

一軸圧縮を受ける平面ハニカムの分岐座屈特性について

Bifurcation of Honeycombs under Uni-Axial Compression

近藤大資^{*)}, 藤井文夫^{**)}, 野口裕久^{***)}

Daisuke Kondo, Fumio Fujii and Hirohisa Noguchi

*) 岐阜大学大学院工学研究科 (〒501-1193 岐阜市柳戸, f3101023@guedu.cc.gifu-u.ac.jp)

**) Dr.-Ing., 岐阜大学工学部 (〒501-1193 岐阜市柳戸, fmfj@cc.gifu-u.ac.jp)

***) 工博, 慶応義塾大学理工学部 (〒233-8522 横浜市港北区日吉, noguchi@sd.keio.ac.jp)

The highly nonlinear behavior of honeycombs may be reduced to bifurcation instability of the cellular micro-structure. There are, however, only a few studies on bifurcation of honeycombs. In the present study, the macro-structure of plane honeycombs was idealized into 2D nonlinear beam elements and the computational bifurcation theory, previously proposed by the authors, was applied to investigate the characteristic bifurcation behavior of honeycombs under uni-axial compression. It is shown that closely spaced bifurcation points are present on the primary path in short path intervals and the almost horizontal bifurcation path in load-displacement plot is characteristic in the post-critical behavior of the computed honeycombs.

Key Words: Bifurcation, Instability, Buckling Mode, Honeycombs

1. はじめに

セル構造体¹⁾は, 木材・コルク・珊瑚・蜂の巣など, 多くの自然材料に見られる構造形態であるが, 工業材料としては, 断熱材・緩衝材・航空機などの構造材, 浮揚用材, さらに, 生体材料などに広くその応用を見ることができ, このような, セル構造体の力学的特性については, 古くから多くの研究がなされてきた¹⁾.

特に圧縮力を受けるセル構造体の荷重-変位関係は, 実験的研究からも良く知られており, 図-1に示すようにその特徴的な変形の進行過程は, 大きく三段階に分類される¹⁾. はじめは変形が小さく, ほぼ線形弾性とみなすことができる第一段階. やがて, 第2段階へ入ると, 荷重がほぼ一定を保ちながら, 変形だけが進行するプラトー (棚) 領域へ

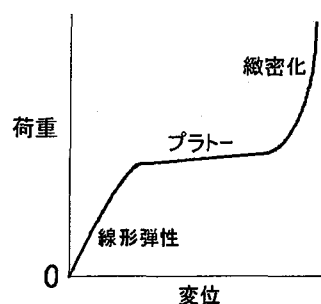


図-1 被圧縮セル構造体の荷重-変位曲線

と移行する. さらに変形が進むと, 隣り合うセル壁どうしが接触し, セル壁材料そのものの圧縮変形となることで, 緻密化段階となる^{1,5)}.

このような特徴的な非線形挙動を示すセル構造体の代表として, ハニカム構造を考えると, 弾性範囲においても

分岐座屈が支配的となる。Papka/Kyriakides^{3,4)}は、汎用プログラム (ABAQUS) を用いて、マクロスケールでのハニカム構造の弾性分岐座屈後の挙動を、セル壁の接触までも考慮して解析し、計算の中でプラトー（棚）領域と緻密化領域の存在を確認している。

一方、Ohno²⁾および斉木⁵⁾らは、均質化法を用いてミクロスケールにおけるハニカムの座屈解析を試みている。しかし、これらのいずれの研究例も、ハニカム構造全体の分岐挙動を、分岐点の精算と分岐経路への切り替え、それに後座屈挙動について、分岐理論の立場から系統的にとらえているわけではない。本論文はこの点に留意し、弾性座屈に着目することによって、ハニカム構造の特徴的な非線形安定問題を定性的に説明する事を目的とする。具体的には、計算モデルの議論で個々のセルのミクロ的挙動に注目するのではなく、規則的なセルから構成されるハニカムを全体構造系として扱う。そしてその全体構造系の分岐現象を計算分岐理論の観点からとらえ、その分岐特性を考察する。

