

地盤材料の非線形性による波動伝播特性への影響について

A Simulation Model for Wave-Propagation in Rate-Sensitive Geomaterials

韓 思雄*, 鈴木 輝一**

Sixiong Han, Kiichi Suzuki

* 工博 重慶建築大学建築工程学院

** 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科 (〒338-8570 浦和市下大久保 255)

In this paper, an analysis procedure for calculation of the traveltime of the wave propagation in the rate-sensitive materials is proposed. This purpose is achieved by consideration of the kinematic configuration of wave-front in the space which satisfied the eikonal equation. The Drucker-Prager model is accepted to evaluation of the kinematic state of wave propagation in the plastic materials through consideration of the jump conditions of the governing equations of waves on the surface of the characteristic surface formed by the wave-front. The techniques of finite element and finite difference methods are employed in discretization of the governing equations in spatial space and the time domain, respectively. The effect of the mechanical parameters occurred in the yielding function on the wave propagation in the materials in the plastic state is discussed and a simple example is given to show the procedure to calculate the wave traveltime based on the proposed model.

Key Words: wave propagation, characteristic surface, plasticity, traveltimes

キーワード：波動伝播、特異変形曲面、塑性体、波動走時

1. はじめに

弾性波トモグラフィ法に代表されるように、波動を利用して岩盤の力学特性や岩盤構造物の安定性などを評価する方法はいろいろと研究・開発されてきている。しかし、これらの手法はほとんど線形弾性波動理論に基づいたもので、材料の非線形挙動（例えば、トンネル周辺のゆるみ領域）などを評価する際、精度の低い解析結果となることもあり、すなわち、これらの方法の適用範囲が制限されるケースも考えられる。

岩盤材料の非線形特性を評価するのに、非線形波動理論から出発することが自然な考え方である。非線形材料を伝播する波動理論は、昔から衝撃荷重下での材料強度の評価などをはじめ、材料工学分野で理論と実験の両面からよく研究されていた。しかし、いくつかの大変簡単な問題を除いて、精密な“理論解”を求めることは現時点の理論ではほとんど不可能に近い。また、数値解析においても、幾つかの特殊問題用の解析アルゴリズム以外には、汎用性を持つ解析手法は（著者らが知っているかぎりでは）まだ出ていない。一方、地球物理学分野では、地盤の構造特性を調べるために、多くの完成度の高い数値解析手法が開発されてきて、いくつかの手法は地盤工学分野でもよく利用されている。しかし、こちらは“構造特性”が主な目的で、理論的な研究が弾性体を対象とするものが多く、数値解析

法もほとんど弾性波動理論に基づいたものであるために、弾性波トモグラフィ法のように岩盤の非線形力学特性の評価に直接に適用することには限界がある。上に述べたような既存の研究結果を利用してより精度の高い、降伏状態にある岩盤の力学特性を評価する数値解析手法ができるのではないかということが、本研究の始めた動機である。

本報告では、岩質材料を伝播する波動特性を評価する一つの手法を提案し、材料の非線形性が波動伝播にどのような影響を与えるかについて調べた。本研究では、波動伝播の幾何学的な特性に注目し、波動の波頭を材料内の特異変形曲面として捉え、この特異変形曲面の移動条件（跳躍条件）を考察することから出発して、降伏した岩盤内の波動伝播速度が求められることを示し、これを有限差分法に取り入れることにより、非線形材料を伝播する波動走時を計算する一つの数値解析アルゴリズムを示した。岩盤材料の降伏については Drucker-Prager 型の降伏基準を用いて、材料の各力学パラメータが波動伝播特性に対する影響を評価する。これによって、現在よく使われている弾性波トモグラフィ法のような、主に波動走時に基づいて岩盤の力学特性を評価する手法の精度を大きく向上させる可能性を示唆した。

2. 非線形材料における波動の伝播

2.1 空間における波頭伝播の記述

図-1 に示すように、材料の領域 $D = D^+ \cup D^-$ を伝播する波頭の波頭をスムーズな曲面 Σ で記述し、この曲面上の位置 $\mathbf{x}$ における粒子が速度 $c(\mathbf{x}, t)$ で Σ に垂直な方向に伝播しているとす¹⁾。ここで、 D^+ と D^- はそれぞれ曲面 Σ で分けた D の両領域に対応する。変位 $\mathbf{u}$ は領域内で連続で、波面は領域 D^- から D^+ へ方向に伝播しているとし、 $\mathbf{n}$ は波頭の進行方向を示す単位ベクトルである。また、曲面 Σ も図-1 に示すように外側と内側でそれぞれ Σ^+ 面と Σ^- 面に分けられる。

