

地下立体交差の梁組構造と板組構造における荷重分配解析手法

LOAD DISTRIBUTION AND SEVERAL ANALYTIC METHODS
ON THE BEAMS STRUCTURES AND THE BOX-CULVERT AT UNDERPASS

山下彰彦* 小山幸則** 村石尚*** 酒井譲****
Akihiko YAMASHITA Yukinori KOYAMA Hisashi MURAISHI Yuzuru SAKAI

- * 工博 鉄道総合技術研究所 主幹 (〒185 東京都国分寺市光町 2-8-38)
** 鉄道総合技術研究所 副本部長 (〒185 東京都国分寺市光町 2-8-38)
*** 鉄道総合技術研究所 主幹技師 (〒185 東京都国分寺市光町 2-8-38)
**** 工博 横浜国立大学工学部 教授 (〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5)

There are some kinds of underground passage-structures without disturbing surface structures, such as railways and highways. Some of underground passage-structures are composed of beams, and some of them are box-culverts. This paper deals with analytic methods for designing beams structures and box-culverts. A kind of beams structures typed through bridge have two main beams and cross beams connected with each other by interlocking joints along their length, and the boundary integral equations method is useful for designing beams structures. The 3 dimensional FEM method is available for designing box-culvert exactly.

Key Words : load distribution, analytic methods, beams structures, plates structures, underpass

1. はじめに

鉄道、道路では盛土を、人力と小規模施工機械で構築でき、工事費用が安価であり、かつ排水がよいことから、構造様式として多くの区間で採用してきた。盛土構造は、植生を含有することができ、切土やトンネル掘削で発生する土やずりを転用できるという利点をもっているが、道路を新設するあるいは水路を新設するなどの社会基盤整備に際して空間的に遮断となっている。鉄道盛土のところで道路新設して交差しようとする場合、鉄道側は列車運転への支障を小さくしたい等の要望を持ち、道路側としては用地買収を小さく交差部道路取り付けをまとめ良くしたい等の要望を持つから、所要経費と施工技术能力を考慮し、両者の要望を取り入れつつ、立体交差の構造様式を考えることになる。このような状況から、新設道路と鉄道の単独立体交差では約20年前から盛土非開削の地下立体交差方式が多く採用されるようになっていく。

盛土非開削の地下立体交差方式とは、盛土両側部分に発進口、到達口を設けて水平方向に掘削を行っていくもので、線路部分からの掘削がなく、水平方向の推進工法とするものである。そして、その構造様式には、軸長方向に継手をもった梁を使い、梁を次々と盛土に押込んで地中に面を構成していく梁組構造(図-1参照)とする

もの、ボックス・カルバートあるいは函体と呼ばれるもので鉄筋コンクリートなどで板組構造(図-2参照)とするものがある。

高架橋の一般部、PC橋梁部などでは、その主たる荷重分配作用は構造物の骨組の梁で行い、スラブマットを載せるために床版を設けており、その設計計算においても骨組計算が中心となっている。それに対し盛土を貫通して道路、水路、通路などを設けようとした場合、鉄道線路の陥没や変状を防ぐためには、まず地下水の出水を押さえ、盛土のせん断滑りを防止するために、開口する地中空間を面で覆う必要がある。面で覆うことができることを確信してから、荷重分配面での構造様式を考えることになる。地下立体交差の構造では主部材と補助部材という使いわけの構成となっていないことが多い。このため、地下立体交差の梁組構造と板組構造では、その荷重分配作用に関して、荷重分配の主部材による骨組計算あるいは2次元断面構造モデルで表現することが困難であり、表現したとしても実際の地下立体交差構造物挙動を大きく歪めたものとなる。

地下立体交差の梁組構造の荷重分配解析の研究としては、山川・後藤が各梁を有限帯板要素で三角級数の形状関数で表現し、梁の軸長方向継手をせん断ばねなどで過重伝達を表現した定式化を示したもの¹⁾、後藤・村松・近藤・高橋が各梁を有限帯板で境界積分方程式から

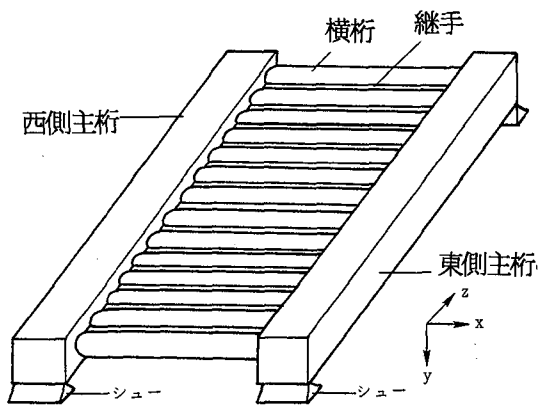


図-1 梁組構造

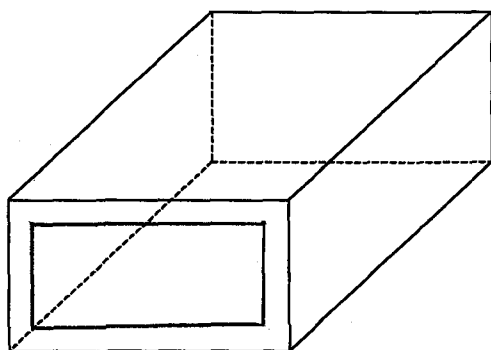


図-2 板組構造

定式化したもの²⁾，山下が2方向の梁組構造を有限帯板要素で積分方程式から定式化したもの^{3) 4)}がある。地下立体交差としてではないが，薄板の板組構造としては，小松・長井・坂本⁵⁾，田中・宮崎⁶⁾の境界要素法による研究がある。

