

ミーゼストラスにおける DUFFING 振動解析

ANALYSIS OF DUFFING'S OSCILLATOR ON VON MISES TRUSS

有尾 一郎* ・ 海田 辰将**

Ichiro ARIO and Tatsumasa KAITA

*正会員 博士(工学) 広島大学工学部第四類(建設系) (〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1)

**学生会員 広島大学工学部構造工学専攻大学院在学中(同上)

Dynamic bifurcation of numerical analysis for the nonlinear Duffing's equation of a simple elastic structure under periodic force is presented. This research aims to solve the chaotic solutions on a von Mises (2-bar) truss structure with damping system, and it has a geometrical nonlinear stiffness on this model. It shows the view of the Poincaré solutions caused by its geometrical nonlinearity by increasing parameters. It is possible numerically to solve Duffing's equation under the periodic load with a geometrical nonlinear stiffness. We show the chaos attractors for the force amplitude parameter and the circular frequency parameter.

Key Words : Duffing's oscillator, von Mises truss, chaos attractor

1. はじめに

構造物の動的的非線形問題は、挙動が複雑であるのみならず系の安定性を喪失させる要因を含んでおり、数値シミュレーションによってその挙動を予測しておくことは大変重要なことである。構造力学の分野では、幾何学的非線形性を持つ偏平シェルやトラス構造に対する多くの Snap-through 型の動座屈研究(例えば, 1), 2), 3) から、現在は多自由度系の非線形動的問題へと展開されてきた。

一方, Duffing 系の非線形振動問題は、単純な構造でさえ解析解が得られず、計算機による挙動予測によると、1-線形パラメータの場合でも解の多様な振舞い(カオス)が現れ、詳細な解析には膨大な計算が必要である。Moon and Holmes(1979) は、Snap-through を起こすような系には複数の井戸型ポテンシャルが存在することを示し、その間を不規則にジャンプするカオス応答について詳細に調べた。また、Ueda(1980) は梁部材に電磁的な強制力を作用させ、Duffing 方程式の解の複雑な挙動を数値的に明らかにした。さらに、Cook ら(1991) の実験的検証によって簡単なモデルでもカオスが現れることが確認されているが、現在でもその挙動の複雑性から困難な課題とされている^{7), 8), 9)}。

本研究では、既往の非線形動力学および構造力学の見地から、単純なミーゼストラス粘弾性構造における Duffing 方程式の標準形を導き、幾何学的パラメータに伴う系の安定性や収束性に対する解析ならびに数値解析的アプローチを行った。この問題は、単純なトラス構造だけの問題にとどまらず、基本的な構造部材の非線形振動にも現れることを意味しており、大規模な構造に対する挙動はその全体像をとらえることが非

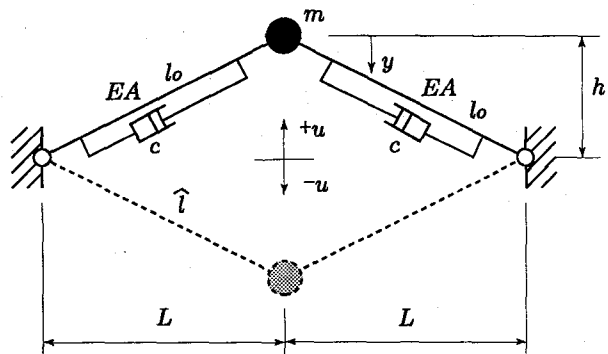


図-1 動的ミーゼストラスモデル

常に困難となることを示している。特に、ミーゼストラスのような単純な非線形モデルにおける、その挙動の複雑的要因、動的分岐に伴う複雑性、および力学モデルに基づいた基礎的な挙動観察を主軸に、この問題の大きさ(複雑性)を多角的に数値的に明らかにすることが本研究の目的である。

それらの結果として、サドルポテンシャル系ではその系の幾何学的条件からホモクリニック軌道を持つことを利用し、今回提案する分岐交叉角によって Duffing 自由振動の動的分岐の予測が可能となる。これは、初速度と幾何学的非線形性の条件からある臨界値まではその吸引圏(挙動の収束域)に抑制されているが、その臨界値を超えると系が構造不安定となり、初期状態とは異なる系に移り、その系での吸引圏で安定化することを意味する。このように、有減衰によってホモクリニック軌道が破れることを利用し、この軌道と軌跡との交叉角(摂動)を考えることによって、動的分岐を予

測するものである。

また、周期強制 Duffing 振動における円振動数パラメータのアトラクター解析では、非線形的に最大振幅を示した後、高い円振動数では負の領域の周期解がなくなり、最終的に初期変位付近に収斂した。これに対して、定性的な周期外力下の線形パラメータ増加のもとではいくつかの振幅パラメータでカオス解が現れ、その解の振舞いに対する予測は困難となるため、Poincaré の周期解 ($t = 2n\pi$ 時の周期位相解) 以外の離散解をプロットすることによって、この非線形システムの挙動全体をとらえることができた。

このような単純な 1 自由度系構造にもかかわらず、Duffing 非線形振動は 1-パラメータに対してさえ挙動特性が複雑であり、さらに複数のパラメータの組合せに対しては挙動予測が困難であることを暗示している。

2. Duffing 方程式と系の安定性

この章では、幾何学的非線形性による減衰 Duffing 自由振動方程式の導出とその動的分岐現象を伴う振動特性について述べる。

2.1 Duffing 標準形の導出

図-1に示すような滑らかな平面上を滑る 1 質点系の運動を考える。質量 m を持つ質点は h の位置で減衰係数 c の減衰ダンパと線形弾性棒部材 (EA) で結ばれており、この状態では部材には力が働いていないものとし、またこの棒部材は座屈しないものとする。いま、この系を y 方向の 1 自由度系と考えて、相対変位 $y(t)$ に対する運動方程式を導く。

幾何学的非線形性を考慮した復元力を算出する。変形後の棒部材の長さを ℓ とすると、棒部材の軸ひずみは、

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \simeq \frac{1}{\ell_0^2} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) \quad (1)$$

と近似でき、2 本の弾性棒に貯えられるひずみエネルギーと未知復元力 f による外力ポテンシャルエネルギーの総和は

$$U = 2 \times \frac{EA\ell_0}{2} \varepsilon^2 - f y \quad (2)$$

となる。これにポテンシャルエネルギー停留の原理 ($\partial U / \partial y = 0$) を適用すると未知復元力 f は

$$f = \frac{EA}{\ell_0^3} y(y - h)(y - 2h) \quad (3)$$

と求められる。ここで、時間 t に依存する相対変位の座標系を $u(t) = h - y(t)$ にとるとその抵抗力は

$$f = -\frac{EA}{\ell_0^3} (h - u)u(h + u) \quad (4)$$

と表される。したがって、この幾何学的非線形による復元力をこの質点系の運動方程式に適用すると

$$\ddot{u} + \delta \dot{u} - \frac{\omega_0^2}{\ell_0^3} (h^2 u - u^3) = 0 \quad (5)$$

