

水槽の側壁影響を考慮した円筒浮体の波浪応答解析と実験

WAVE RESPONSE ANALYSIS AND EXPERIMENT OF A TRUNCATED FLOATING CYLINDER IN A CHANNEL

渡邊英一*・宇都宮智昭**・清水大吾***・小林 茂****・松永昭吾†
 Eiichi WATANABE, Tomoaki UTSUNOMIYA, Daigo SHIMIZU, Shigeru KOBAYASHI and
 Shogo MATSUNAGA

*正会員 Ph.D, 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

***学生会員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

****正会員 株式会社建設技術研究所 大阪支社道路本部技術第2部 (〒 540-0008 大阪市中央区大手前 1-2-15)

†正会員 株式会社建設技術研究所 大阪支社道路本部技術第2部 (〒 540-0008 大阪市中央区大手前 1-2-15)

This paper examines wave response of a truncated floating cylinder placed on the centerline of a channel. The multipole expansion method is employed to solve the diffraction/radiation problems of the velocity potentials for water waves. The method can satisfy exactly the boundary conditions on the channel walls, and the convergence of the infinite series in terms of the Fourier mode is excellent. In order to validate the present method, the heave and the pitch responses of a truncated cylinder in a channel have been obtained experimentally and compared with the analytical results.

Key Words: wave response, channel, cylinder, multipole expansion, floating bridge

キーワード: 波浪応答、水槽、円筒、多重極展開法、浮体橋梁

1. はじめに

円筒浮体形状は、浮体式海洋構造物の基本浮体要素としてしばしば用いられ、これに作用する波力、波浪応答特性についても古くから研究されてきた^{1),2),3)}。円筒形状という特徴を生かし、上記研究においてはいずれも円筒中心軸上に原点をとった円筒座標系を設定した上で、速度ポテンシャルに関する境界値問題を固有関数展開法により解き、準解析解 (semi-analytic solution) を得ている。これらはいずれも無限海域中に単独の円筒浮体が存在する場合を扱っているが、現実の構造物においては、複数浮体間の流体力学的相互干渉を考慮する必要があったり^{4),5),6)}、あるいは、水槽内で実験がおこなわれる場合には、水槽側壁の影響が問題になる場合がある^{7),8),9),10)}。

本研究では、円筒浮体を基本浮体要素とするような浮体橋梁の波浪応答解析への応用を念頭におきながら、水槽内の中心軸上に単独の円筒浮体が設置された場合について、円筒浮体の Heave 及び Pitch 応答についての解析ならびに実験をおこない、両結果を比較・検討した。水波速度ポテンシャルの解析においては、水槽側壁における境界条件を厳密に満足することのできる多重極展開法⁸⁾を用いたが、文献⁸⁾においては、Surge、Sway、Heave の並進運動モードに対する定式化しか示されていないため、回転運動モードに対しての拡張を本論文ではおこなっている。

なお、ここで解析・実験したモデルは、水槽幅と同一の間隔で多数の円筒浮体要素が一直線上に配置されたものに、その軸と直交する方向から単一方向波が入射

する問題と等価であり、このような条件下における浮体間の流体力学的相互干渉効果が考慮された解析・実験とみなすこともできる。従って、以下の検討は、浮体橋梁の基礎としての円筒浮体の実験を水槽内で実施する際における側壁影響に関する基礎資料を提供するとともに、浮体基礎が一直線上に等間隔に配置されるような浮体基礎橋梁について、これに橋軸直交方向から単一方向波が入射する場合の流体力学的相互干渉効果を厳密に考慮した解析・実験を提供するものとなる。

2. 解析方法

2.1 境界値問題の定式化

図-1に、座標系ならびに円筒浮体の配置状況を示す。座標系は、 xy 平面を平均自由水面に一致させ、鉛直上向きに z 軸をとる。水槽は、一定水深 H で、 x 軸方向に無限長を有する鉛直な側壁が $y = d$ 及び $y = -d$ 上に存在するものとする。この水槽内に、半径 a 、喫水 D の円筒形浮体を、その中心軸が z 軸に一致するように配置する。座標系として、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ なる円筒座標系をあわせて設定する。また、入射波は x 軸の負の方向から入射するものとする。