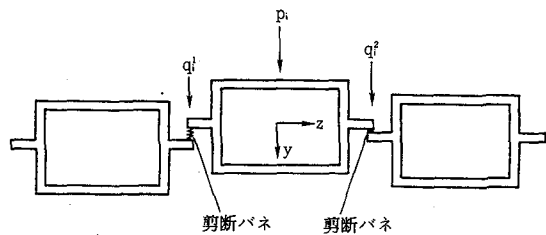
本論文では，軸長方向継手付梁の組構造について，積分方程式法と有限要素法での定式化を取り扱い，有限帯板要素表現を含んでいる。なお，実測値と積分方程式法計算値との比較は文献7で示している。次に，板組構造を8節点六面体要素を使って有限要素法で解いたものを報告し，数値積分と要素分割について考察する。

2. 梁組構造の解析

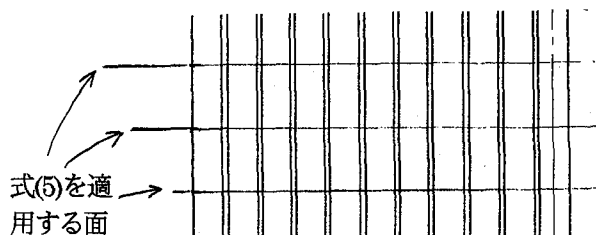
解析モデルは各梁を有限帯板に置き換えるものとして，図-1の梁組構造を扱う。境界積分方程式による方法，有限要素法による方法のいずれも種々の継手付梁組構造に対応できるものである。図-1の構造モデルにおける曲げ及びねじり式と境界条件と継手部釣合い条件(図-3参照)は

(1) 各横桁について¹⁾²⁾³⁾

$$\text{曲げ} \quad EI \frac{d^4 v_i}{dx^4} = p_i + q_i^1 + q_i^2 \quad (1)$$



(a) 継手付横桁断面状況図



(b) 釣合せ設定面

図-3 継手付横桁の断面での釣合せ

$$\text{ねじり} \quad GJ \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} = t_i - r q_i^1 + r q_i^2 \quad (2)$$

i 番目横桁の両端部の境界条件

$$x_i = 0 : v_i(0), Q_{1,i}, \theta_i(0), M_{1,i}, \phi_i(0), T_{1,i} \quad (3)$$

$$x_i = l : v_i(l), Q_{2,i}, \theta_i(l), M_{2,i}, \phi_i(l), T_{2,i} \quad (4)$$

i 番目横桁の右側継手部の釣合い境界条件

$$K[(v_i - r \phi_i) - (v_{i+1} + r \phi_{i+1})] = -q_i^2 = q_{i+1}^1 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$q_1^1 = 0, \quad q_n^2 = 0 \quad (6)$$

(2) 西側主桁について³⁾

$$\begin{aligned} \text{曲げ} \quad E_M I_M \frac{d^4 v_w}{dz_w^4} &= p_w - \sum_{i=1}^n Q_{1,i} \delta(z_w - z_{w(i)}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n T_{1,i} \delta(z_w - z_{w(i)})' \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{ねじり} \quad G_M J_M \frac{d^2 \phi_w}{dz_w^2} = t_w - \sum_{i=1}^n M_{1,i} \delta(z_w - z_{w(i)}) \quad (8)$$

西側主桁の両端部の境界条件

$$z_w = 0 : v_w(0) = 0, M_{1,w} = 0, \phi_w(0) = 0 \quad (9)$$

$$z_w = l_M : v_w(l_M) = 0, M_{2,w} = 0, \phi_w(l_M) = 0 \quad (10)$$

(3) 東側主桁について³⁾

$$\begin{aligned} \text{曲げ} \quad E_M I_M \frac{d^4 v_E}{dz_E^4} &= p_E - \sum_{i=1}^n Q_{2,i} \delta(z_E - z_{E(i)}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n T_{2,i} \delta(z_E - z_{E(i)})' \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{ねじり} \quad G_M J_M \frac{d^2 \phi_E}{dz_E^2} = t_E - \sum_{i=1}^n M_{1,i} \delta(z_E - z_{E(i)}) \quad (12)$$

東側主桁の両端部の境界条件

$$z_E = 0 : v_E(0) = 0, M_{1,E} = 0, \phi_E(0) = 0 \quad (13)$$

$$z_E = l_M : v_E(l_M) = 0, M_{2,E} = 0, \phi_E(l_M) = 0 \quad (14)$$

と表現できる。式(7)(8)(11)(12)は主桁と横桁が直交位置にある場合のものであって、横桁端部の曲げモーメント力は主桁中間部でねじりモーメント力として作用し、横桁端部のねじりモーメント力は主桁中間部で曲げモーメント力として作用する。

ここに、 EI は i 番目横桁曲げ剛性で、 v_i は i 番目横桁鉛直変位で右下添字 i が i 番目を示す。 p_i は外力の下向き分布せん断力である。 q_i^1 と q_i^2 は内力の継手分布せん断力で右下添字 i が i 番目を示し、右上添字1が断面左側継手のもので下向作用力であることを示し、右上添字2が断面右側継手のもので下向作用力であることを示す。 GJ は i 番目横桁ねじり剛性である。 ϕ_i は i 番目横桁ねじり角で、 t_i は外力の分布ねじりモーメント力で、 r は横桁ピッチ半長であり継手分布せん断力の腕長となるものである。 l は横桁長さ。 $Q_{1,i}$, $M_{1,i}$, $T_{1,i}$ は i 番目横桁の始点端部のせん断力、曲げモーメント力、ねじりモーメント力である。 $Q_{2,i}$, $M_{2,i}$, $T_{2,i}$ は i 番目横桁の終点端部のせん断力、曲げモーメント力、ねじりモーメント力である。 θ_i は i 番目横桁たわみ角である。