を得る。ここに、 $\delta = c/m, \omega_0^2 = EA/m$ である。この各物理量の変数を $u^* \equiv u/h, v^* \equiv \dot{u}^* = \dot{u}/(h/t_0), \ddot{u}^* \equiv \ddot{u}/(h/t_0^2), t_0 = 2\pi/\omega_0$ と正規化する。これ以降の t は正規化された時間として扱うこととする。したがって、式 (5) は

$$\ddot{u}^* + \delta \dot{u}^* - \kappa \omega_0^2 (u^* - (u^*)^3) = 0 \quad (6)$$

と基準化された物理量に対する運動方程式として求められる。ここに、 $\kappa = (h/\ell_0)^3$ であり、減衰比は $\zeta = c/(2\sqrt{EA}m) = \delta/(2\omega_0)$ となる。この方程式の挙動特性を知るためには不動点近傍の状態を知る必要がある。

2.2 不動点近傍の安定性

Duffing 方程式の挙動特性をとらえるために不動点近傍の安定性を考える。式 (6) に変数 $v^*(t) = \dot{u}^*(t)$ を用いると

$$\begin{cases} \dot{u}^* = v^* \\ \dot{v}^* = \kappa \omega_0^2 (u^* - (u^*)^3) - \delta v^* \end{cases} \quad (7)$$

と記述でき、この非線形常微分方程式の解明が課題となる。この方程式は $(u^*, \dot{u}^*) = (0, 0), (\pm 1, 0)$ で不動点となる。我々は式 (7) の解近傍の挙動に関心があるから、本論文ではこれを局所的に線形化したときのベクトル場の Jacobian 行列の固有値解析によって安定性を考える。このときの Jacobian 行列は

$$J^* \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial u^*} & \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial v^*} \\ \frac{\partial \dot{v}^*}{\partial u^*} & \frac{\partial \dot{v}^*}{\partial v^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa \omega_0^2 (1 - 3(u^*)^2) & -\delta \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。この行列 J^* に対する固有値は

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\kappa \omega_0^2 (1 - 3(u^*)^2)} \right) \quad (9)$$

と求められる。したがって、不動点 $(0, 0)$ に対しては

$$\lambda|_{(0,0)} = \frac{1}{2} \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\kappa \omega_0^2} \right) \quad (10)$$

となり、 $\delta, \kappa \omega_0^2 > 0$ に対し $\text{Re}(\lambda_i)$ は正と負が存在し、この点是不安定となる。一方、不動点 $(\pm 1, 0)$ に対しては

$$\lambda|_{(\pm 1,0)} = \frac{1}{2} \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 8\kappa \omega_0^2} \right) \quad (11)$$

となり、 $\kappa \omega_0^2, \delta > 0$ のとき、 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ となる。この点の近傍で漸近安定となり、線形近似では $\delta = 0$ に対し安定となる。これらの不動点は、 $\delta > 0$ に対して $(0, 0)$ で鞍状不動点、 $(\pm 1, 0)$ で沈点となり、不動点近傍の挙動特性を得ることができる。

2.3 系の安定性

この系の安定性を Jacobian 行列の行列式

$$\det J^* \begin{cases} > 0 & : \text{stable} \\ = 0 & : \text{critical} \\ < 0 & : \text{unstable} \end{cases} \quad (12)$$

によって判定する。式 (8) を代入すると

$$\det J^* = \kappa \omega_0^2 (1 - 3(u^*)^2) = 0 \quad (13)$$

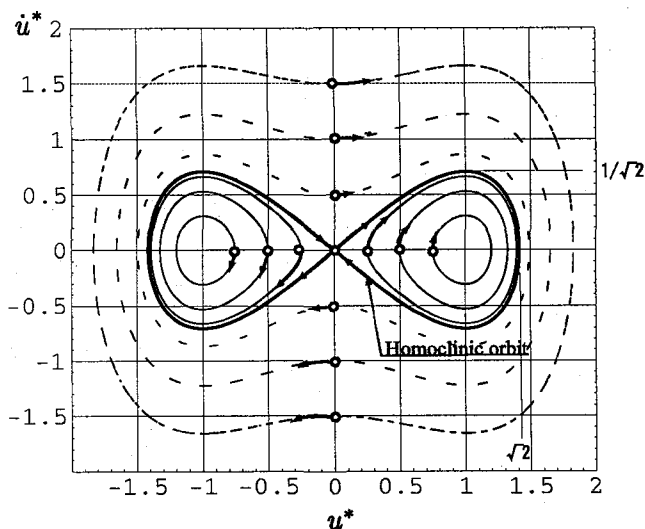


図-2 非減衰 Duffing 自由振動の軌跡 ($\kappa\omega_0^2 = 1, \delta = 0$)

となり、特異点 u_c^* は

$$u_c^* = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{or} \quad u_c = \pm \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

となる。したがって、このような 1 自由度系に対して $\kappa\omega_0^2$ は動的な構造安定性には関係しない。この系の不安定領域は

$$-h/\sqrt{3} < u(t) < h/\sqrt{3} \quad (15)$$

となる。

3. ホモクリニック軌道と軌跡の観察

この章では、幾何学的パラメータと減衰の有無に伴う軌跡の観察を通して、ホモクリニック軌道¹の出現と収束点(不動点)近傍の振舞いをとらえることとする。ホモクリニック軌道および分岐の詳細については文献^{8),9)}を参照されたい。

3.1 ホモクリニック軌道

非減衰振動に現れるホモクリニック軌道は、その系の振舞いを特徴づける。ここでは、その軌道をポテンシャルエネルギーより求めることとする。ある時刻 t における系の全エネルギーは、

$$U = \frac{(\dot{u}^*)^2}{2} - \kappa\omega_0^2 \left(\frac{(u^*)^2}{2} - \frac{(u^*)^4}{4} \right) \quad (16)$$

である。右辺の第一項は運動エネルギーを、第二項はひずみエネルギーをそれぞれ表す。特に、 $U = 0$ が常

に成り立つホモクリニック軌道を

$$\Gamma_0 \equiv (\dot{u}^*)^2 - \kappa\omega_0^2 (u^*)^2 \left(1 - \frac{(u^*)^2}{2} \right) = 0 \quad (17)$$

と定義する。任意の軌跡 $(u^*(t), \dot{u}^*(t))$ を $\Gamma(t)$ とするとき、この軌跡 $\Gamma(t)$ がホモクリニック軌道 Γ_0 より内側にあるとき $\Gamma(t) < \Gamma_0$ と、外側にあるとき $\Gamma(t) > \Gamma_0$ と表すことにする。 $\Gamma_0 > 0$ では $U > 0$ で運動エネルギーが過大な状態を、 $\Gamma_0 < 0$ では $U < 0$ の状態となっている。 Γ_0 軌道上の速度 $|\dot{u}^*|$ は

$$|\dot{u}^*| = \sqrt{\kappa\omega_0} u^* \sqrt{1 - \frac{(u^*)^2}{2}}, \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (18)$$