流体を、非粘性、非圧縮性の完全流体とし、また流体運動を渦無しと仮定し、流体運動を速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z; t)$ によりあらわす。また全ての時間依存運動を角周波数 ω の調和振動として扱うことで、

$$\Phi(x, y, z; t) = \Re\{\phi(x, y, z)e^{-i\omega t}\} \quad (1)$$

とおける。ただし、 t は時間、 i は虚数単位である。さらに、浮体運動・流体運動いずれも微小と仮定することで

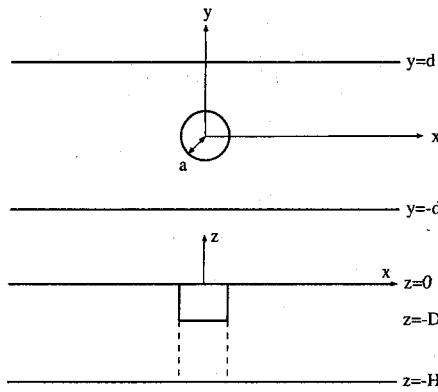


図-1 問題の設定と座標系

線形理論が適用でき、複素速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ に関する境界値問題が以下のように設定される。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in the fluid} \quad (2)$$

$$\partial \phi / \partial z = K \phi \quad \text{on } z = 0 \quad (3)$$

$$\partial \phi / \partial z = 0 \quad \text{on } z = -H \quad (4)$$

$$\partial \phi / \partial y = 0 \quad \text{on } |y| = d \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \sum_{i=1,3,5} U_i n_i \quad \text{on the body surface} \quad (6)$$

ただし、 $K = \omega^2/g$ 、 g ：重力加速度、である。また、 $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3)$ は、物体表面における外向き（物体から流体に向かう方向）法線ベクトルであり、 $(n_4, n_5, n_6) = \mathbf{r} \times \mathbf{n}$ は回転運動モードに対する一般化方向余弦（原点を回転中心とする各モード毎の単位回転運動に対する、物体表面 $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ の変位の外向き法線方向成分）をあらわす。また、 U_i は、各モード運動の運動（角）速度である。

本研究では、物体表面上における境界条件 (6) に示したとおり、浮体運動としては、Surge ($i = 1$; x 軸方向の並進運動)、Heave ($i = 3$; z 軸方向の並進運動)、Pitch ($i = 5$; y 軸回りの回転運動) の xz 平面に関して対称な流体運動となる 3 剛体運動モードのみを扱う。この時、 $y = 0$ 上で次の境界条件

$$\partial \phi / \partial y = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad (7)$$

を指定することで、流体領域として $y \geq 0$ のみを考えれば十分となる。

式 (2)~(7) であらわされる境界値問題を解くにあたり、ポテンシャル ϕ を次のようにおく。

$$\phi = \phi_D + \sum_{i=1,3,5} U_i \phi_i \quad (8)$$

ここで、 ϕ_D は回折波ポテンシャル、 ϕ_i ($i = 1, 3, 5$) は各単位速度モード運動に対する放射波ポテンシャルである。

式 (8) を式 (6) に代入することで、次の境界条件式が得られる。

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_i = n_i, \quad i = 1, 3, 5 \quad \text{on the body surface} \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_D = 0 \quad \text{on the body surface} \quad (10)$$