計算したモデルは、平面セル構造体としてのハニカムで、一軸圧縮で載荷する。

セル構造体全体の定性的な分岐挙動をとらえるためにも、ハニカムモデルの規模は、実用計算の範囲内で可能な限り大きくした。その結果、特徴的な分岐座屈モードを各セルの細部まで、画像表示することにより、ハニカムの座屈変形特性について検証することができた。

2. 計算分岐理論の概要^{6~13)}

計算分岐理論については、すでに文献^{6~13)}において発表済みなため、ここではその概要についてのみ解説する。

計算分岐理論の大きな柱は以下のように、軌道追跡法、特異点ピンポイント法、経路切り替え法の三つの手続きである。

2.1 軌道追跡法 (Path-Tracing)

有限変位理論における支配方程式

$$E(u, p) = 0 \quad (2.1.1)$$

は、節点変位 u (N 自由度) と荷重変数 p との間のつり合い関係をうたったもので、式 (2.1.1) を満足する平衡点

(u, p) の集合が、 $(N+1)$ 次元空間における平衡路を定義する。また式 (2.1.1) は $R(u)$ を変形 u に依存した内力、 e を荷重モードとすると

$$R(u) - pe = 0 \quad (2.1.2)$$

となる。

平衡路の追跡には、式 (2.1.2) を線形化した剛性方程式を繰り返して解く弧長制御法などを使用するのが一般的である。

支配方程式 (2.1.2) を線形化することから剛性方程式

$$Kdu - dp e = 0 \quad (2.1.3)$$

が得られる。また弧長制御式として

$$du^T du + dp^2 = \Delta^2 \quad (2.1.4)$$

を導入する。ただし Δ は弧長幅であり規定する必要がある。

式 (2.1.3)、式 (2.1.4) は予測子方程式と呼ばれ、そしてこの予測子方程式から導かれる次式

$$dp = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{du_p^T du_p + 1}} \quad (2.1.5)$$

$$du = dp du_p \quad (2.1.6)$$

から予測子 (du, dp) を得る。ここで du_p は平衡路上で評価された剛性方程式

$$Kdu_p = +e \quad (2.1.7)$$

を du_p について解くことで得られる。

次に非平衡点における修正子 $(\delta u, \delta p)$ の計算について、支配方程式 (2.1.1) を非平衡点で線形化した方程式

$$K\delta u - \delta p e = -E \quad (2.1.8)$$

と反復制御式の

$$du^T \delta u + dp \delta p = 0 \quad (2.1.9)$$

からなる修正子方程式より得られる次式

$$\delta p = -\frac{du^T \delta u_0}{du^T \delta u_0 + dp} \quad (2.1.10)$$

$$\delta u = \delta p \delta u_p + \delta u_0 \quad (2.1.11)$$

より修正子 $(\delta u, \delta p)$ が計算できる。ただし $\delta u_0, \delta u_p$

は、非平衡点について評価された方程式

$$K\delta u_0 = -E \quad (2.1.12)$$

$$K\delta u_p = +e \quad (2.1.13)$$

を、それぞれ解くことによって得られる。

2.2 特異点ピンポイント法 (PinPointing) ⁹⁾

平衡路上に分岐点が出現する場合には、分岐経路への経路切り替えのためにも、分岐点の位置を正確に計算する必要がある。そのために、つぎのような方程式系をニュートン・ラフソン反復法で解くピンポイント法 ⁹⁾ が考案されている。

$$\begin{cases} E(u, p) = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$(2.2.2)$$

ここで d は、剛性行列 K に LDL^T 分解を施したときの対角行列 D の、特異点においてクリティカルとなる対角成分である ¹³⁾。従来の Extended System ¹⁴⁾ に比べて、ここでピンポイント法は、特異点に関する固有ベクトル情報を全く必要としないのが特長で、これにより反復計算の高速化が可能となる。分岐座屈モードについても剛性行列 K の固有ペアを計算する必要がなく、剛性行列 K の LDL^T 分解だけから抽出できる ¹³⁾。

d に対応する L^T の逆行列 $(L^T)^{-1}$ の列を s と定義する。このとき、

$$d = s^T K s \quad (2.2.3)$$

が成立する。

また式 (2.2.2) の線形化により

$$\delta d = -d \quad (2.2.4)$$

を得る。式 (2.2.3) の変分をとると

$$\begin{aligned} \delta d &= \left[2s^T K \left[\frac{\partial s}{\partial u} \right] + s^T [K_{,u} s] \right] \delta u \\ &= 2s^T K \delta s + s^T [K_{,u} s] \delta u \\ &= s^T [K_{,u} s] \delta u \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