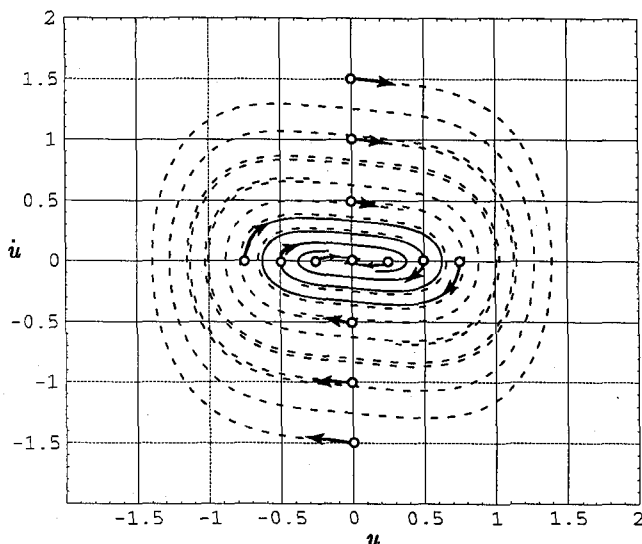
と求められる。

3.2 Duffing 自由振動軌跡の観察

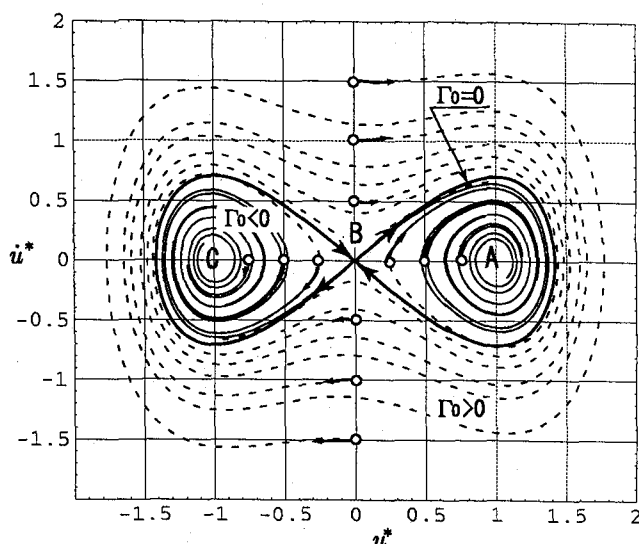
図-2は、前節の Duffing 方程式(6)を Runge-Kutta 法により求めた (u^*, v^*) の軌跡図である。なお、図中の $\circ$ は各初期値であり、破線は初期変位 $u^*(0) = 0$ で初速度 $v^*(0) \neq 0$ の場合の軌跡を表す。この結果、非減衰では調査した全初期値に対し、軌跡が閉塞する軌道が現れ、軌道が対称性を持つことも確かめられた。また、初期値 $(0, 0)$ 近傍の軌跡は ∞ 形のホモクリニック軌道(図中の太線)となる。この軌道によって右と左および外側の軌跡が交差しない 3 つの閉軌道空間が存在する。 $u^*(0) = 1, |v^*(0)| < 1/\sqrt{2}$ の初期値では、軌跡は右側のホモクリニック軌道内に位置する。それ以外の初速度 $v^*(0)$ では左側のホモクリニック軌道内に収束しないことが確かめられる。

つぎに、ライズ高さ h を持つ減衰 Duffing 振動の軌跡の違いを観察する。初期値 $\Gamma(0)$ に対する軌跡 $\Gamma(t)$ を調べた。図-3は $\delta = 0.1$ のときの $\Gamma(t)$ の軌跡図である。なお、図中の $\circ$ と破線は図-2と同じ意味を持つ。図-3(a)は式(5)においてライズ高さ $h = 0$ の場合の $(u^*, \dot{u}^*)$ 軌跡図を示す。この全軌跡は最終的に $(0, 0)$ に収束し、常時安定な状態を保つ。しかしながら、図-3(b)に示すように $h \neq 0$ では同図(a)とは根本的に異なり、式(6)を用いて軌跡を描くと収束点 A, C および鞍状不動点 B を持つ結果となった。図中の ∞ 形の太線は非減衰時の Γ_0 軌道を表す。この軌跡図は h によって基準化されているので、任意の h に対しても同形を保つ。 $h > 0, \delta > 0$ によって、全ての初期値に対し位相のずれが起こり閉軌道空間の鞍状接続が破れ、質点が $u^* < 0$ で停留する可能性が生まれる。この場合の振動は漸近的に $(1, 0)$ あるいは $(-1, 0)$ が安定フォーカスとなる。鞍状不動点 $(0, 0)$ は局所的には変化しないが、鞍状接続が破れるために、2つの安定平衡状態は競合するポイントアトラクタを形成する。

¹ この軌道は、非減衰自由振動において初期値 $(u^*, \dot{u}^*) = (0, |\dot{u}^*| \rightarrow 0)$ を与えたとき、 $(u^*, \dot{u}^*)$ 位相図の軌跡が ∞ 形となる閉軌道を描く。



(a) $h = 0, EA/(m\ell_0^3) = 1$



(b) $h \neq 0, \kappa\omega_0^2 = 1$

図-3 Duffing 自由振動の軌跡 ($\delta = 0.1$)

4. ホモクリニック分岐

この章では、ホモクリニック軌道を基準に減衰軌跡の摂動から現れる分岐問題を考えることとする。

4.1 交叉角と分岐

非減衰 Duffing 振動の $\Gamma(t)$ 軌跡は閉じた軌道となり、特に、不動点 $(0, 0)$ 近傍を通過する Γ_0 軌道は u^* および $\dot{u}^*$ 軸に対称な軌道を描く。減衰が存在するとき、この対称性は破れ、沈点 A あるいは C に収束するが、不動点からの可逆的方法によってその吸引域が決定できる。しかしながら、これ以外の局所的な方法によって吸引がどこの時点で何によって決まるかということ、早い段階で予測しておきたい。そのために、図-4に示す、ある減衰軌跡が Γ_0 軌道と交わる交点の位置に注目する。これは、軌跡 $\Gamma(t)$ が右側（あるいは左側）の軌道 Γ_0 と交われば、その交点側に位置する沈点 A（あるいは C）に収束する意味である。図中の不動点 B に漸近する軌跡 E は点 D を通過したものであり、 $u^* = 0, 0 < \dot{u}^* < D$ を通過した軌跡は最終的に点 A に収束することが予測できる。初期値が $\Gamma(0) > \Gamma_0$ とすると、時刻 t における軌跡の位置は

$$\Gamma(t) - \Gamma_0 \begin{cases} > 0, & 0 \leq t < t_s \\ \leq 0, & t_s \leq t \end{cases} \quad (19)$$

と表される。ここに、 t_s は軌跡が Γ_0 軌道上で交わったときの時刻を表す。この結果、次の定理が成り立つ。 $t \rightarrow \infty$ 時の軌跡の収束位置は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u^*(t) = \text{sign}(u^*(t_s)) \quad (20)$$