さらに、式 (2)~(5) および (7) が、 ϕ_i ($i = 1, 3, 5, D$) に対してそれぞれ成り立つ。

放射条件 (radiation condition) は、文献^{(11), (12)} を参照して、

$$\phi_i \sim -\frac{ig \cosh k(z+H)}{\omega \cosh kH} \sum_{p=0}^{j_s} A_{ip}^{\pm} \cos\left(\frac{p\pi y}{d}\right) e^{ik|x|t_p} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty; i = 1, 3, 5 \quad (11)$$

$$\phi_D \sim -\frac{igA \cosh k(z+H)}{\omega \cosh kH} \left\{ \sum_{p=0}^{j_s} R_p \cos\left(\frac{p\pi y}{d}\right) e^{-ikxt_p} + e^{ikx} \right\} \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (12)$$

$$\phi_D \sim -\frac{igA \cosh k(z+H)}{\omega \cosh kH} \sum_{p=0}^{j_s} T_p \cos\left(\frac{p\pi y}{d}\right) e^{ikxt_p} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (13)$$

とあらわすことができる。ここで、 A は入射波の振幅、 k は進行波の波数、 $A_{ip}^{\pm}$ は単位速度モード運動に対する放射波の振幅、 R_p 、 T_p は反射率ならびに透過率をあらわす。また、

$$t_p = (1 - (p\pi/kd)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad p = 0, 1, \dots, j_s \quad (14)$$

$$j_s \pi < kd < (j_s + 1)\pi \quad (15)$$

である。

以上で定義された境界値問題は、文献⁽⁸⁾において回折波問題 ($i = D$) ならびに並進運動モードに対する放射波問題 ($i = 1, 2, 3$) に対して、多重極展開法により解かれているが、回転運動モード (ここでは $i = 5$) に対する定式化は示されていない。そこで、Pitch モードに対する定式化を本研究では新たにおこなったが、これを含めて統一的な形で定式化を示すため、Heave、Surge、Pitch モード運動に対する放射波問題の定式化・解法を以下に示す。

2.2 放射波問題に対する一般解

流体領域を物体下部の内部領域 (領域 I: $r \leq a, -H < z < -D$) と外部領域 (領域 II: $r > a, -H < z \leq 0$) とに分け、それぞれの領域での速度ポテンシャル ϕ_i^I 、 ϕ_i^{II} ($i = 1, 3, 5$) の一般解をまず求める。

領域 I において式 (2)、(4)、(7) および (9) を満たす速度ポテンシャル ϕ_i^I ($i = 1, 3, 5$) は次式のようにかける。

$$\phi_i^I(r, \theta, z) = \mathcal{P}_i + a \sum_{m=0}^{\infty} g_m(z) \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{q,m}^i \mathcal{I}_{q,m}(r) \cos q\theta \right\} \quad (16)$$

ここで、

$$g_m(z) = \epsilon_m^{\frac{1}{2}} \cos \lambda_m(z + D) \quad (17)$$

$$\lambda_m = m\pi/L \quad (18)$$

$$I_{q,m}(r) = \begin{cases} (r/a)^q & m = 0 \\ I_q(\lambda_m r) & m \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

であり、 $g_m(z)$ は次式で表される直交関係を満たす。

$$\frac{1}{L} \int_{-H}^{-D} g_m(z) g_n(z) dz = \delta_{mn} \quad (20)$$

ただし、 $L \equiv H - D$ 、また、 $\epsilon_0 = 1$ 、 $\epsilon_m = 2$ ($m \geq 1$) である。

また、 P_i は、 $z = -D$ での境界条件 (9) を満たす非斉次解であり、

$$P_1 = P_1(r, z) = 0 \quad (21)$$

$$P_3 = P_3(r, z) = \frac{1}{2L} \left\{ \frac{1}{2} r^2 - (z + H)^2 \right\} \quad (22)$$

$$P_5 = P_5(r, z) \cos \theta = -\frac{1}{2L} \left\{ (z + H)^2 r - \frac{r^3}{4} \right\} \cos \theta \quad (23)$$