を得る。ここで $[K_{,u} s]$ は、剛性行列 K の各成分に対して、 u による微分の結果に、右からベクトル s をかけて得られる行列を意味する。そして s を正規化して得られる q を用いて、式 (2.2.4) と式 (2.2.5) から

$$q^T [K_{,u} q] \delta u = -\frac{d}{s^2} \quad (2.2.6)$$

となる。

式 (2.2.6) の左辺 $q^T [K_{,u} q] \delta u$ は、剛性行列の q 方向の方向微分を差分計算に置き換え、式 (2.1.11)、式 (2.1.12)、式 (2.1.13) を考慮することによって、

$$\begin{aligned} q^T [K_{,u} q] \delta u &= \delta p \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \{ q^T K(u + \varepsilon q) u_0 - q^T e \} \\ &\quad + \{ q^T K(u + \varepsilon q) \delta u_p + q^T E \} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

となる。この式 (2.2.7) と式 (2.2.6) から荷重変数の修正子を計算することが出来て、

$$\delta p = -\frac{\varepsilon \left[\frac{d}{s^2} \right] + \{ q^T K(u + \varepsilon q) \delta u_0 + q^T E \}}{\{ q^T K(u + \varepsilon q) u_p - q^T e \}} \quad (2.2.8)$$

で与えられる。

なお、変位変数の修正子の計算は弧長法の場合と同様に計算すればよい。

2.3 経路切り替え法 (Branch-Switching)

経路切り替えにおける計算法は、状況に応じていくつかのスキームが実装されているが、基本的なものは、かく乱変数 t とクリティカルな固有ベクトルを近似する $q^{9,11,12}$ を導入し

$$E(u, p_A) - tq = 0 \quad (2.3.1)$$

で定義される経路を、 t がゼロとなるまで追跡することによって、目的の平衡路 (分岐経路など) に到達する方法が、最もロバスト性がある ^{7,8)}。

経路切り替え法に用いる計算手法は、軌道追跡法で述べた手法とあまり違いが見られないが、異なる点を中心に以下に述べる。ここでは支配方程式の式 (2.3.1) の p_A は分岐点付近の固定値をとるものとする。またクリティカルな固有ベクトルの近似として、対応するクリティカルな LDL^T モードである $q^{9,11,12}$ を利用することが特徴である ¹³⁾。

予測子の計算には、次の剛性方程式

$$Kdu_q = q \quad (2.3.2)$$

の解が必要であり、

$$dt = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{du_q^T du_q + 1}} \quad (2.3.3)$$

$$du = dt du_q \quad (2.3.4)$$

によって計算される。修正子計算は、方程式

$$K\delta u_0 = -(E - tq) \quad (2.3.5)$$

$$K\delta u_q = +q \quad (2.3.6)$$

の解によって式

$$\delta t = - \frac{du^T \delta u_0}{du^T \delta u_q + dt} \quad (2.3.7)$$

$$\delta u = \delta t \delta u_q + \delta u_0 \quad (2.3.8)$$

から求まる.

3. 計算モデル

3.1 離散化

ハニカム構造の離散化には, 非線形平面はり要素を使用した. はり要素の断面諸量 (断面積 A や断面二次モーメント I など), それに材料物性については表-1 と表-2 に示す.

t	d	A	I
0.144 [mm]	6.96 [mm]	0.144 [mm ²]	0.0002488 [mm ⁴]

表-1 断面幾何

E	EA	EI
2.41 [GPa]	347.04 [N]	0.5996 [Nmm ²]

表-2 材料係数と断面剛性

セルの形状については円形セルを選び, 図-2 に示すように, ひとつの円形セルを正 36 角形で近似した. 結果的に, 定性的に問題なく円形セル構造物モデルとして機能すると考える.