曲面 Σ は次の式

$$t = \tau(\mathbf{x}) \quad (1)$$

で表される。ここに、 t は波動走時である。

波面に対しての勾配方向が曲面の法線ベクトル方向と一致することから

$$\text{grad } \tau = \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}} = \|\text{grad } \tau\| \mathbf{n} \quad (2)$$

ここに、“ $\|\cdot\|$ ” はベクトル “ $\cdot$ ” のノルムを表す。

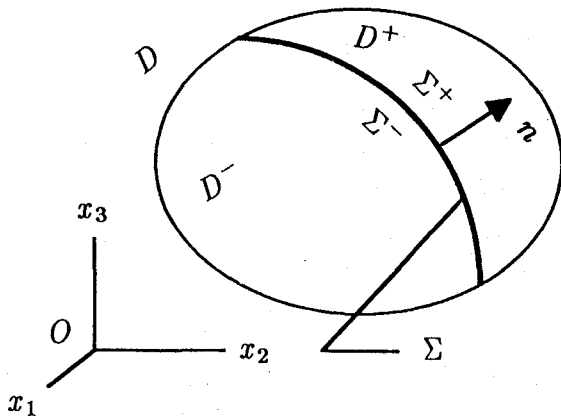


図-1 波頭により形成される特異変位曲面

$d\mathcal{L}$ を時刻 t と時刻 $t + dt$ における波面間の距離、 $d\mathbf{x}$ を時刻変化に伴う粒子が占める位置 $\mathbf{x}$ の位置増分とし、図-2 に示すように、式

$$d\mathcal{L} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = c dt \quad (3)$$

から、

$$dt = \left\| \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}} \right\| \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} \quad (4)$$

として求められ、さらに

$$\|\text{grad } \tau\| = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \tau = \frac{\partial t}{\partial \mathcal{L}} = 1/c \quad (5)$$

により、スローネス (slowness) S を速度値の逆数として定義すれば、次のようないわゆる アイコナル (eikonal)⁹⁾ 方程式が求められる

$$(\text{grad } \tau)^2 = S^2 \quad (6)$$

この式からわかるように、アイコナル方程式は、時刻、速度と空間位置という三つのパラメータで制御され、波面伝播時の空間における幾何学的な特性を表している。

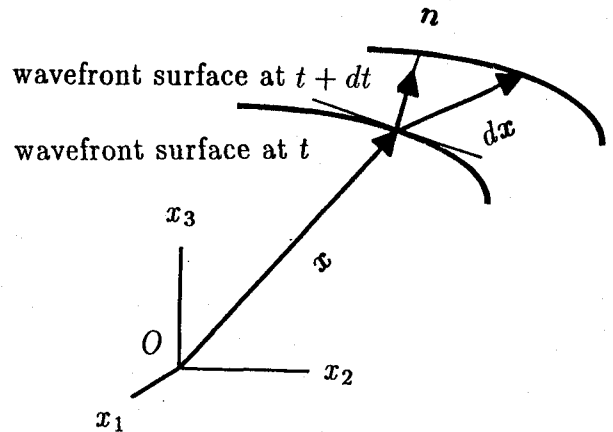


図-2 空間における波面の伝播

この波面の特性を説明するため、曲面上にある点 $\mathbf{x}(\mathcal{L})$ の運動を追跡してみると

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mathcal{L}} = \text{grad } \tau \quad (7)$$

さらに、 $\mathbf{g} = \text{grad } \tau$ とし

$$d\mathbf{g}/d\mathcal{L} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{g} = \text{grad } S \quad (8)$$

として求められる。

上の微分方程式において、波面の伝播速度は初期条件

$$\mathbf{x}|_{\mathcal{L}=0} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{g}|_{\mathcal{L}=0} = \mathbf{g}_0 \quad (9)$$

から解が求められる。

一般に、曲面上の点 $\mathbf{x}(\mathcal{L})$ が描いた軌跡 $\mathcal{L}$ は波線と呼ばれ、時刻 t での方向は $\mathbf{n}(\mathcal{L})$ で与えられる。