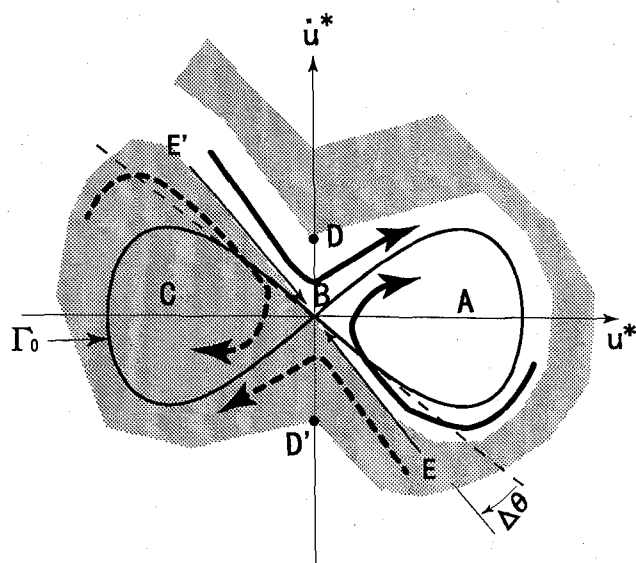


図-4 ホモクリニック分岐

で表され、 $u^*(t_s)$ の正負によって決定される。この Γ_0 軌道と交叉した時点で分岐点を越え、その Γ_0 軌道内で漸近安定となる。

また、 Γ_0 軌道の長さを $\bar{\Gamma}_0$ と表し、任意の軌跡 Γ が Γ_0 軌道上を通過するときの交叉角 $\Delta\theta(t)$ を

$$\tan \Delta\theta(t) = \frac{dD(t)}{d\bar{\Gamma}_0}, \quad \text{when } t = t_s \quad (21)$$

とする。ここに、 $D(t)$ は時刻 t における Γ_0 軌道から法線方向にその軌跡までの差を表す。この交叉角は分岐時の摂動量となり、分岐予測の材料となる。例えば、近似的に各軌跡に対する交叉角を図-5において不動点 B に接近するときの Γ_0 との交叉角 $\Delta\theta$ として数値的に求め

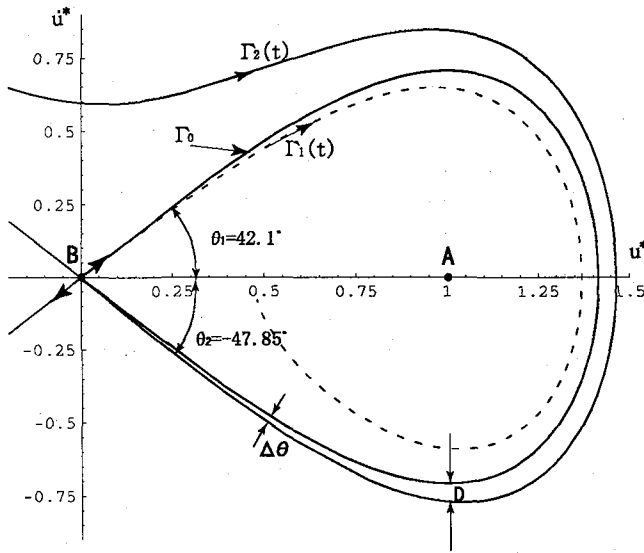


図-5 減衰による不動点近傍の交叉角

ることとする。 $u^* = 1$ の位置の軌跡との速度差を D とし、その位置から不動点までの長さ S は

$$S = \int_1^0 \sqrt{1 + \left(\frac{d\dot{u}}{du}\right)^2} du = 1.290 \quad (22)$$

と求められるので、式 (21) より

$$\Delta\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D}{S}\right) = 2.84^\circ \quad (23)$$

を得る。この交叉角が、減衰 ($\delta = 0.1$) に対する対称性破れの摂動量を表す。

4.2 ホモクリニック分岐と不動点近傍の交叉角

前節では交叉角の存在による収束予測を述べたが、ここでは、その交叉角による摂動を考慮した局所分岐と大局的分岐を考える。摂動がない非減衰系の Γ_0 分岐から考えると、このとき不動点近傍の局所分岐は

$$\tan\theta = \frac{d\dot{u}^*}{du^*} = \frac{1 - (u^*)^2}{\sqrt{1 - (u^*)^2/2}} \omega_0 \sqrt{\kappa} \quad (24)$$

の傾きを持つ。 $\omega_0 \sqrt{\kappa} = 1$ のとき不動点近傍の $u^* = 0$ の接線の角度は $|\theta| = \pi/4$ となり、軌道上からでは局所的に不動点で $2\theta = \pm\pi/2$ の角度で分岐する。これは左右対称分岐である。しかしながら、 $\omega_0 \sqrt{\kappa} \neq 0$ や分岐を大局的にとらえて $|u^*| > 0$ の位置での割線は、もはや対称分岐とはならず、非対称分岐となる。このように Γ_0 分岐は 2 つの分岐構造の性質を併せ持つ。

減衰時の不動点近傍の交叉角を求めるために、減衰エネルギーを含めて正規化された全エネルギー

$$U = \frac{(\dot{u}^*)^2}{2} + \delta \dot{u}^* u^* - \kappa \omega_0^2 \left(\frac{(u^*)^2}{2} - \frac{(u^*)^4}{4} \right) \quad (25)$$

を考える。ここに、エネルギー総和が $U = 0$ で保存される Γ_0 軌道付近に限定すると

$$(\dot{u}^*)^2 + 2\delta \dot{u}^* u^* - \kappa \omega_0^2 \left((u^*)^2 - \frac{(u^*)^4}{2} \right) = 0$$

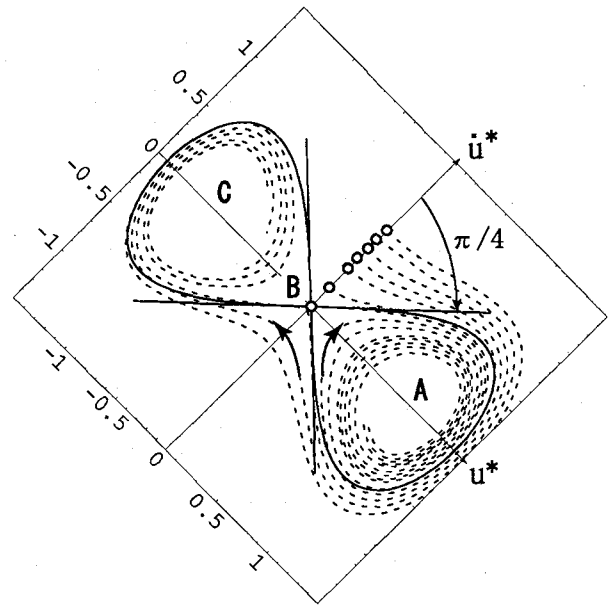


図-6 不動点近傍の局所分岐

から

$$\dot{u}^* = \delta u^* \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\kappa \omega_0^2}{\delta^2} \left(1 - \frac{(u^*)^2}{2} \right)} \right)$$

となる。式 (24) から $u^* = 0$ での傾きは

$$\left. \frac{d\dot{u}^*}{du^*} \right|_{u^*=0} = \delta \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\kappa \omega_0^2}{\delta^2}} \right)$$

となる。例えば、 $\delta = 0.1, \kappa \omega_0^2 = 1$ 時の傾きと交叉角は

$$\begin{cases} \theta_1 = 42.10^\circ \\ \theta_2 = -47.85^\circ \end{cases}, \quad \Delta\theta = |\theta_i| - 45^\circ = \begin{cases} 2.90^\circ \\ 2.85^\circ \end{cases}$$