また個々の円形セルには, 周囲の 6 個のセルが剛結する最密な構造とし, 円形セルどうしの接触は, この剛結節点のみを介して行われることとする (緻密化段階での接触問題は扱わない.).

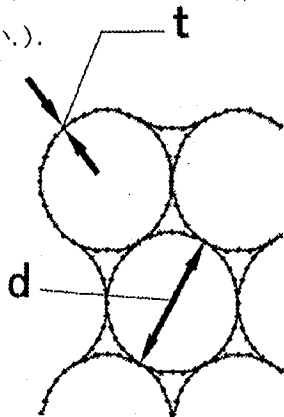


図-1 個々のセルの離散化

ハニカムモデルの大きさは, 15 段 10 列, (高さ 91.35mm, 幅 69.6mm) とした (図-3).

3.2 拘束条件と荷重条件

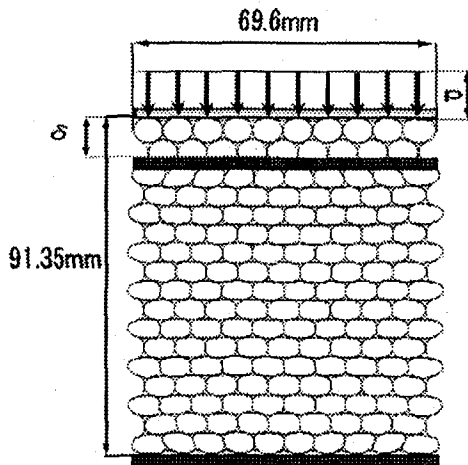


図-3 幾何形状と荷重条件

図-3 が示す様に, 上下 2 枚の剛体プレートによって, 平面ハニカムを鉛直方向に一軸圧縮をかける場合を考える.

剛体プレートとハニカムモデルとは, 上端と下端のそれぞれ 10 個の節点で接触する. そして上端のプレートと接する 10 個の節点は, 鉛直並進変位のみを自由とし, 水平並進変位と, 回転変位とを拘束する.

下端の剛体プレートと接する 10 個の節点は, すべての変位について拘束して完全固定とする.

残り全ての節点については, 2 つの並進変位と回転変位を自由としている.

このような拘束条件の下で, 上端の剛体プレートと接する節点については, その均一沈下量を δ とする.

モデル全体の規模は 14936 自由度である.

3.3 計算結果

図-3 に示す一様変位 δ を横軸に, そして単位長さ当たりの荷重強度 p を縦軸に取って, 主経路を描いたものが図-4 である. BP1~BP4 は最初の 4 個の分岐点を表している.

これらの 4 個の分岐点 (BP1~BP4) は, 非常に接近しており, このように各分岐点が互いに接近した状態で発生するク

ラスタード分岐に近い状態で発生していることがうかがえる。特異点のピンポイント法を試みた結果、各分岐点の位置（座標）を表-3に示す。

	BP1	BP2	BP3	BP4
δ [mm]	5.0893	5.1689	5.3439	5.5860
P [N/mm]	0.0564	0.0570	0.0584	0.0603