また、粒子の運動方向 $\mathbf{n}(\mathcal{L})$ の変化は、方程式 (8) から

$$\frac{d(\mathbf{n}S)}{d\mathcal{L}} = \text{grad } S \quad (10)$$

として求められ、材料のスローネスの勾配方向と一致するから、等方材料において波線が直線であることが上の式からわかる。

波頭の変形特性を考察するため、図-1に示すように波面 Σ を Σ^+ と Σ^- にわけて、変位 u に対し

$$f = [u] = 0, \quad [grad\ u] = 0 \quad (11)$$

ここで、記号 $[G(x_0)]$ は力学量 $G(x_0)$ の曲面 Σ における跳躍量を表し、

$$[G] = G^- - G^+ \quad (12)$$

ただし

$$G^+ = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in D^+} \{G(x)\}$$

$$G^- = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in D^-} \{G(x)\}$$

ここに、 x_0 は Σ 上にある点である。

曲面 Σ が連続的な関数であれば

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = n \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \quad (13)$$

さらに

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = c \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \quad (14)$$

として、曲面 Σ の法線方向における変数の跳躍量が得られる。式の中に、 x_n は点 x を原点とする法線方向の局所座標である。

空間記述の連続式とコーシーの運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \\ \rho \dot{v} = \operatorname{div} \sigma + \rho b \end{cases} \quad (15)$$

Σ 上で考えると、曲面 Σ の法線方向において、式 (15) から次のような跳躍型の方程式が得られる

$$\begin{cases} [\dot{\rho}] + \rho [\operatorname{div} v] = 0 \\ \rho [\dot{v}] - [\operatorname{div} \sigma] = 0 \end{cases} \quad (16)$$

ただし、 b は物体力で、 ρ は材料密度である。 σ および v はそれぞれ応力テンソルと変形速度ベクトルを表す。

2.2 材料非線形性の影響

応力テンソル σ 、偏差応力テンソル s 、ひずみテンソル ϵ 、弾性ひずみテンソル ϵ^e 、塑性ひずみテンソル ϵ^p 、偏差塑性ひずみテンソル e^p 、偏差弾性ひずみテンソル e^e それに偏差ひずみテンソル e の間には次のような関係が定義される

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T), \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

$$s = \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{Itr}(\sigma), \quad e = \epsilon - \frac{1}{3} \operatorname{Itr}(\epsilon)$$

$$e^p = \epsilon^p - \frac{1}{3} \operatorname{Itr}(\epsilon^p), \quad e = e^e + e^p$$

ここに、 I は単位テンソルである。

応力増分と弾性ひずみ増分の関係は

$$\dot{\sigma} = 2\mu \dot{\epsilon}^e + \lambda \operatorname{Itr}(\dot{\epsilon}^e), \quad \dot{s} = 2\mu \dot{e}^e \quad (17)$$

で与えられる。ここに、 μ, λ は Lamé の定数である。

一方、材料が塑性状態にある場合、降伏関数は

$$F(s, p) = 0 \quad (18)$$

として与えられる。ここに、 p は静水圧で

$$\dot{p} = -k \operatorname{tr}(\dot{\epsilon})$$

ここに、 k は体積弾性率である。

Drucker-Prager 型の降伏関数は

$$F(s, p) = \left(\frac{1}{2} s \cdot s\right)^{1/2} - \alpha p - K' \quad (19)$$

で与えられ、 π 平面において Mohr-Coulomb 降伏基準に外接、すなわち、三軸圧縮の応力状態に相当する場合

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \\ K' = \frac{6C \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \end{cases} \quad (20)$$

また、三軸伸張の応力状態に相当する場合

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \\ K' = \frac{6C \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \end{cases} \quad (21)$$

ただし、 ϕ は材料の摩擦角で、 C は粘着力である。

また、非圧縮材料における安定条件が偏差応力と偏差塑性ひずみに対して成立することから、関連流れ則がつぎのように書ける

$$\dot{e}^p = \Omega \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (22)$$

材料が塑性挙動している間には降伏関数は常に $F = 0$ であるという適合条件は

$$dF = 0 \quad (23)$$

と書ける。それに式 (18) を代入すると、流れ則におけるパラメータ Ω が次のように求められる

$$\Omega = \frac{e \cdot s}{2\sqrt{J_2}} + \frac{2\mu + 3\lambda}{12\mu} \operatorname{atr}(e) \quad (24)$$