$v_i(0)$, $\theta_i(0)$, $\phi_i(0)$ は変数 x が0のときの値である。 $v_i(l)$, $\theta_i(l)$, $\phi_i(l)$ は変数 x が l のときの値である。 K は継手を置き換えたせん断ばねの弾性値である。 n は横桁本数である。 $E_M I_M$, $G_M J_M$, l_M は主桁曲げ剛性、主桁ねじり剛性、主桁長さである。 v_w , θ_w , ϕ_w は西側主桁（横桁の始点側に位置する）の鉛直変位、たわみ角、ねじり角であり、右下添字 w が西側主桁であることを示す。 z_w は西側主桁の軸長方向の局所座標で、 $z_{w(i)}$ は西側主桁と i 番目横桁との結節点の局所座標の位置である。 p_w , t_w は西側主桁に作用する下向きせん断分布外力、西側主桁に作用する分布せん断ねじりモーメント外力である。主桁における記号の右下添字が E は東側主桁（横桁の終点側）のものである。 δ はデルタ関数で、 A' は dA/dz_w , dA/dz_E である。

2. 1 境界積分方程式法

重み付き残差法で各梁要素の定式化を行うものである。

まず、式(1)の両辺に重み関数としてグリーン関数 v^* を乗じ、 $\{x|0 \leq x \leq l\}$ 区間について部分積分を4回行うと鉛直変位は

$$v_i(\eta) = - \left[EI \left(v^* \frac{d^3 v_i}{dx^3} - \frac{dv^*}{dx} \frac{d^2 v_i}{dx^2} + \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{dv_i}{dx} \right) - \frac{d^3 v^*}{dx^3} v_i \right]_0^l + \int_0^l v^* p_i dx + \int_0^l v^* q_i^1 dx + \int_0^l v^* q_i^2 dx \quad (15)$$

と表現できる。外力荷重項は $\int_0^l v^* p_i dx$ の積分値表現とな

り、外力作用点の右側と左側とで鉛直変位を場合分けしなくてもよい形となる。式(15)から鉛直変位 $v_i(\eta)$ は、 η を変数として端部変位や端部力や継手分布せん断力などの1次線形結合で表現できる。

式(2)の両辺に重み関数としてグリーン関数 ϕ^* を乗じ、 $\{x|0 \leq x \leq l\}$ 区間について部分積分を2回行うと、ねじり角は

$$\phi_i(\eta) = - \left[GJ \left(\phi^* \frac{d\phi_i}{dx} - \frac{d\phi^*}{dx} \phi_i \right) \right]_0^l + \int_0^l \phi^* t_i dx - r \int_0^l \phi^* q_i^1 dx + r \int_0^l \phi^* q_i^2 dx \quad (16)$$

と表現され、端部変位や端部力や継手せん断力などの1次結合で表現できる。

鉛直変位の式(15)とねじり角の式(16)を横桁の両端部の境界条件式(3)と式(4)に、横桁の継手部の釣合条件式(5)と式(6)に代入することにより、横桁での連立1次方程式を得る。

主桁鉛直変位 $v_w(\eta)$, $v_E(\eta)$ と主桁ねじり角 $\phi_w(\eta)$, $\phi_E(\eta)$ についても、グリーン関数を使うことによって、横桁がそうであったように、 i 番目横桁端部から伝達される曲げモーメント力などの未知数の1次線形結合で表現できる。未知数の1次線形結合で表現した西側主桁鉛直変位 $v_w(\eta)$ と西側主桁ねじり角 $\phi_w(\eta)$ を西側主桁境界条件の式(9)と(10)に代入し、東側主桁鉛直変位 $v_E(\eta)$ と東側主桁ねじり角 $\phi_E(\eta)$ を東側主桁境界条件の式(13)と式(14)に代入することにより、主桁での連立1次方程式を得る。そこで、横桁と主桁の方程式を連立させることで未知数が求められる。主桁が多径間支持であれば、主桁鉛直変位をその支持位置 $\eta = z_{wsi}$ で鉛直変位零などに置くことによって、多径間支持点での力 Q_{si} を求めることになる。

2. 2 有限要素法

積分方程式法では軸長方向継手付横桁の鉛直変位が式(15)で表わされ、ねじり角が式(16)で表わされることを示した。有限要素法で継手付梁を取り扱おうとすれば、式(15)と式(16)に相当する表現が必要である。エネルギー最小の原理から継手付梁要素の剛性マトリックスを導くことができる。

継手付梁要素の全ポテンシャルエネルギー $\pi(x)$ は、系が弾性で静的に釣合い熱出入りがないものとすれば、外力仕事量 Ω と内部エネルギー U から

$$\pi(x) = \Omega + U \quad (17)$$

である。

図-4に示す継手付梁の外力仕事量と内部応力ひずみは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Omega = & -Q_1 v_1 - M_1 \theta_1 - T_1 \phi_1 - Q_2 v_2 - M_2 \theta_2 - T_2 \phi_2 \\ & - \int_0^l q^1 v_1 dx - \int_0^l q^2 v_2 dx \end{aligned} \quad (18)$$