表-3 分岐点の位置

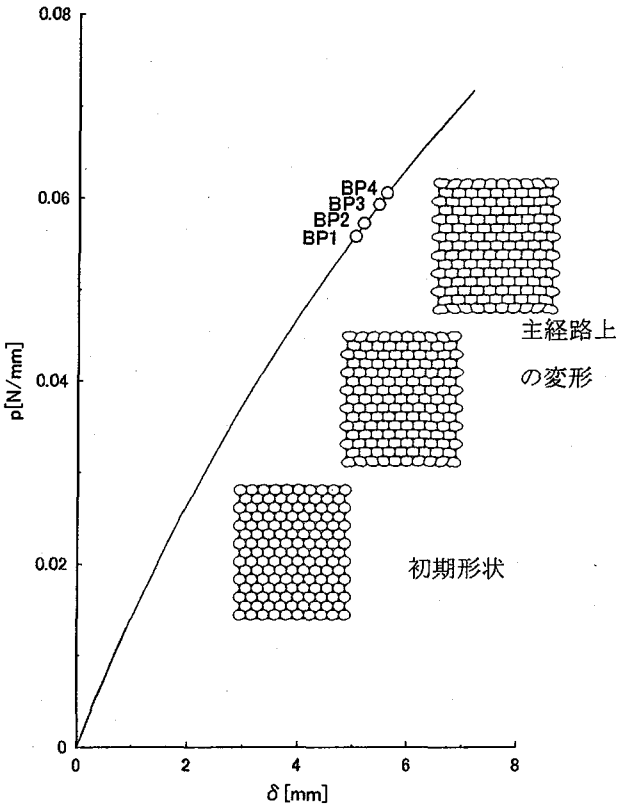


図-4 主経路と変形モード

主経路に沿う変形は、線形領域の変形の流れをそのまま受け継ぐ変形であり、図-4の変形図（変位2倍）が示すとおり、セルひとつひとつに対し、変形が顕著には現れておらず、変形モードがハニカム全体で均一であるといえる。また図-4においては、最初の4個の分岐点を示しただけであるが、この他にも多くの分岐点が、存在している事を確かめた（この状況は軸圧縮を受ける円筒シェルの座屈挙動に似る）。図-5は各分岐点におけるクリティカルな固有モード（100倍）を示したものであり、ハニカム構造の分岐座屈モードの特徴としての帯状に集中した座屈モードをよく再現している。第一分岐経路における固有モードは、セルが1段または1列ごとに交互に倒れこみ、折りたた

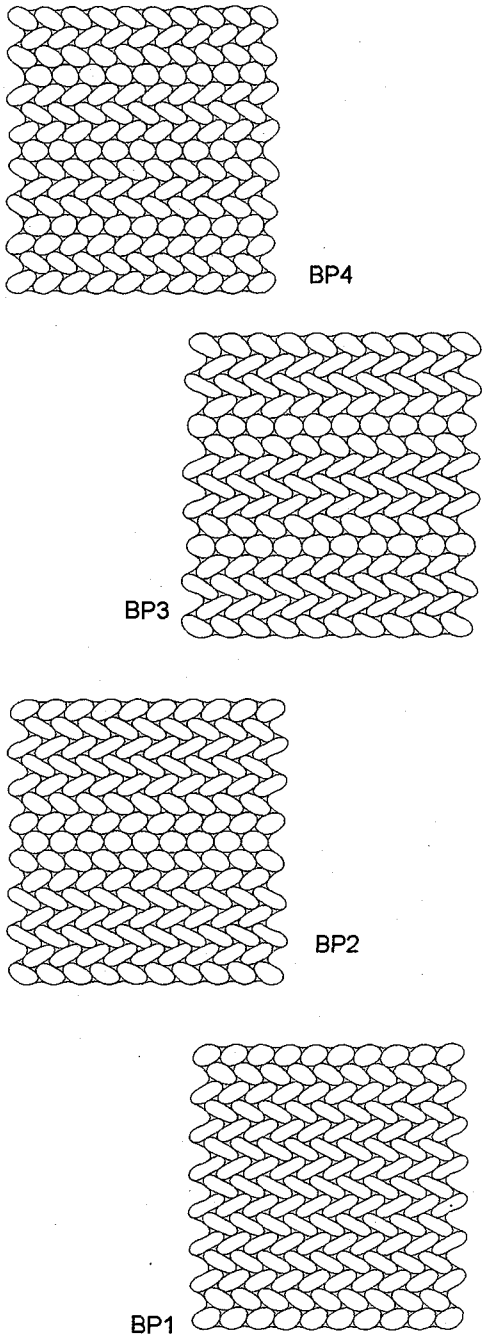


図-5 各分岐点での分岐座屈モード

まれていく変形で対称性を保持している。（図-5）
第2分岐経路，第3分岐経路，第4分岐経路の固有モードについても同様に座屈変形しているが、エネルギー準位が、第一分岐経路に比べてより高くなっており、より高周波なモードとなっている。
図-6では、主経路より派生して伸びる分岐経路のうち、原点から最も近いものから4本を表示した。