ここに、 J_2' は第二偏差応力不変量で、 $J_2' = \frac{1}{2} s \cdot s$ 。

式 (16)、(19) と式 (22) を用いて、次の方程式が得られる

$$A \left[\frac{\partial v}{\partial x_n} \right] = 0 \quad (25)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & (\mu - \rho c^2) \mathbf{I} + \left(\frac{\mu}{3} + K'\right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \\ & \frac{\mu}{(\alpha \rho + K')^2} (\mathbf{s}^T \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{s}^T \mathbf{n}) - \\ & \frac{\alpha k}{\alpha \rho + K'} \mathbf{s}^T (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned}$$

これにより、波頭が伝播していることから、つぎのような条件式が成立する

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (26)$$

上の条件式から、原理的にそれぞれの力学状態での波動伝播速度は求められる。 x 軸に引っ張り応力と y 軸に同じ量の圧縮応力を受ける材料において、 x 軸方向に伝播する平面膨張波を考える場合、上の式から

$$c = \left(\left(\frac{1}{3} \mu + (1 - \alpha) K' \right) / \rho \right)^{1/2} \quad (27)$$

として、波動伝播の速度が得られる。

差分法での数値離散化については、連続性材料を、図-3 に示すような格子間隔 h を持つ構造体に離散化し、連続的な力学量をこの構造体の格子点上で与える。これにより実際に連続的に分布している材料の速度構造は、水平方向と垂直方向を等間隔にスペースを空けた2次元の離散化した点の速度構造に変えられる。これにより、波動が伝播する過程を考慮する時、格子点と格子点の間に波動がどのように広がっていくかを考えることとなる。離散化した速度場における格子点の間の速度値は次の式により内挿された形となる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{S}^e \quad (28)$$

ここに、 $\mathbf{S}^e$ は図-4 に示すような e 番目の仮要素の4つの節点のスローネス値（速度値の逆数）により形成されるベクトルで、 $\mathbf{N}^e$ が形状関数である。これらのベクトルの成分は次の式で与える

$$\mathbf{S}^e = (S_{(i-1,j)}, S_{(i,j)}, S_{(i,j-1)}, S_{(i-1,j-1)})$$

$$\mathbf{N}^e = (N_1, N_2, N_3, N_4)$$

ここに、 $S_{(m,n)}$ は格子点 $q_{(m,n)}$ ($n, m = i, i-1, j, j-1$) 上のスローネス値を表し、形状関数のパラメータ N_i は次のように定義される。

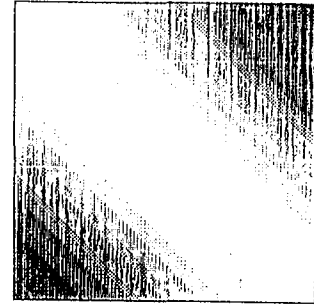
$$N_1 = \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 + \xi_2)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 + \xi_2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2)$$

ここに、 ξ_i ($i = 1, 2$) は格子間の距離 h により正規化された局所座標で、 $\xi_1 = x/h, \xi_2 = y/h$ である。



continuous medium

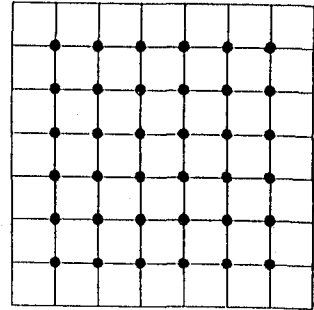


図-3 連続体の離散化

また、材料の非線形性を表すパラメータ α および K' も材料のスローネス値と同じように離散化される。すなわち

$$\alpha = \mathbf{N}^e \cdot \alpha^e \quad (29)$$

ここに、 α^e は図-4 に示すような e 番目の仮要素の4つの節点の値に対応するベクトルで、

$$\alpha^e = (\alpha_{(i-1,j)}, \alpha_{(i,j)}, \alpha_{(i,j-1)}, \alpha_{(i-1,j-1)})$$

ただし、 $\alpha_{(m,n)}$ は格子点 $q_{(m,n)}$ ($n, m = i, i-1, j, j-1$) 上の値である。

同じように、パラメータ K' に対して

$$\mathbf{K}' = \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{K}'^e \quad (30)$$