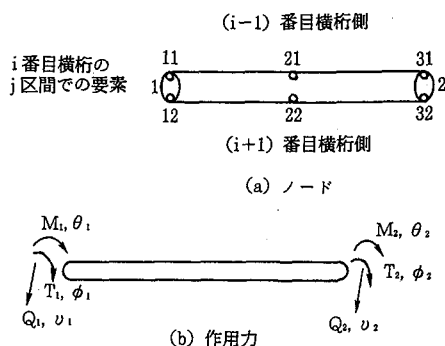


図-4 継手付梁

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (19)$$

鉛直変位 v , ねじり角 ϕ , 断面左側継手部の分布せん断力 q , 断面左側継手部の分布せん断力 $\dot{q}$ は節点での設定値を使って, 多項式の補間関数で次のように近似することにする。

$$v = (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)v_1 - l\xi(\xi - 1)^2\theta_1 + (-2\xi^3 + 3\xi^2)v_2 - l\xi(\xi^2 - \xi)\theta_2 \quad (20)$$

$$\phi = (1 - \xi)\phi_1 + \xi\phi_2 \quad (21)$$

$$q^1 = (2\xi^2 - 3\xi + 1)q_{11} + (-4\xi^2 + 4\xi)q_{21} + (2\xi^2 - \xi)q_{31} \quad (22)$$

$$q^2 = (2\xi^2 - 3\xi + 1)q_{12} + (-4\xi^2 + 4\xi)q_{22} + (2\xi^2 - \xi)q_{32} \quad (23)$$

ここに, $Q_1, v_1, M_1, \theta_1, T_1, \phi_1$ は要素始点でのせん断力, 鉛直変位, 曲げモーメント力, たわみ角, ねじりモーメント力, ねじり角で, $Q_2, v_2, M_2, \theta_2, T_2, \phi_2$ は要素終点でのせん断力, 鉛直変位, 曲げモーメント力, たわみ角, ねじりモーメント力, ねじり角である。 v_j^1 は $v + r\phi$ で断面左側の継手部の鉛直変位である。 v_j^2 は $v - r\phi$ で断面右側の継手部の鉛直変位である。 l は要素の長さで, ξ は x/l である。 $q_{11}, q_{21}, q_{31}, q_{12}, q_{22}, q_{32}$ は図-4 (a) 節点の 11, 21, 31, 12, 22, 32 での継手分布せん断力の値である。

エネルギー最小の原理より, 式(18)~(23)を式(17)に代入することによって, 全ポテンシャルエネルギー $\pi(x)$ を変位 $v_1, \theta_1, \phi_1, v_2, \theta_2, \phi_2$ で表わし偏微分すると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11L/60 & L/3 & -L/60 & 11L/60 \\ -L^2/60 & -L^2/15 & 0 & -L^2/60 \\ -rL/6 & -rL/3 & 0 & rL/6 \\ L/60 & -L/3 & -11L/60 & L/60 \\ 0 & L^2/15 & L^2/60 & 0 \\ 0 & rL/3 & rL/6 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{J11} \\ q_{J21} \\ q_{J31} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -L/3 & -11L/60 \\ L^2/15 & L^2/60 \\ -rL/3 & -rL/6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{J12} \\ q_{J22} \\ q_{J32} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 0 \\ 0 & 0 & GJ/L \\ -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 0 \\ 0 & 0 & -2GJ/L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 \\ 0 & 0 & -2GJ/L \\ 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 \\ 0 & 0 & GJ/L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

(24)

主桁は各横桁との結合点で要素分割した複数要素の梁の結合体として表現でき, その梁は継手がなく従来の梁表現で表わせる。

次に, 主桁要素式と横桁要素式と境界条件(3)~(6)を使って未知数を求める。

3. 板組構造の解析

板曲げは単に3次元ソリッドの特殊な形式の一つである。3次元ソリッドには少なくとも弾性問題の場合はなんら理論的問題はない。しかしながら構造物の厚さ(今後 t と記述する)が他の長さに比較して極めて小さい, つまり薄い場合, 完全に3次元的に取り扱おうと, 単に計算コストがかかるだけでなく, 問題そのものが解きにくくなり, 解の精度も低下する。そういった薄い板構造物に対しては, 数値解法が可能とならずと以前より, 解を容易に得るための様々な古典的仮定が取り入れられてきた⁸⁾。

地下立体交差のボックス・カルバートには4枚平板を組み合わせた形状(図-2参照)となっているものが多い。外力としては, 列車・軌道荷重更には上載土荷重がボックス・カルバート上面から作用し, 土圧が横面から作用する。このため, ボックス・カルバートの荷重分配は横荷重と鉛直荷重が働く総合作用下の板曲げとなる。

ボックス・カルバートの板組構造での応力分配作用を得るための構造モデルとしては,

- ① 断面を骨組ラーメン構造とし, 軸長方向は1本充実梁とする。
- ② Kirchhoff あるいは Mindlin 板曲げ式を使って表現する。
- ③ 3次元ソリッドによる。

3.1 2次元モデルの骨組マトリックス法

現在の道路土工 カルバート指針(日本道路協会), 設計の手引き ボックスカルバート(鉄道総合技術研究

所)では①が使われている。①の構造モデルの場合、施工時にボックス・カルバートを水平方向に押し込む時の軸長方向などに生じる内部応力の計算が含まれないとか、ボックス・カルバートの軸長方向のたわみについて1本の断面充実梁から中空断面への写像をどのようにするのか、鉄道線路が地下立体交差構造物上を斜めに交差するときの列車荷重をどのように評価するのか、中間柱は剛性の小さい部材とするのか、ねじりは無視する、などの問題点を含んでいる。利点としては演算量が小さく、電算プログラミングが容易である。

3. 2 薄板の曲げ式を使った有限要素法

②の構造モデルは有限要素法で取り扱うことができる。Kirchhoff, Mindlin の板曲げ式では、板の上側表面と下側表面から等距離の中央面において、鉛直変位 w はあるが水平方向変位 u と v を板端部で零と近似する。水平方向の変位 u と v については引張りと圧縮（座屈現象⁹⁾は取り扱わない）の平面応力問題として考え、板曲げと板引張り圧縮を独立現象として重ねあわせ剛性マトリックスを構成する¹⁰⁾。また、「板変形前の中央面に対する法線は、変形後も直線で中央面に対し垂直である、あるいは変形後も直線で一定の角度をとる」という仮定は地下立体交差構造のボックス・カルバートのような厚板には該当しない。長方形板の曲げでは拘束しないと端部での水平方向変位 u と v は零と限らないのが実際の板組構造挙動であるが、ボックス・カルバートでの計算では、引張りまたは圧縮力分のみについて面と面の接続面が直線から曲線に変形することになる。