となる。

次に、式 (2)~(5) 及び (7) を満たす ϕ_i^{II} ($i = 1, 3, 5$) は文献⁸⁾を参照して、最終的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_i^{II}(r, \theta, z) = & a \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [\mathcal{H}_{q,m}(r) \delta_{qp} \\ & + E_s\{q, p; m\} \mathcal{J}_{q,m}(r)] \alpha_{p,m}^i \cos q\theta \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、

$$f_m(z) = M_m^{-\frac{1}{2}} \cos k_m(z + H) \quad (25)$$

$$M_m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2k_m H}{2k_m H} \right) \quad (26)$$

$$k_m \tan k_m H + K = 0 \quad (27)$$

$$\mathcal{H}_{q,m}(r) = \begin{cases} H_q(kr) & m = 0 \\ K_q(k_m r) & m \geq 1 \end{cases} \quad (28)$$

$$\mathcal{J}_{q,m}(r) = \begin{cases} J_q(kr) & m = 0 \\ I_q(k_m r) & m \geq 1 \end{cases} \quad (29)$$

また、 k_m ($m \geq 1$) は正の実数であり、 $k_0 = ik$ となる。 $E_s\{q, p; m\}$ の具体的表現、計算方法については、付録 I に示す。なお、

$$E_s\{2q + 1, 2p; m\} = E_s\{2q, 2p + 1; m\} = 0 \quad (30)$$

である。また、 $f_m(z)$ は次の直交関係式を満たす。

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^0 f_m(z) f_n(z) dz = \delta_{mn} \quad (31)$$

領域 I、II の一般解に含まれる未定係数は、 $r = a$ における次の圧力の連続条件ならびに速度に関する連続・境界条件を適用することで決定される。

$$\phi_i^I(a, \theta, z) = \phi_i^{II}(a, \theta, z) \quad -H < z < -D \quad (32)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{II}(a, \theta, z)}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \phi_i^I(a, \theta, z)}{\partial r} & -H < z < -D \\ n_i & -D < z < 0 \end{cases} \quad (33)$$

2.3 Heave モードに対する解⁸⁾

Heave モード ($i = 3$) に対するポテンシャルは yz 平面に関して対称となるから、式 (16) および (24) において $\cos 2q\theta$ の項のみをとればよい。圧力の連続条件式 (32) に、 $(1/L) \int_{-H}^{-D} \dots g_n(z) dz$ を適用し、さらに三角関数の直交性を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \beta_{2q,n}^3 \mathcal{I}_{2q,n}(a) = & \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \sum_{p=0}^{\infty} [\mathcal{H}_{2q,m}(a) \delta_{qp} \\ & + E_s\{2q, 2p; m\} \mathcal{J}_{2q,m}(a)] \alpha_{2p,m}^3 \\ & - \frac{\delta_{q0}}{aL} \int_{-H}^{-D} P_3(a, z) g_n(z) dz \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、

$$\begin{aligned} C_{mn} = & \frac{1}{L} \int_{-H}^{-D} f_m(z) g_n(z) dz \\ = & \left(\frac{\epsilon_n}{M_m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k_m \sin k_m L}{L(k_m^2 - \lambda_n^2)} \end{aligned} \quad (35)$$

次に、速度の連続・境界条件式 (33) に対して、 $(1/H) \int_{-H}^0 \dots f_n(z) dz$ を適用し、さらに三角関数の直交性を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} a [\mathcal{H}'_{2q,n}(a) \delta_{qp} + E_s\{2q, 2p; n\} \mathcal{J}'_{2q,n}(a)] \alpha_{2p,n}^3 \\ = \frac{aL}{H} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \mathcal{I}'_{2q,m}(a) \beta_{2q,m}^3 \\ + \frac{\delta_{q0}}{H} \int_{-H}^{-D} \frac{\partial P_3}{\partial r}(a, z) f_n(z) dz \end{aligned} \quad (36)$$

