mr}^{011} \cdot J_{ns}^{0001} \right) \right\} \\
 K\phi_r\phi_\theta &= (1/\phi) \left(I_{mr}^{013} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) + (\nu/\phi) \left(I_{mr}^{013} \cdot J_{ns}^{1003} \right) \\
 &\quad + 0.5(1-\nu)(1/\phi) \left\{ \left(I_{mr}^{103} \cdot J_{ns}^{0103} \right) - \left(I_{mr}^{103} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) \right\} \\
 K\phi_r\phi_r &= \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) + \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{1113} \right) \\
 &\quad + \nu \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{0103} + I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{1003} \right) \\
 &\quad + 0.5(1-\nu) \left\{ (1/\phi)^2 \left(I_{mr}^{113} \cdot J_{ns}^{00-13} \right) \right\} \\
 &\quad + 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left(I_{mr}^{001} \cdot J_{ns}^{0011} \right) \\
 K\phi_r W' &= 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left(I_{mr}^{001} \cdot J_{ns}^{0111} \right) \\
 KW'\phi_\theta &= 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left\{ (1/\phi) \left(I_{mr}^{101} \cdot J_{ns}^{0001} \right) \right\} \\
 KW'\phi_r &= 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left(I_{mr}^{001} \cdot J_{ns}^{1011} \right) \\
 KW'W' &= 6(1-\nu)\kappa(B/h_{00})^2 \left\{ (1/\phi)^2 \left(I_{mr}^{111} \cdot J_{ns}^{00-11} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(I_{mr}^{001} \cdot J_{ns}^{1111} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

また、式(22)で示されるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 M\phi_\theta\phi_\theta &= (1/12)(h_{00}/B)^2 \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{0013} \right) \\
 M\phi_r\phi_r &= (1/12)(h_{00}/B)^2 \left(I_{mr}^{003} \cdot J_{ns}^{0013} \right) \\
 MW'W' &= \left(I_{mr}^{001} \cdot J_{ns}^{0011} \right)
 \end{aligned}$$

ここで、 I_{mr}^{ijL} と J_{ns}^{ijkl} は次式で表され、また数値積分には、Gauss の数値積分公式を用いている。

$$\begin{aligned}
 I_{mr}^{ijL} &= \int_0^1 \left[d^i N_{m,k}(\xi) / d\xi^i \times d^j N_{r,k}(\xi) / d\xi^j \right. \\
 &\quad \left. \times H_\theta(\xi)^L \right] d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{ns}^{ijkl} &= \int_0^1 \left[d^i N_{n,k}(\eta) / d\eta^i \times d^j N_{s,k}(\eta) / d\eta^j \right. \\
 &\quad \left. \times A^k \times H_r(\eta)^L \right] d\eta
 \end{aligned}$$

ここで、 i, j は、それぞれ導関数の次数である。また、 k, L はそれぞれベキ乗数を示す。

参考文献

- 1) Vaidyanathan, S., Busby, H.R. and Houser, D.R.: A numerical approach to the static analysis of an annular sector Mindlin plate with applications to bevel gear design. Comput. and Struct. Vol.51, pp.255-266, 1994.
- 2) Kobayashi, H. Ishikawa, K. and Furuichi, T.: A survey of literature on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. Mem. Fac. Eng. Osaka City Univ., Vol. 33, pp. 115-136, 1992.
- 3) Kim, C.S. and Dickinson, S.M.: On the free, transverse vibration of annular and circular, thin, sectorial plates subject to certain complicating effects. J. Sound and Vibr., 134(3), 407-421, 1989.
- 4) Tanaka, G. Yamada, Y. Kobayashi and S. Miura.: Free Vibration of a cantilever annular sector plate with curved radial edges and varying thickness. J. Sound and Vibr., 143(2), 329-341, 1990.
- 5) Mizusawa, T. and Takami, K.: Vibration of tapered thickness annular sector plates by spline element method. J. Sound and Vibr., Vol. 154(1), pp. 147-160, 1992.
- 6) 水澤富作, 加藤秀一: Spline 要素法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析. 構造工学論文集 Vol.45A, 1999.
- 7) 木村健一, 水澤富作: 円周方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析. 土木学会中部支部平成 12 年度研究発表講演概要集 33-34, 2001.

(2001 年 9 月 14 日受付)