3. 3 3次元ソリッドでの有限要素法

③の構造モデルの場合、本文で取り上げた構造モデル①と構造モデル②と比較するならば、3次元モデルであることから2次元モデルより多くの現象を表現することができ、前節で述べた板曲げ板曲げ基本式の論理矛盾を持ち込まず、ボックスカルバートの応力分配作用を求めることができる。このため、本文では③の構造モデルについて述べる。

3次元ソリッドなどによる構成式化は仮想仕事の原理から行うことができ、直接法などと呼ばれ、歴史的に有限要素法に最も初期から使われているものである。エネルギー最小の原理からも導くことができる¹¹⁾。

図-2に示す板組構造の3次元有限要素法解析を行うにあたり、入力データ作成作業などを軽減するため、新たにソフトウェアCULVERTを作成した。要素分割及び荷重載荷の状況を図-5に示す。3次元ソリッドの要素は8節点六面体アイソパラメトリック要素を使用した。構造体の幾何形状は、限定したものにして、分割数、1分割での長さをパラメータで入力するものとし、節点番号、座標値及び要素番号と節点番号の対応関係を電算プログラム内で自動計算するものにした。連立一次方程式の解法は Gauss の消去法で、図-5での要素数2,880、節点数3,960、自由度数11,880である。使用したパソコンはメモリ181MB、ディスク容量8GBで、計算時

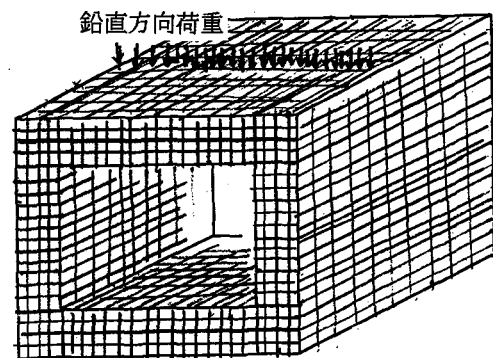


図-5 要素分割及び荷重載荷状況

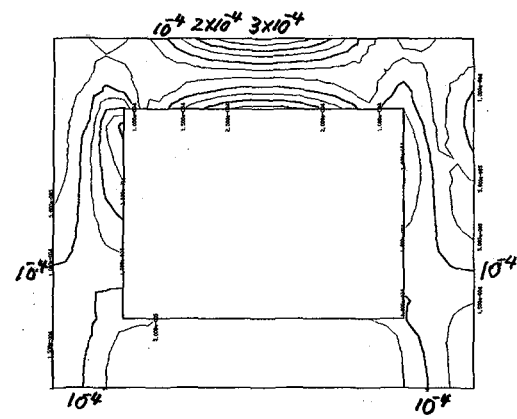


図-6 ひずみ成分 $y=0$

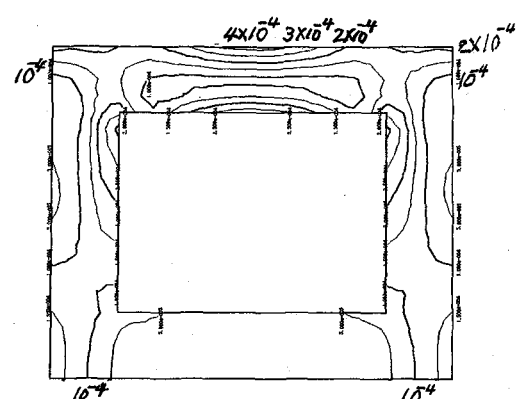


図-7 ひずみ成分 $y=125$

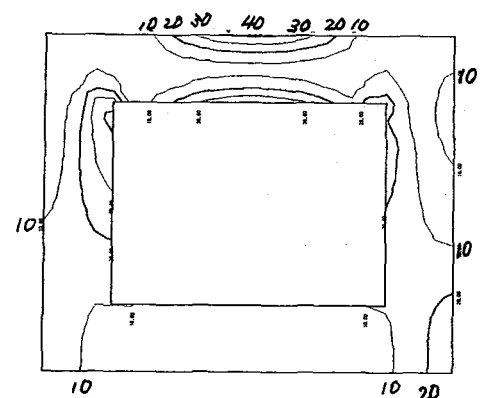


図-8 応力成分 $y=0$

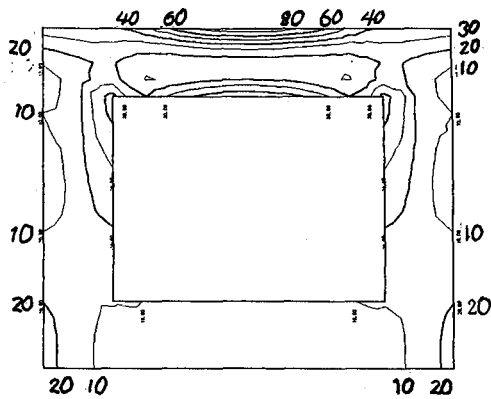


図-9 応力成分 $y=125$

間104分である。

材料は弾性係数 E を 140,000 に、ポアソン比を 0.3 とし、等方性であるとした。荷重は奥行き中央面 $y=125$ (図-5 参照) の上表面と交わる線分上に分布荷重に相当するものを載荷した。拘束は下側表面において鉛直変位 w を零とし、下側表面のほぼ真中にある節点において水平方向変位 u と v を零とした。