式 (34)、(36) より、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} a [\mathcal{H}'_{2q,n}(a) \delta_{qp} + E_s\{2q, 2p; n\} \mathcal{J}'_{2q,n}(a)] \alpha_{2p,n}^3 \\ - \sum_{r=0}^{\infty} D_{nr,2q} \sum_{p=0}^{\infty} [\mathcal{H}_{2q,r}(a) \delta_{qp} + E_s\{2q, 2p; r\} \\ \cdot \mathcal{J}_{2q,r}(a)] \alpha_{2p,r}^3 = \frac{\delta_{q0}}{H} \int_{-H}^{-D} \frac{\partial P_3}{\partial r}(a, z) f_n(z) dz \\ - \frac{\delta_{q0}}{H} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \frac{\mathcal{I}'_{0,m}(a)}{\mathcal{I}_{0,m}(a)} \int_{-H}^{-D} P_3(a, z) g_m(z) dz \end{aligned} \quad (37)$$

ただし、

$$D_{nr,q} = \frac{aL}{H} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} C_{rm} \frac{\mathcal{I}'_{q,m}(a)}{\mathcal{I}_{q,m}(a)} \quad (38)$$

である。

式 (37)、(34) より、全ての未定係数 $\alpha_{2p,n}^3$ 、 $\beta_{2p,n}^3$ が定まり、速度ポテンシャル ϕ_3 が求まったことになる。

付加質量係数 a_{33} 及び造波減衰力係数 b_{33} は、速度ポテンシャルを用いて以下の式より計算される。ただし、それぞれ、 $\rho\pi a^2 H$ ならびに $\rho\pi a^2 H\omega$ で無次元化し、 μ_{33} 及び ν_{33} であらわす。ここで、 ρ は流体密度である。

$$\begin{aligned}\mu_{33} + i\nu_{33} &= \frac{a_{33} + ib_{33}/\omega}{\rho\pi a^2 H} = -\frac{1}{\pi a^2 H} \int_{S_B} \phi_3 n_3 dS \\ &= \frac{2}{a^2 H} \left\{ \int_0^a r P_3(r, -D) dr \right. \\ &\quad \left. + a \sum_{m=0}^{\infty} g_m(-D) \beta_{0,m}^3 \int_0^a r I_{0,m}(r) dr \right\}\end{aligned}\quad (39)$$

また、式 (11) における $A_{3p}^{\pm}$ は、文献⁸⁾の式 (3.20) より、

$$A_{3p}^{\pm} = \frac{ia \sinh kH}{\omega d M_0^{\frac{1}{2}}} \frac{\epsilon_p}{t_p} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n,0}^3 \cos[2n \arcsin t_p] \quad (40)$$

により求められる。

なお、以下の関係が一般的に成立する^{11),12)}。

$$F_i = -4d\rho g c_g A A_{i0}^+ \quad (41)$$

$$b_{ij} = 2\rho g d c_g \sum_{p=0}^{j_s} \epsilon_p^{-1} t_p (A_{ip}^+ \overline{A_{jp}^+} + A_{ip}^- \overline{A_{jp}^-}) \quad (42)$$

ここで、 F_i は強制波力、 b_{ij} は造波減衰係数、 $c_g = \omega k^{-1}(1 + 2kH/\sinh 2kH)/2$ は群速度である。式 (41) は一般化された Haskind 関係式であり、回折波問題を直接解いて得られる強制波力との比較により、解の検証をおこなうことができる。また、造波減衰についても式 (42) により同様なことが行える。

最終的に Heave 応答変位 ζ_3 が、

$$\begin{aligned}|\zeta_3|/A &= \frac{|F_3|/A}{|c_{33} - \omega^2(m + a_{33}) - i\omega b_{33}|} \\ &= \frac{|X_3|}{|1 - kH \tanh kH(D/H + \mu_{33} + i\nu_{33})|}\end{aligned}\quad (43)$$

と求められる。ただし、 $c_{33} = \rho g \pi a^2$ 、 $m = \rho \pi a^2 D$ 、 $X_3 = F_3/\rho g \pi a^2 A$ ：無次元化強制波力、である。