を得る。この結果、式 (23) の値とほぼ一致した。これにより、ある減衰に対する不動点 B 上の交叉角から、分岐境界線となる、ホモクリニック軌道からのずれを知ることができる。

このように、減衰系では不動点上の交叉角 $\Delta\theta$ を考慮すると、不動点近傍で $(\pm\pi/2 - \Delta\theta)$ の非対称分岐となり、減衰系では局所対称分岐は崩れることになる。このときの各初期値に対する減衰軌跡の座標系を $\pi/4$ 回転させると図-6 となり、この系では減衰によって点 A あるいは C に分岐しその後 Γ_0 内で漸近安定化する。

5. Duffing 自由振動の Snap-through 現象

この章では、Duffing 自由振動の観察を通して、Snap-through 現象の発現について調査する。この系における Duffing 自由振動の方程式は、式 (6) より基準化されている。

5.1 Duffing 自由振動の時刻歴応答

Duffing 自由振動 ($\delta = 0.3$) の変位 (および加速度) の時刻歴応答の例を図-7 に示す。図-7(a) は初期

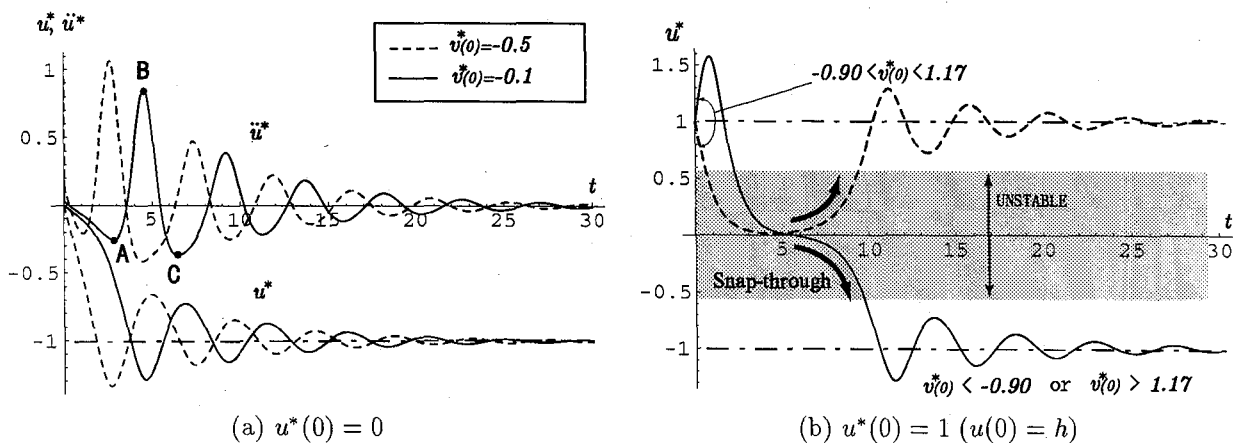


図-7 変位 (および加速度) の時刻歴応答 ($\kappa\omega_0^2 = 1, \delta = 0.3$)

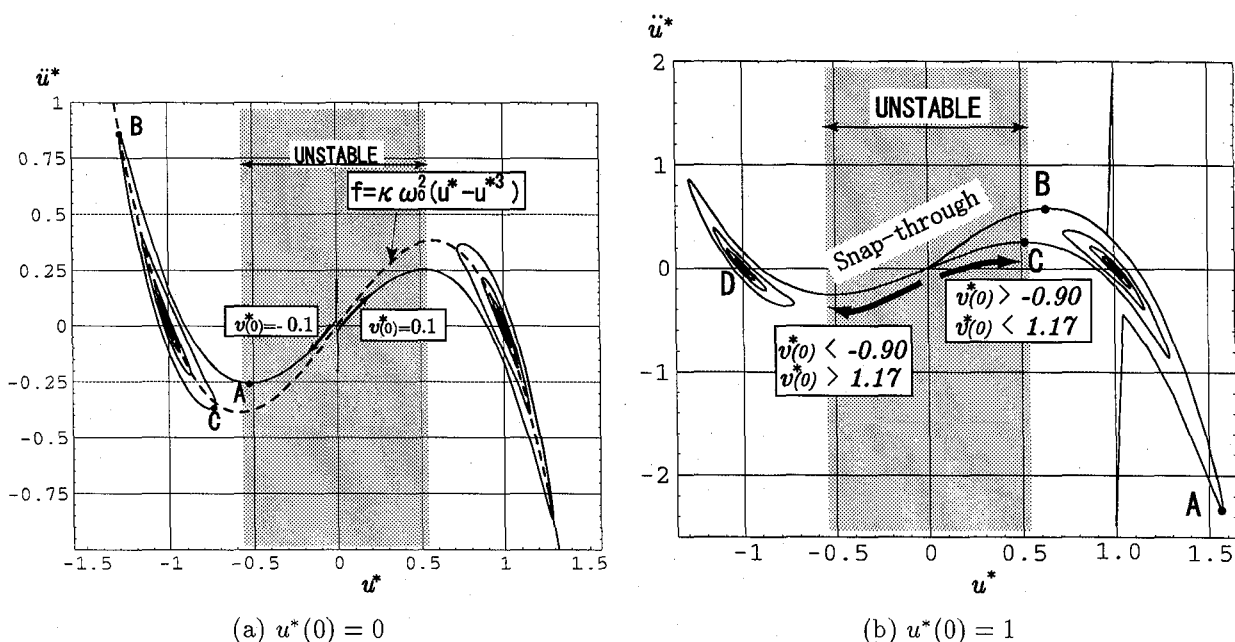


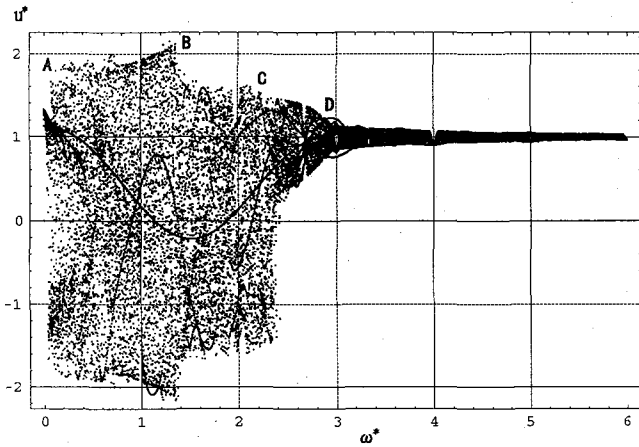
図-8 減衰振動の $u^*(t) - \ddot{u}^*(t)$ 軌跡 ($\kappa\omega_0^2 = 1, \delta = 0.3$)

値 $(0, -0.5)$ と $(0, -0.1)$ の時刻 t に対する変位 $u^*(t)$ と加速度 $\ddot{u}^*(t)$ の応答を示す。図中の破線は $\dot{u}^*(0) = -0.5$ を、実線は $\dot{u}^*(0) = -0.1$ の場合を表す。