図-5 に示す板組構造では、奥行き方向 y 軸に 10 分割しているが、 $y=0$ の面におけるひずみ成分の等高線図を図-6 に、中央面となる $y=125$ の面におけるひずみ成分の等高線図を図-7 に示す。 $y=0$ の面における応力成分の等高線図を図-8 に、中央面となる $y=125$ の面における応力成分の等高線図を図-9 に示す。図-6 と図-7 のひずみ成分とは各ひずみ 3 成分の 2 乗和を平方したスカラーに相当するもので、図-8 と図-9 の応力成分とは各応力 3 成分の 2 乗和を平方したスカラーに相当するものである。

図-6、図-7、図-8 及び図-9 に示されるように、奥行き方向の要素分割面となる各構造物断面 (両端面を含めると 11 面) での計算値から、ひずみ成分と応力成分の両方において減衰は大きくなく奥行き方向に広がることがわかった。また、ひずみ成分の広がり比べると、応力成分は広がりが悪く、奥行き方向端面と奥行き方向中央面との差異が大きくなることがわかった。

3.4 剛性マトリックス演算での数値積分

六面体アイソパラメトリック立体要素では要素内の数値積分点における応力値を算出するのが通例である。しかし、最大発生応力は要素内部とは限らず要素境界で生じることもある。このため、要素境界に含まれる節点についてその応力値を求める手順を示すこととし、同時にその応力値に影響を与える数値積分点パラメータを考察する。解析領域の全体座標系を (x, y, z) とし、要素領域の局所座標系を (ξ, η, ζ) とする。そして、8 節点六面体アイソパラメトリック立体要素の形状関数 N_i を次式のものとする¹²⁾。

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (25)$$

剛性マトリックス $[k]$ は、次式で表現される¹¹⁾。

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det([J]) d\xi d\eta d\zeta \quad (26)$$

ここに、 $[B]$ はひずみと変位を関係づけるひずみ形状マトリックスで、 $[D]$ は応力と変位を関係づける弾性マトリックスで、 $[J]$ はヤコビアン・マトリックスである。

有限要素法での 2 次元、3 次元の高次要素の場合、その剛性マトリックスの被積分関数は (普通は) 多項式なので数式的に積分することも不可能ではないが、数式的に積分するには手間がかかるので数値積分を用いることが多い¹³⁾。作成したソフトウェアにおいても Gauss 求積法による数値計算を採用した。

形状関数を式(25)とする 8 節点六面体アイソパラメトリック立体要素は、各節点 i の値として x 方向変位、 y 方向変位、 z 軸方向変位の u_i, v_i, w_i を設定した適合要素であるため、 u_i, v_i, w_i は要素と要素との境界面で連続である (しかし、滑らかではない) が要素と要素との境界面での応力及びひずみが同じ値を示すものではない。同じ節点であっても所属要素が違えば応力についても、ひずみについても、値は異なる。要素内部点の応力及びひずみは、その内部点の座標値を代入してマトリックス $[B]$ と $[D]$ を計算して、すでに求められている各節点変位を使って $[B]$ 、 $[D]$ と演算することで求められる。そこで、図-6、図-7、図-8、図-9 の作成にあたって、節点での応力とひずみの値は、まず各要素内部に積分点を 8 点設定 (表-1 の $n=2$ のもので、 $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$, $\eta = \pm 1/\sqrt{3}$, $\zeta = \pm 1/\sqrt{3}$ とする) して剛性マトリックスを求め連立方程式を解いて各未知数 u_i, v_i, w_i を求める。次に、要素の各節点の局所座標値 (ξ_i, η_i, ζ_i) を与え ($\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$ とする) てマトリックス $[B]$ と $[D]$ を計算し且つ求められている未知数値 u_i, v_i, w_i を代入して各要素各節点の応力とひずみを求め、次に、同一節点における各要素の応力とひずみの値を加え平均して算出した。

数値積分を行って上記手順で各節点の応力及びひずみを求めた場合、8 節点六面体アイソパラメトリック立体要素での同一節点の値は各要素毎にどのくらいのばらつきになるのかについて、Gauss 積分点数をパラメータとして (表-1 参照) 計算を行った。

計算は立方体領域 (図-10 参照) について行い、要素分割数を $5^3 = 125$ とした。領域の x 方向、 y 方向、 z 方向寸法は全て 125.0 で要素 1 つの寸法は全て 25.0 である。荷重は鉛直荷重を全体領域の上側表面の中央に位置する要素の面の 4 節点 (座標は $x=62.5 \pm 12.5$, $y=62.5 \pm 12.5$, $z=125.0$) に鉛直荷重を載荷した。変位拘束は 2 ケースを取り扱った。1 つは、全体領域の下側表面の中央位置要素の 4 節点 (座標は $x=62.5 \pm 12.5$, $y=62.5 \pm 12.5$, $z=0.0$) について x 方向変位、 y 方向変位、 z 軸方向変位の $u=v=w=0$ とし、下側表面にある他の節点について z 軸方向変位の $w=0$ とした。他の 1 つは、 $x=75.0$, $y=50.0$, $z=0.0$ の 1 節点において

表-1 Gauss-Legendre の公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(\xi_i)$$

n	i	ξ_i	c_i
2	1	$-\sqrt{1/3}$	1
	2	$\sqrt{1/3}$	1
3	1	$-\sqrt{3/5}$	5/9
	2	0	8/9
	3	$\sqrt{3/5}$	5/9
4	1	-0.8611363116	0.3478548451
	2	-0.3399810436	0.6521451548
	3	0.3399810436	0.6521451548
	4	0.8611363116	0.3478548451
5	1	-0.9061798459	0.2369268851
	2	-0.5384693101	0.4786286704
	3	0	0.5688888889
	4	0.5384693101	0.4786286704
	5	0.9061798459	0.2369268851