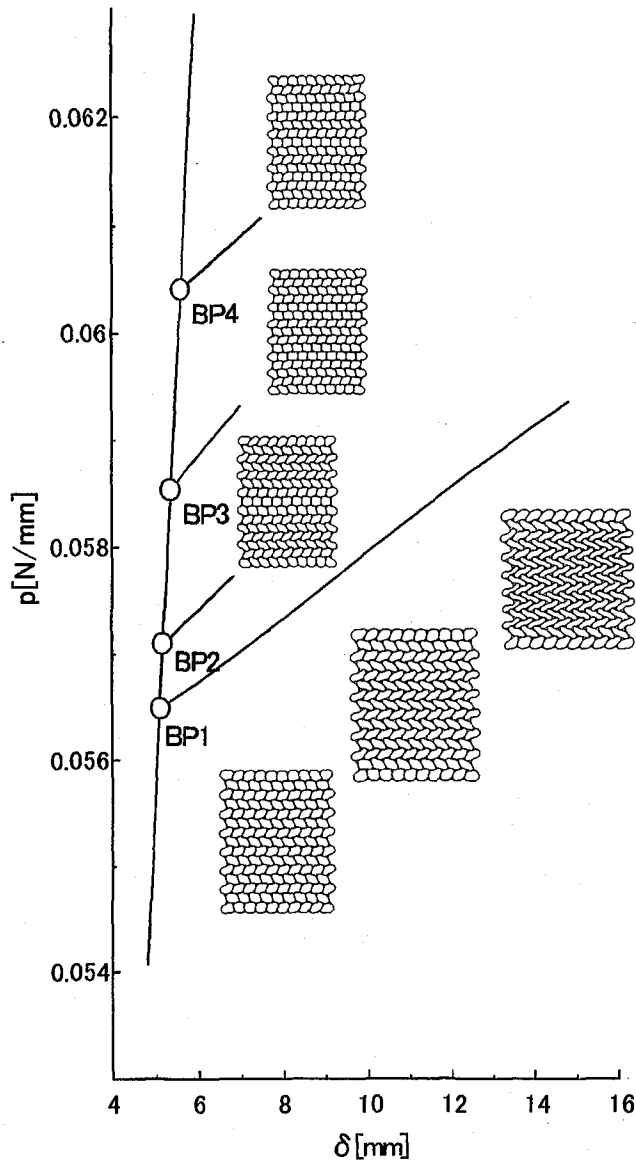


図-6 分岐経路と、分岐経路に沿う変形モード

それぞれの分岐経路は、図-6 が示すように、互いにほぼ平行に伸びており、4本の分岐経路すべてが、傾きが上向きである（荷重増分が正である）対称安定分岐であることがわかる。また計算した範囲内では、剛性行列の固有値について、多重ゼロ固有値を確認していない。このため本研究のハニカムモデルの分岐現象は単純安定分岐に分類される。原点から第一分岐点までの主経路上と第一分岐経路に沿っては、負の固有値が存在していない。従ってこの間は安定経路であるといえる。

一方、主経路上の分岐点を通過するたびに、負の固有値

の数が1だけ加算されていく単純分岐であるので、第一分岐点以降の主経路と第2分岐経路以降の分岐経路は、不安定経路である。

図-6 の分岐経路に沿う変形は、図-4 に示す各分岐点における固有モードが徐々に増幅されてゆく様子がよくうかがえる。

次に、セルの形状を変えて、正方形セルからなるモデルと、六角形セルからなるモデルについて計算を行った。計算するにあたって材料係数そして拘束条件および荷重条件を円形セルのときと同じく同様に設定した。