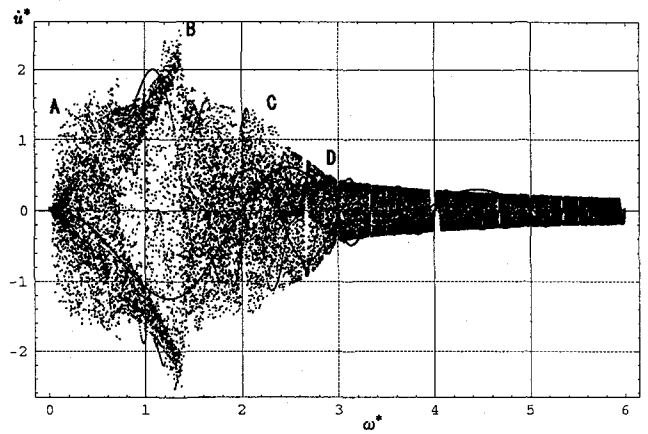
u^* は初期変位 $u^*(0) = 0$ から一旦最小値 -1.34 まで変位し、 -1 を中心に減衰振動する。加速度は単位質量当たりのばねの抵抗力ともみなせるので、質点が最下部にあるときは正の向きに最大の復元力 (点 B) を示している。図-7(b) は初期変位を $u^*(0) = 1$ として初速度のみを変化させ、幾何剛性による構造不安定領域を超えて $u^* < 0$ の安定な収束点へ移る分岐を示している。質点の初速度が一定の範囲にあるときは $(1, 0)$ の位置に留まるが、 $\dot{u}^*(0) < -0.90$ あるいは $\dot{u}^*(0) > 1.17$ となると、 $(1, 0)$ の吸引域から離れ $t > 5$ では $(-1, 0)$ の吸引域に動的に飛び移る Snap-through 現象が現れた。これは初速度の違いによって 2 つの異なる吸引域に収

束する場合があることを示す一例である。

図-8は変位と加速度の関係を軌跡で描いたものである。 $u^*(0) = 0$ で初速度が正の向きの図-8(a) の場合には、加速度は図中の点 A で負のピーク値を示した後、正の加速度によって、点 B で質点の運動の方向が逆転し、点 C で負の最大加速度に到達した後、急速に振動が $u^* = -1 (u = -h)$ に収束した。一方、初期値 $(1, \dot{u}^*(0))$ の図-8(b) は、初速度が $-0.90 \leq \dot{u}^*(0) \leq 1.17$ の範囲では図中の点 B あるいは A から B を経て u^* が 0 に近づくが、点 C を通って $(1, 0)$ の吸引域に留まり、他の解には飛び移らない。しかし、初速度が $\dot{u}^*(0) < -0.90$ あるいは $\dot{u}^*(0) > 1.17$ となると、点 B あるいは A から B を経て u^* が 0 に近づき、 $u^*(t) < 0$ の不安定領域を越えて $(-1, 0)$ の吸引域 D に達し安定化した。このように、初速度と幾何学的非線形性の条件からある領域までは



(a) 円振動数と変位のアトラクター



(b) 円振動数と速度のアトラクター

図-9 パラメータ ω^* に対する挙動特性

その吸引圏に抑制されているが、その限界を超えると構造不安定となる。その結果、構造系が Snap-through 現象を起こし初期状態とは異なる系となり、その吸引圏で安定化する。これは動的作用による分岐問題の構造不安定性を示す例である。

6. 強制振動の動的挙動

図-1の構造系において周期外力を载荷させた強制 Duffing 振動に対する数値解析を行なった。特に、与えられた強制 Duffing 振動のもとで、円振動数パラメータならびに強制振幅パラメータに対する動的挙動の追跡を行なった。

6.1 円振動数 ω^* によるアトラクター

周期強制力による正規化された Duffing 振動方程式は

$$\ddot{u}^* + \delta \dot{u}^* - \kappa \omega_0^2 (u^* - (u^*)^3) = \gamma^* \cos \omega^* t \quad (26)$$

と表される。ここでは、変数 $\gamma^* = (p_0/m)/(h/\text{sec}^2)$ 、 $\omega^* = \omega/\omega_0$ を用いて、 $\kappa \omega_0^2 = \gamma^* = \omega_0 = 1$ とした。この Duffing 振動方程式 (26) において実用上の値として減衰パラメータを $\delta = 0.3$ とし、円振動数 ω^* を数値的にパラメータ変化させることにより、Duffing 振動の変位、速度などの挙動特性を調べた。本解析では、初期変位 $(1, 0)$ を与え、パラメータ ω^* を0.01刻みで区間 $[0, 6]$ で逐次代入し、この非線形常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて、Poincaré 断面の $2n\pi$ の周期定常解を得た。その結果を図-9に示す。

図-9(a)は円振動数 ω^* に対する Poincaré 断面の振幅 $u^*(2n\pi)$ を表す。円振動数が小さいときには振幅は図中の点 A の約 1.9 から暫増し、点 B の $\omega^* = 1.4$ で最大振幅 2.2 を示す。その後減少し、点 C の $\omega^* = 2.3$ 以上で負の領域の解がなくなり、点 D の $\omega^* = 3$ 以上になると初期変位に収束してしまう。これは、円振動数の大きさによって Poincaré 断面の振幅が異なり、 $\omega^* = 2.3$

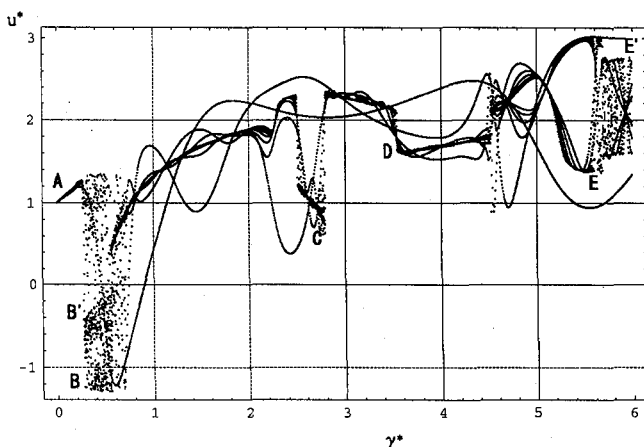
を境にその振幅にギャップが生じることがわかった。ここには示さないが、初期変位 $u^*(0) = -1$ にするとその初期値に収束し、 $u^*(0) = 0$ 付近では少しでもノイズが入ると敏感にどちらかの $u^* = \pm 1$ に収束することが分かった。

図-9(b)は円振動数と速度の相関を表すが、これも点 B の $\omega^* = 1.4$ で最大速度に達するが、その後段階的に0に収束する。ここに特徴的なことは $0.8 < \omega^* < 1.4$ の区間の速度解の空洞化である。この区間の変位解は一樣に点在するが速度解は速度の大きい外側に多く集まり、点 B 付近まで広がっている。これは軌跡 $(u^*, \dot{u}^*)$ の偏平化に伴う解集合の分布状態を表し、例えば軌跡が円に近い場合にはその領域内で一樣分布となり、軌跡が一樣に偏平化するとアトラクターは空洞化する。このことにより、アトラクターの解の分布状態はその軌跡の特徴を反映しているといえる。