偏差を表-2に示す。

上段は応力成分値で、下段は応力成分標準偏差である。表-2から、計算結果によれば、Gauss 積分点nのパラメータについては、1節点で3方向拘束している場合にn=2とn=3とにおいて4%の差異があるが、n=3、n=4、n=5の間の差異が小さい。

パラメータnの違いによる差異に比べると、応力成分値が約3.5で応力成分標準偏差が約0.9であるから、節点Aを含んでいる8個の要素における応力成分値の違いは大きなものであることがわかった。

したがって、有限要素法の要素の形状関数は多項式で構成されるのが常となっているが、8節点六面体アイソパラメトリック立体要素の力学の弾性解析についても、直接求める変位のu、v、wの表現には充分有効な補間関数表現となっているが、変位を加工して求める応力σに関しては要素と要素の境界面で有意な食い違いがあるものとなっている。

4. まとめ

地下立体交差の梁組構造と板組構造における荷重分配解析について、軸長方向継手付梁組構造では2方向の梁組について積分境界方程式法の定式化を明らかにし、次に軸長方向継手付梁要素の有限要素法での定式化の表現を明らかにした。その次に、板組構造の計算法について3つの方法を紹介し、板組構造について1ボックス・カルバートを取り上げ、3次元有限要素法の荷重分配解析を行った。解析に用いた3次元ソリッドは8節点六面体アイソパラメトリック要素である。計算で取り扱ったものでは軸長方向に荷重の広がりが見られ、ひずみ成分と応力成分との比較でひずみ成分のほうが広がりが見られることがわかった。また、8節点六面体アイソパラメトリック要素について、Gauss 積分の積分点数をパラメータとして、節点での応力を求めた場合、各要素毎にどのくらいのばらつきになるのかについて考察を行った。

付録：梁組構造での計算値と実測値の比較

図-11の梁組構造での第2章掲載式計算値と実測値とを示す。

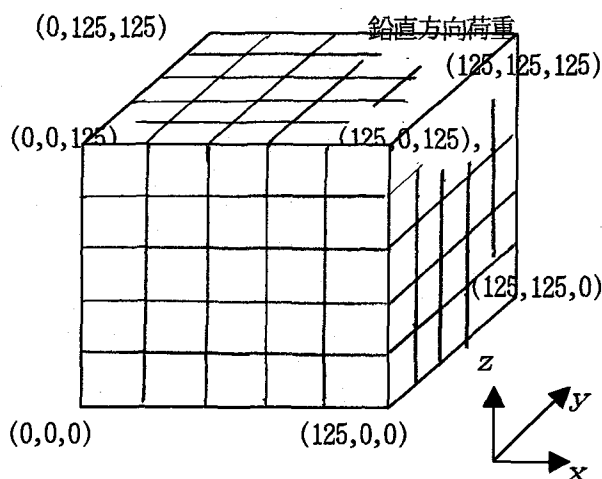
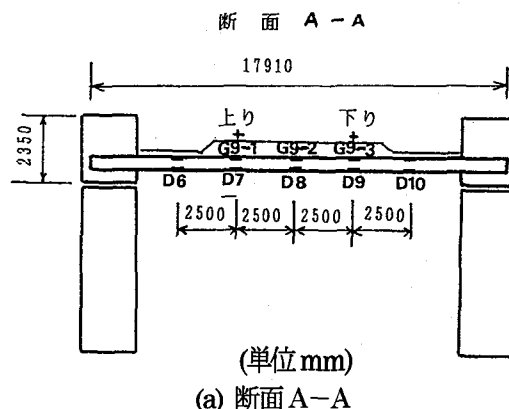


図-10 領域と要素分割

$u=v=w=0$ とし、全体領域の下側表面の残りの節点において $w=0$ とした。

全体領域の中心付近に位置する節点A (50,50,50) についての各ケースにおける応力成分値及び応力成分標準

表-2 応力成分値と応力成分標準偏差

表-1の n	4節点で3方向拘束している場合	1節点で3方向拘束している場合
2	3.517337 0.925243	3.517349 0.925245
3	3.517334 0.925244	3.502856 0.908795
4	3.517347 0.925246	3.502867 0.908797
5	3.517349 0.925245	3.502869 0.908796

单位mm

	実測値	計算値		実測値	計算値
D 1	0.59	0.385	D 1 1	0.87	1.016
D 2	0.87	0.777	D 1 2	1.20	1.337
D 3	0.79	0.896	D 1 3	1.23	1.264
D 4	0.56	0.719	D 1 4	0.91	0.971
D 5	0.31	0.365	D 1 5	0.60	0.604
D 6	0.95	0.994	D 1 6	0.17	0.175
D 7	1.31	1.317	D 1 7	0.25	0.256
D 8	1.18	1.286	D 1 8	0.16	0.175
D 9	0.90	1.011	D 1 9	0.60	0.562
D 1 0	0.56	0.608			

單位 kgf/cm^2

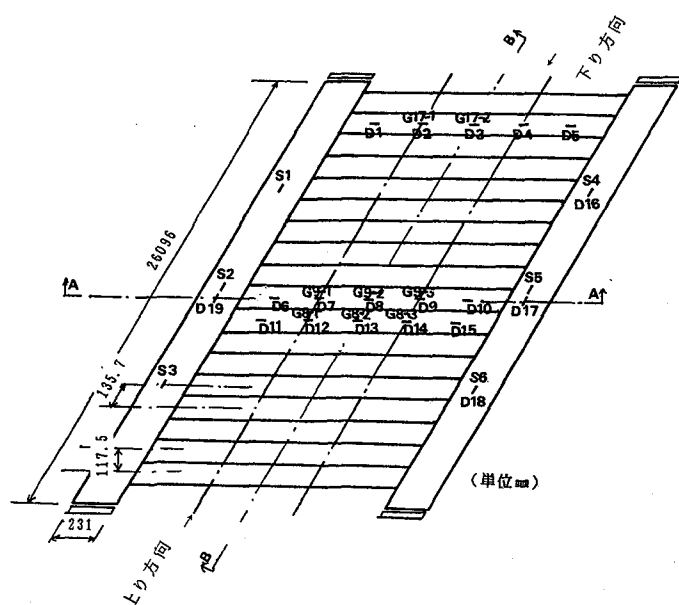
	実測値	計算値		実測値	計算値
S 1	20.4	18.1	S 4	8.9	8.4
S 2	30.1	24.2	S 5	13.7	10.9
S 3	17.7	17.9	S 6	8.3	8.2