正方形セルの一边は 6.96mm で、円形セルの場合と同様に、はり要素を使用し、一边につき4本の要素で近似している。モデル全体の形状および寸法は図-7 に示す。

正六角形セルの寸法は、直径 6.96mm の円に内接する正六角形で、一边につき4本のはり要素で近似している。モデル全体の形状および寸法は図-8 に示す。

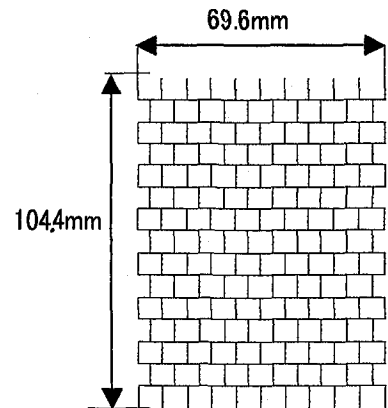


図-7 正方形セルハニカム構造の初期形状

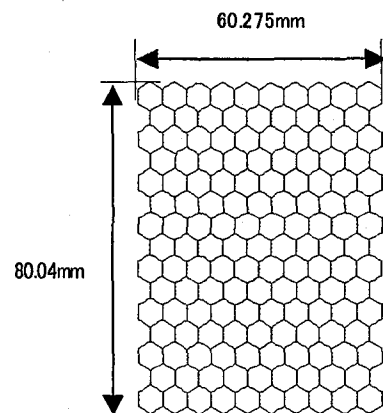


図-8 正六角形セルハニカム構造の初期形状

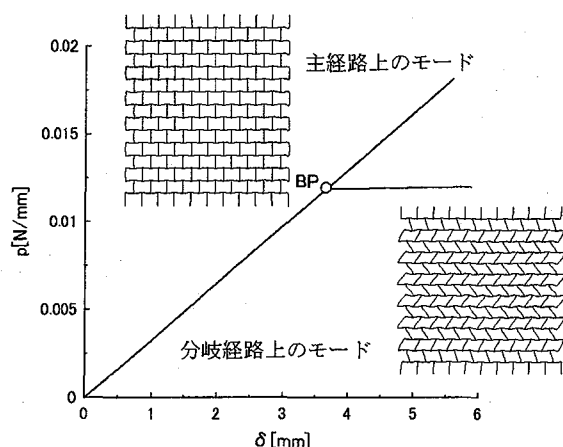


図-9 正方形セルハニカム構造の分岐

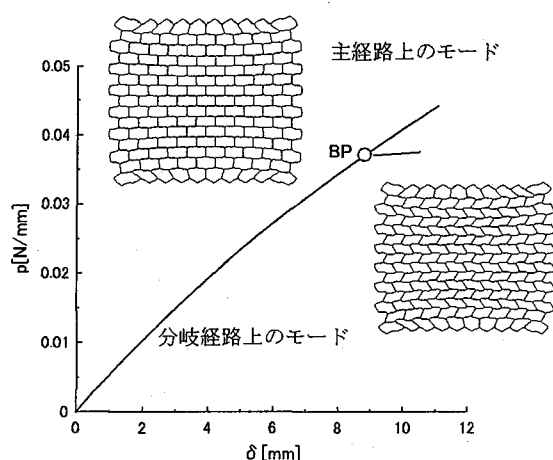


図-10 六角形セルハニカム構造の分岐

計算の結果をそれぞれ図-9と図-10に示すが、正方形セルについては、分岐点の位置が変位 $\delta = 3.692$ [mm]、荷重 $p = 0.011$ [N/mm]となった。また正六角形セルでは変位 $\delta = 9.081$ [mm]、荷重 $p = 0.037$ [N/mm]となった。一方、派生して伸びる分岐経路は対称安定分岐である。

当然のことながら、円形セル、正方形セル、正六角形セルはセル形状が異なっているので、分岐座屈荷重は3例とも異なる値になっているが、荷重-変位関係の進行過程（線形弾性領域からプラトー領域まで）は、良く知られているハニカムの特徴と良く一致している。