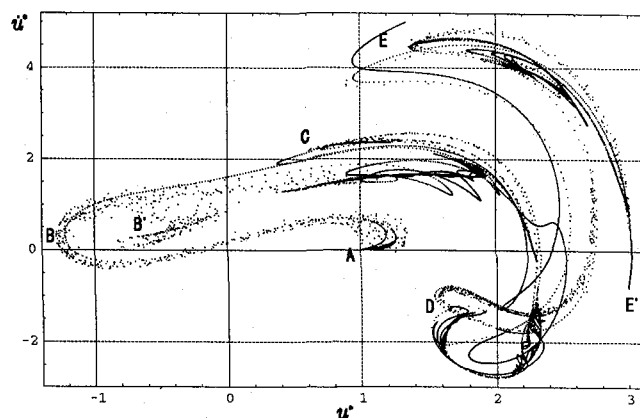
6.2 振幅 γ^* によるアトラクター

前節のパラメータ ω^* の代わりに強制振動の振幅パラメータ γ^* を変化させたときのアトラクターを調べた。このとき $\omega^* = u^*(0) = 1$ とし、前節と同様の解析法を用いた。その数値解析結果を図-10に示す。図-10(a)は振幅 γ^* を0から増加させたときの Poincaré 断面上の定常状態の周期解を示す。この結果から、 $\gamma^* = 0.3$ 付近(図中の点 B)で解が分散し、 $\gamma^* = 0.58$ から新たな解曲線が出現する。点 C の $\gamma^* = 2.5 \sim 2.8$ および点 D の $3.5 \sim 4.5$ においては解が急変した。 $\gamma^* = 0.3 \sim 0.7, 2.5 \sim 2.8, 4.5 \sim 4.6$ および5.5以上の区間でカオス解が出現した。大域的には γ^* の増加に対して変位応答は非線形的に増加する傾向が現れた。

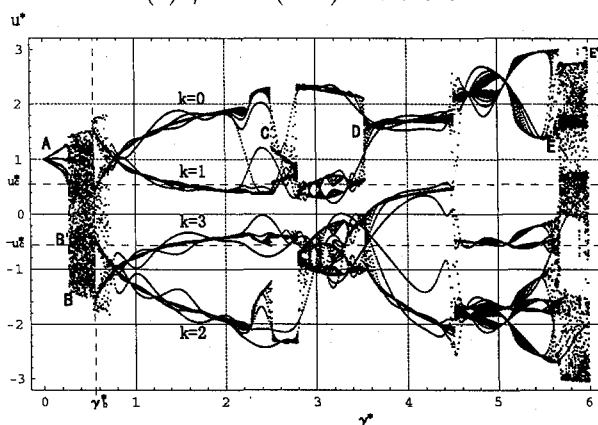
図-10(b)は周期解を軌跡 $(u^*, \dot{u}^*)$ にプロットしたものであり、 u^* に対しては γ^* 軸の方向から見ることにする。初期値 $(1, 0)$ の点 A から S 字状(点 B および B')に解が広がり、 $\gamma^* = 0.3 \sim 0.7$ では、質点の運動は飛



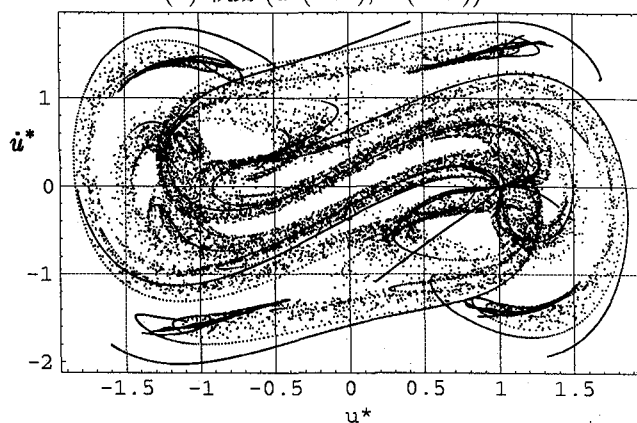
(a) $\gamma^* - u^*(2n\pi)$ アトラクター



(b) 軌跡 $(u^*(2n\pi), \dot{u}^*(2n\pi))$



(c) $\gamma^* - u^*((2n + k/2)\pi)$ アトラクター



(d) 軌跡 $(u^*((2n + k/2)\pi), \dot{u}^*((2n + k/2)\pi))$

図-10 振幅パラメータ γ^* に対する挙動特性

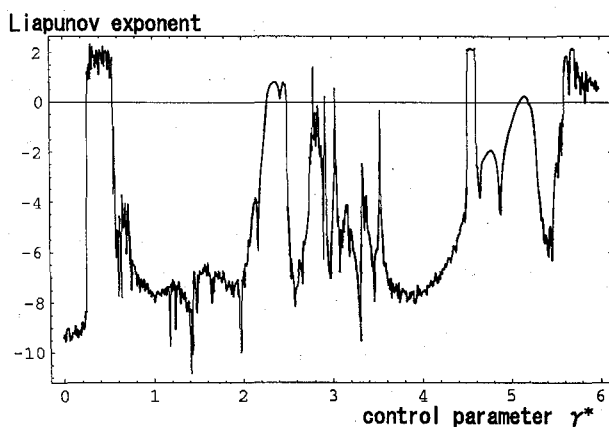


図-11 Liapunov 指数

び移りを繰り返しているものと考えられる。その後解は安定するが、 $\gamma^* = 2.3$ の点 C で振幅が突然なくなり、点 D で負の速度が大きくなり、点 E, E' でカオス解となる。このように、 γ^* の増加に対して変位・速度応答は 2 つの安定不動点 (沈点) $(\pm 1, 0)$ を中心に弧を描くように外側に向かって往復する傾向となる。この結果、数

値解の分布は典型的な Smale の馬蹄型カオスアトラクター¹¹⁾と呼ばれる馬蹄形の折りたたみ位相構造が現れた。

しかしながら、 $2n\pi$ の周期解は振幅の大きさを示すものの、負の吸引解は得られていない。これを知るには Poincaré 断面を見直す必要がある。ここでは、Poincaré 断面のみでは実際の振幅を表現できない場合があることを考慮して、Poincaré 断面とは異なる位相 $(2n + k/2)\pi$ ($k = 0, \dots, 3, n = 2, 3, \dots, 21$) の定常解を採用した。その数値解を図-10(c) に示す。この結果は負の変位挙動および分岐挙動もよく表しており、パラメータ γ^* によって解曲線が、突然ジャンプ、交差、分岐およびカオス解に至る経過が数値的に確かめられた。

また、パラメータ γ^* を 0.001 刻みで区間 $[0, 1]$ とした時の軌跡 $(u^*, \dot{u}^*)$ アトラクターを図-10(d) に示す。 u^* については同図 (b) と同じ意味である。初期値 $(1, 0)$ から放射状に解曲線が $(1 \pm 0.3, \pm 0.3)$ の範囲で広がり、 $0.3 < \gamma^* < 0.7$ のカオス解では、点 $(\pm 1, 0)$ 間で S 字状の縞模様状にアトラクターが現れた。特に、 $(0, 0)$ 近傍は解が存在しておらず、この系の運動には解が全く存在しない $(u^*, \dot{u}^*)$ 領域が存在することも明らかになった。また、このアトラクターは、 γ^* の増加とともに $(\pm 1, 0)$ の周り