ここに、 $\mathbf{K}'^e$ は図-4 に示すような e 番目の仮要素の4つの節点の値に対応するベクトルで、

$$\mathbf{K}'^e = (K'_{(i-1,j)}, K'_{(i,j)}, K'_{(i,j-1)}, K'_{(i-1,j-1)})$$

ここに、 $K'_{(m,n)}$ は格子点 $q_{(m,n)}$ ($n, m = i, i-1, j, j-1$) 上の値である。

また、座標系 Oxy において、アイコナル方程式に対してつぎのような差分近似を行う

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2h} (t_{(i-1,j-1)} + t_{(i-1,j)} - t_{(i,j-1)} - t_{(i,j)}) \\ \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{2h} (t_{(i-1,j-1)} + t_{(i,j-1)} - t_{(i-1,j)} - t_{(i,j)}) \end{cases} \quad (31)$$

ここに、 $t_{(i,j)}$ は格子点 $q_{(i,j)}$ における波動走時である。

波動が離散化した速度構造体を如何に伝播していくかを説明するために、図-4 に示すような格子点 ($q_{(i,j)}, q_{(i-1,j)}, q_{(i-1,j-1)}, q_{(i,j-1)}$) により形成される速度構造を考えることとする。考察上の便利のために、波動の発震源を点 $q_{(i-1,j-1)}$ とし、この点の初期波動走時を $t_{(i-1,j-1)}$ とする。式 (31) をアイコナル方程式 (6) に代入すれば

$$\begin{cases} t_{(i,j)} = t_{(i-1,j-1)} + (2(hS_{(i,j)})^2 - (t_{(i,j-1)} - t_{(i-1,j)})^2)^{1/2} \\ t_{(i-1,j)} = t_{(i-1,j-1)} + \frac{1}{2}h(S_{(i-1,j-1)} + S_{(i,j-1)}) \\ t_{(i,j-1)} = t_{(i-1,j-1)} + \frac{1}{2}h(S_{(i-1,j-1)} + S_{(i,j-1)}) \end{cases} \quad (32)$$

としてほかの三つの格子点上の波動走時が求められる。式の中には、 $t_{(n,m)}$ および $x_{(n,m)}$ はそれぞれ格子点 $q_{(n,m)}$ ($n, m = i, i-1, j, j-1$) 上の波動走時と空間での座標値を表す。

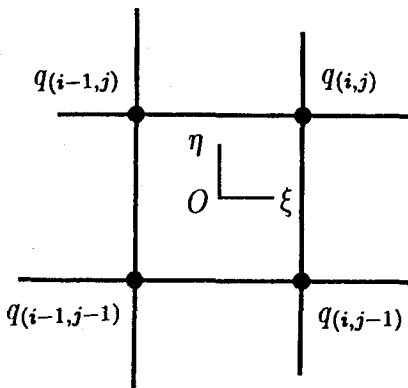


図-4 格子点により形成される仮要素

さらに、 $q_{(i-1,j)}, q_{(i,j)}$ と $q_{(i,j-1)}$ を新しい発震源とし、上の式で求められた波動走時を初期値とし、これらの発震源のまわりの格子点上の波動走時が得られる。この過程を繰り返せば、格子構造におけるすべての格子点上の波動走時は求められ、これらの走時値に対しての等高線は図-2 に示されるような各時刻における波面を形成する。各時刻の波面において、方程式 (7) から波面の法線方向に運動する粒子の軌跡を求めると、震源から放射される波線の様子もシミュレーションすることができる。

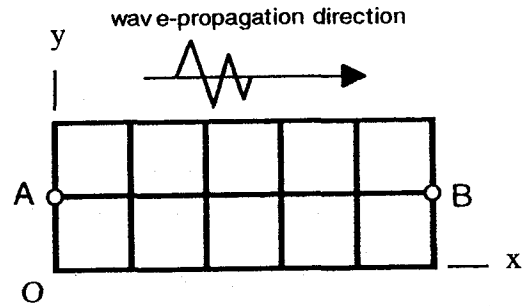


図-5 数値解析モデル

2.3 数値解析例題

波動伝播における材料の非線形性を調べるために、簡単な例題として、空間に伝播する波動を、図-5 に示すような高さ 2m、長さ 5m、厚さ 1m の領域の供試体を用いて膨張波の伝播について考察する。有限差分法により正方形格子構造に離散化される。供試体は y 軸方向の圧縮力と x 軸方向の引張り力により初期降伏状態にあるとし、Mohr-Coulomb 降伏基準に外接するような Drucker-Prager の降伏基準を用いる。材料は石膏の供試体⁶⁾と想定して、計算に用いられる材料定数は：ヤング率： $E = 3730\text{MPa}$ ，ポアソン比： $\nu = 0.16$ ，内部摩擦角： $\phi = 56.3^\circ$ ，粘着力： $C = 3.3\text{MPa}$ ，材料密度： $\rho = 2.1\text{t/m}^3$ とする。