また主経路上の変形の特徴や、分岐経路上の倒れ込みながら潰れていく変形の特徴は、3つのモデル（円形セル、正六角形セル、正方形セル）ともに類似したものとなっている。

4. 考察

今回、計算分岐理論の観点から、ハニカム構造の特徴的な非線形挙動について見てきたが、主経路上には近接分岐点（クラスター分岐）が出現した。それに伴い各分岐点から派生する分岐経路もお互いに近接した位置にある。このことは、ハニカム構造の変形の複雑さに対して、初期不整以外の要因、すなわち分岐経路の存在によるハニカム構造の変形の多様性を見ることが出来た。そして派生する分岐経路のほとんどが、荷重・変位関係をプロットすると、ほぼ水平に伸びている。この事実は、実験でも観測されるハニカム特有のプラトー（棚）領域に対応していることが確認できる。

また初期不整、接触を考慮せずとも、線形弾性領域、プラトー（棚）領域と呼ばれる領域まで計算でシミュレーションすることが出来た。すなわち、一軸圧縮されるハニカムの荷重-変位曲線は、はじめ圧縮方向に対して圧縮変形することから、線形関係を示し、そしてやがて変形形態が圧縮変形から、せん断変形へと分岐移行することで、ハニカム特有のプラトーを示すことが分かった。そしてこの一連の定性的な変形形態は、ハニカムのセルの形状には、依存していないことが分かった。

一方、経路上の変形図は、対称な系に対し、対称な変形を保持していた。すなわち、実験に見られるような局所的で不均質な変形を確認することは出来なかった。おそらく初期不整を考慮していないことが原因であると考えられる。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F. (大塚正久): セル構造体, 内田老鶴圃, 1993.
- 2) Ohno, N., Okumura, D., and Noguchi, H.: A Homogenization Theory of Finite Deformation: Formulation and Application to Buckling Analysis of Honeycombs, Advances in Computational Engineering and Sciences, edited by Atluri, S.N. and Brust, F.W. Vol. 1, 1092-1097
- 3) Papka, S.D. and Kyriakides, S.: Biaxial crushing

- of honeycombs Part I : Experiments, Solids and Structures Vol. 36, 4367-4396, 1999.
- 4) Papka, S. D. and Kyriakides, S. : In-plane Biaxial Crushing of Honeycombs Part II: Analysis, Solids and Structures Vol. 36, 4367-4396, 1999.
 - 5) 斉木功, 寺田賢二郎, 池田清宏 : セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.1.2, 287-294, 1999.
 - 6) Fujii, F. and Ramm, E. : Computational Bifurcation Theory Path-tracing, Pinpointing and Switching, Invited Lecture, International Conference on Stability of Structures, *Coimbatore*, Proceedings, 177-191, 1995.
 - 7) Fujii, F. and Choong, K. K. : Branch-Switching in Bifurcation of Structures, *EM*, ASCE, 118-8, 1578-1596, 1992.
 - 8) Fujii, F. and Okazawa, S. : Pinpointing bifurcation Points and Branch-switching, *EM*, ASCE, Vol. 123, 179-189, 1997.
 - 9) 藤井文夫, 野口祐久 : 剛性行列の LDL^T 分解情報のみを利用した特異点の高速ピンポイント法, 計算工学講演会論文集 Vol.5, NO.2, 627-630, 2000.
 - 10) Fujii, F., Ikeda, K., Noguchi, H. and Okazawa, S. : Modified Stiffness Iteration to Pinpoint Multiple Bifurcation Points, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (to be published), 2001.
 - 11) Fujii, F. and Noguchi, H. (2000), : Eigenanalysis NOT required to Compute the Bifurcation Buckling Mode of Large-Scale Structures, IASS-IACM2000, CD-ROM Proceedings, Chania-Crete, Greece, 2000.
 - 12) Noguchi, H. and Fujii, F. (2001), : Extracting the Buckling Mode from the LDL^T -Decomposed Stiffness Matrix, *Advances in Computational Engineering and Sciences*, Edited by S. N. Atluri and F. W. Brüst, Tech Science Press, Vol. I, 750-755, ICES2000, 21-25, Anaheim, CA, USA, 2000.
 - 13) 藤井文夫, 野口祐久 : 固有値解法を必要としない多自由度非線形構造系の分岐座屈モードの求め方, 構造工学論文集 Vol.46, 241-250, 2000.
 - 14) Wriggers, P. Wagner, W. and Miehe, C. : A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70, 329-347, 1988.

(2000年9月14日受付)