單位 kgf/cm²

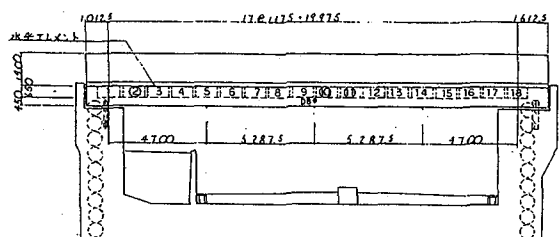
	実測値	計算値		実測値	計算値
G8-1 上	-22	-41.0	G9-2 上	-30	-24.7
G8-1 下	32	48.0	G9-2 下	26	24.7
G8-2 上	-24	-23.4	G9-3 下	12	19.9
G8-3 上	-10	-13.7	G17-1 上	-34	-52.4
G8-3 下	14	13.7	G17-1 下	26	52.4
G9-1 上	-24	-55.6	G17-2 上	-24	-35.8
G9-1 下	34	55.6	G17-2 下	16	35.8

参考文献

- 1) 山川純雄, 後藤芳顕: 水平鋼管矢板構造の継手による荷重分配作用の解析, 土木学会論文報告集 第301号, pp.1~12, 1980年9月.
- 2) 後藤芳顕, 松村暢久, 近藤邦明, 高瀬幸紀: 水平鋼管矢板斜角構造の継手による荷重分配作用の解析, 構造工学論文集 Vol.33A, pp.229~240, 1987年2月.
- 3) 山下彰彦: 境界積分法による線路下横断構造物の荷重分配解析 鉄道総研報告 第3巻第9号, pp.61~66. 1989年9月.
- 4) 山下彰彦: 継手梁を含む梁組構造の荷重分配と解析方法 鉄道総研報告 第9号第4号, pp.25~30, 1995年4月.
- 5) 小松定夫, 長井正嗣, 坂本保彦: 境界要素法による薄肉構造解析に関する研究, 土木学会論文報告集 第333号, pp.47~58, 1983年5月
- 6) 田中正隆, 宮崎謙一: 平板の弾性曲げ解析に対する直接法 BEM についての一考察, 日本機械学会論文集 (A編) 51 巻466号, pp.1636~1641, 1985年5月.
- 7) 山下彰彦, 小山幸則, 喜田浩, 菊池保孝: 下路桁式地中構造物の荷重分配作用の実測, 構造工学論文集 Vol.38A, pp.1385~1395. 1992年2月.



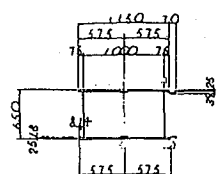
(b) 平面图



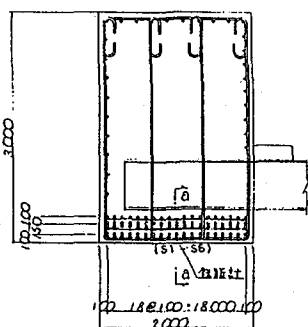
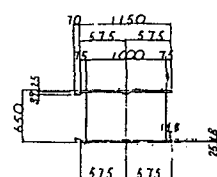
(单位 mm)

(c) 断面 B-B

エレメント NO.2 (D型エレメント)



エレメント NO.10.11 (8型エレメント)



(单位 mm)

(単位 mm) (e) 主桁鉄筋計位置図

(d) 水平エレメント詳細図

記号 D1,D2,...,D19 は鉛直変位測定で、記号 S1,S2,...,S6 は主桁鉄筋ひずみ測定で、記号 G8-1,G8-2,...,G17-2 は横桁鋼板ひずみ測定箇所を示している。

图-11 梁組構造図

- 8) O.C.Zienkiewics and R.L.Taylor : The Finite Element Method 4th Edition, McGraw-Hill, Vol.2, pp.1~3. 1987.
(矢川元基訳者代表:マトリックス有限要素法 II, 科学技術出版, pp.1~3, 1996年9月.)
- 9) S.Timoshenko and Woinowsky-Krieger : Theory of Plate and shells, McGraw-Hill, pp.378~395. 1959. (長谷川節訳:板とシェルの理論<下>, プレイン図書, pp.356~372, 1973年7月.)
- 10) アブドウ バセム, 日野伸一, 太田俊昭, 勝野壽男: G F E R補強材を用いたR C床版鋼桁橋の補強に関する基礎的研究, 構造工学論文集 Vol.45kgf/A, pp.1137~1144, 1999年3月.
- 11) E.Hinton and D.R.J.Owen : Finite Eleent Programing, Academic Press Inc.1977. (川井忠彦監訳:有限要素法プログラミング, 丸善, pp.6~17, 1979.)
- 12) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 川井忠彦:有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, pp.145~150, pp.356~358, 1981年9月.
- 13) O.C.Zienkiewics and R.L.Taylor : The Finite Element Method 4th Edition, McGraw-Hill, Vol.1, pp.163. 1987.
(矢川元基訳者代表:マトリックス有限要素法 I, 科学技術出版, pp.162, 1996年9月.)

(1999年9月17日受付)