数値解析においては、図-5 に示すように A 点に発震点を配置し、 B 点を受震点とする。

図-6 に解析結果が示されている。横軸は波動の伝播距離で、縦軸は材料が弾性状態での波動の伝播走時で正規化された走時である。白丸は弾性状態、黒丸は塑性状態の値である。図-6 に示される計算結果から材料の降伏により材質が劣化し、波動伝播走時が大きくなるのがわかる。

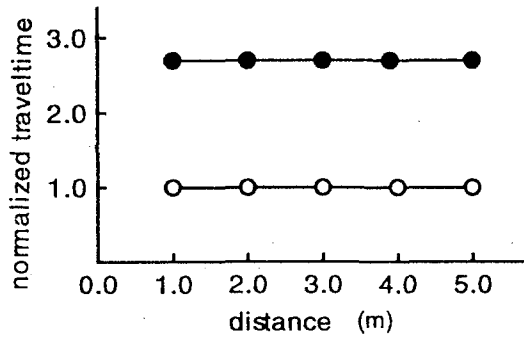


図-6 解析結果

3. おわりに

本報告では波動が非線形材料を伝播する問題に対する数値解析手法を提案した。降伏した材料を伝播する波動の波頭による形成された特異変形曲面に注目して、場の基礎方程式の跳躍条件を導くことから波動伝播の幾何学的な性質を抽出し、それを波動伝播の幾何学的な状態を記述するアイコナル方程式に取り入れることにより、波動走時を計算する有限差分スキームを示した。

本研究では、材料が降伏したとの前提で定式化したもので、実際問題においては材料のある領域が弾性状態にあつたり、ある部分が降伏状態にあつたりするのである。すなわち、図-4に示すような仮要素の中に塑性領域と弾性領域の境界面が存在する時、要素内における波動の散乱など複雑な力学現象も生じる。このような問題に対して、どのように対応すればよいかは本研究では取り扱っていない。また、本文の「はじめに」に述べたように、岩盤工学問題においては、波動が材料の力学特性を推定することに用いられるから、提案した数理モデルにどのように逆解析手法を導入するかは、実際の工学問題への適用にあたって大変重要である。これは今後の研究課題として残したい。

参考文献

- 1) Chadwick, P. : *Continuum mechanics* (Chapter 3), George Allen & Unwin Ltd, 1976.
- 2) Green, A.E. and Naghdi, P.M. : A general theory of an elastic-plastic continuum, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol.18, pp.251-281, 1965.
- 3) Gross, D. and Zhang, CH. : Wave propagation in damaged solids, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.29(14-15), pp.1763-1779, 1992.
- 4) Han, S. and Jiang, Y. : An inverse algorithm for construction of wave-front propagation and evaluation of rock structures, *Proc. Int. Sym. on Rock Mechanics and Environmental Geotechnology*, Chongqing, pp.179-184, 1997.
- 5) Ichikawa, Y., Kyoya, T. and Kawamoto, T. : Incremental theory of plasticity for rock, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Method. Geomech.*, Nagoya, Vol.1, pp.451-462, 1985
- 6) 川本眺万・吉田栄生 : 節理体および積層体の巨視的なせん断破壊性状について、*材料*, 17(181), pp.42-49, 1968.
- 7) Rice, J. R. : The localization of plastic deformation, *Theoretical and Applied Mechanics* (W.T.Koiter, ed), North-Holland Pub., pp.207-220, 1976.
- 8) Sluys, L.J., Borst, R. and Mühlhaus, H.B. : Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium, *Int. J. Solids Structures*, Vol.30, No.9, pp.1153-1171, 1993
- 9) Vidale, J. : Finite-Difference calculation of travel times, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.78(19), pp.2062-2076, 1988.
- 10) 吉野秀樹 : 弾性波による材料構造特性の推定に関する基礎的研究、埼玉大学卒業論文、1997.

(2000年9月14日受付)