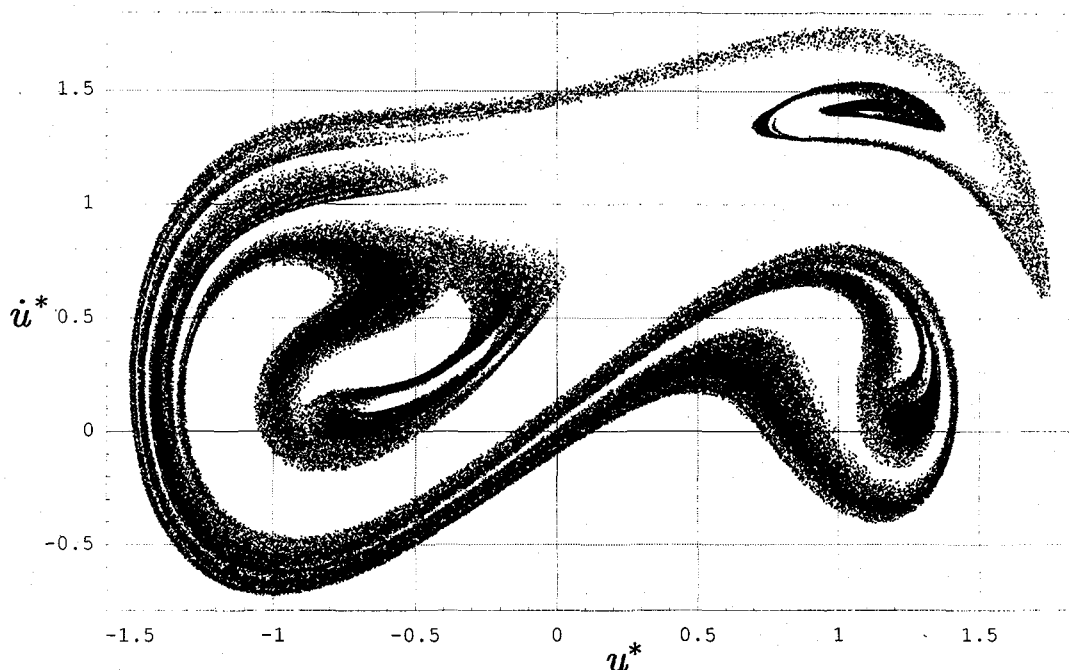


図-12 周期解の相図 ($\delta = 0.1$, $\gamma^* = 0.2 \sim 0.5$, $t = 2n\pi$)

に位相 k の数だけ弧を描いた。このことから、周期 $2n\pi$ の Poincaré 断面はその軌跡の一部であり、 $k = 0, 1, \dots$ を導入することによって、この系の運動の全体像が浮かび上がらせることができた。

さらに、カオスアトラクターに対する周期軌道の安定性を議論する上で、Liapunov 指数²が用いられる。この指数はカオスアトラクターの不安定さを指標化したものであり、この値が負値では安定を、正値では不安定と判断される。このモデルにおける Liapunov 指標を図-11に示す。この結果から、正値を示す部分は図-10(a) および (c) のアトラクターの分散部分や解の不連続部分に対応していることがわかる。我々はこの指標によってカオスアトラクターの安定性を知ることができる。その中でも工学的に問題となるのは、最初に現れる Liapunov の正値 (この場合、 $\gamma^* = 0.2 \sim 0.5$) である。これを知るためには、詳細なデータが必要となる。例えば、パラメータ分割を 0.000001 とし、 $\delta = 0.1$ のときの相図を図-12に示す。このアトラクターから解全体は揺らぎの状態となった。このように、単純な構造系からでもその挙動の複雑性を垣間見ることができた。

7. 結 論

本論文で対象とした系は、極めて単純な 1 自由度の線形粘弾性ばねモデルでありながら、系の幾何学的非

線形性からもたらされる非線形挙動特性や動的的分岐現象の発現が数値解析によって確かめられた点は、系の分岐解と挙動特性を知る上で重要であると考えられる。

本研究では以下の点が明らかとなった。

1. サドルポテンシャル系の非線形挙動では、系の安定性から鞍状不動点とライズ位置に対応する 2 つの安定な沈点を持つ。また、この鞍状不動点を越えて別の安定不動点で安定化するような初期条件が存在することを数値的に明らかにできた。
2. 減衰 Duffing 自由振動系において、ホモクリニック軌道を標準とし、減衰 δ に伴う交叉角 (摂動) に基づく分岐予測が実証できた。
3. 単純な粘弾性ミーゼス・トラスにもかかわらず、強制振動の円振動数パラメータに対する周期解の分布は、その系の非線形振動特性を表しており、その解の分布状態によって複雑な挙動特性を持っていることが明らかになった。
4. 強制振動の振幅パラメータに対してカオス解を持つことが数値解析によって明らかになった。また、Poincaré 断面の持つ位相 ($2n\pi$) とは異なる位相 $(2n + k/2)\pi$ ($k = 0, \dots, 3$) の採用や Liapunov 指数によってこの系のアトラクターの安定性等を調べることができた。

参考文献

- 1) Humphereys, J.S. and Bodner, S.R. : Dynamic buckling of shallow shells under impulsive loading, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, 88, EM2, pp.17-36, 1962.

² この指数は、微分方程式の初期値敏感性からの周期軌道 (解) の収束性を表し、Liapunov の漸近安定理論に基づく。

- 2) Nachbar, W. and Huang, N.C. : Dynamic snap-through of a simple viscoelastic truss, *Quarterly of Applied Mathematics*, **25**, pp.65-82, 1967.
- 3) Haug, N.C. : Axisymmetric dynamic snap-through of elastic clamped shallow spherical shells, *AIAA Journal*, **7**(2), pp.215-220, 1969.
- 4) Moon, F.C. and Holmes, P.J. : A magnetoelastic strange attractor, *Journal of Sound and Vibration*, **65**(2), pp.275-296, 1979.
- 5) Ueda, Y. : Steady motions exhibited by Duffing's equation : A picture book of regular and chaotic motions, In *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, SIAM, pp. 311-322, 1980.
- 6) Cook, R.G. and Simiu, E. : Periodic and chaotic oscillations of modified stoker column, *Journal of Engineering Mechanics*, **117**(9), pp.2049-2064, 1991.
- 7) Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B. : Nonlinear dynamics and chaos geometrical methods for engineers and scientists, *John Wiley & Sons Ltd.*, 1986.
- 8) Arnold, V.I. : Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, *Springer Verlag*, New York, 1983.
- 9) Winggins, S. : Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, *Springer-Verlag New York*, 1990.
- 10) 有尾一郎 : ブロック対角化理論による Duffing 非線形振動解析, 土木学会構造工学論文集 Vol.42A, pp.283-289, 1996.
- 11) Smale, S. : Diffeomorphisms with many periodic points, In *differential and combinatorial topology*, S.S. Cairns (ed.), pp.63-80, Princeton University Press, 1963.
- 12) I. Ario and K. Fujii, Dynamic bifurcation behavior with the saddle point of homoclinic orbit, *Proceeding of The First International Conference on Structural Stability and Dynamics*, 2000.

(2000 年 9 月 14 日受付)