2.4 Surge, Pitch モードに対する解

Surge モード ($i = 1$) ならびに Pitch モード ($i = 5$) に対するポテンシャルは yz 平面に関して逆対称となるから、式 (16) および (24) において $\cos(2q+1)\theta$ の項のみをとればよい。Heave モードの時と同様な手順に

より、

$$\begin{aligned}\beta_{2q+1,n}^i \mathcal{I}_{2q+1,n}(a) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \sum_{p=0}^{\infty} [\mathcal{H}_{2q+1,m}(a) \delta_{qp} \\ &\quad + E_s\{2q+1, 2p+1; m\} \mathcal{J}_{2q+1,m}(a)] \alpha_{2p+1,m}^i \\ &\quad - \frac{\delta_{q0}}{aL} \int_{-H}^{-D} P_i(a, z) g_n(z) dz\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\infty} a[\mathcal{H}'_{2q+1,n}(a) \delta_{qp} + E_s\{2q+1, 2p+1; n\} \\ \cdot \mathcal{J}'_{2q+1,n}(a)] \alpha_{2p+1,n}^i \\ = \frac{aL}{H} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \mathcal{I}'_{2q+1,m}(a) \beta_{2q+1,m}^i \\ + \delta_{q0} \left\{ \frac{1}{H} \int_{-H}^{-D} \frac{\partial P_i}{\partial r}(a, z) f_n(z) dz + \mathcal{F}_{in} \right\}\end{aligned}\quad (45)$$

ただし、

$$\mathcal{F}_{1n} = \frac{1}{H} \int_{-D}^0 f_n(z) dz \quad (46)$$

$$\mathcal{F}_{5n} = \frac{1}{H} \int_{-D}^0 z f_n(z) dz \quad (47)$$

である。式 (44) と (45) より次式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\infty} a[\mathcal{H}'_{2q+1,n}(a) \delta_{qp} + E_s\{2q+1, 2p+1; n\} \\ \cdot \mathcal{J}'_{2q+1,n}(a)] \alpha_{2p+1,n}^i - \sum_{r=0}^{\infty} D_{nr, 2q+1} \sum_{p=0}^{\infty} [\mathcal{H}_{2q+1,r}(a) \delta_{qp} \\ + E_s\{2q+1, 2p+1; r\} \mathcal{J}_{2q+1,r}(a)] \alpha_{2p+1,r}^i \\ = -\frac{\delta_{q0}}{H} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \frac{\mathcal{I}'_{1,m}(a)}{\mathcal{I}_{1,m}(a)} \int_{-H}^{-D} P_i(a, z) g_m(z) dz \\ + \delta_{q0} \left\{ \frac{1}{H} \int_{-H}^{-D} \frac{\partial P_i}{\partial r}(a, z) f_n(z) dz + \mathcal{F}_{in} \right\}\end{aligned}\quad (48)$$

付加質量 (慣性モーメント) 係数、造波減衰力 (モーメント) 係数は無次元化量として、下式から求まる。

$$\begin{aligned}\mu_{11} + i\nu_{11} &= \frac{a_{11} + ib_{11}/\omega}{\rho\pi a^2 H} = -\frac{1}{\pi a^2 H} \int_{S_B} \phi_1 n_1 dS \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{1,m} [\mathcal{H}_{1,m}(a) \alpha_{1,m}^1 \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} E_s\{1, 2p+1; m\} \mathcal{J}_{1,m}(a) \alpha_{2p+1,m}^1]\end{aligned}\quad (49)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{15} + i\nu_{15} &= \frac{a_{15} + ib_{15}/\omega}{\rho\pi a^2 H^2} = -\frac{1}{\pi a^2 H^2} \int_{S_B} \phi_5 n_1 dS \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{1,m}}{H} [\mathcal{H}_{1,m}(a) \alpha_{1,m}^5] \\
&+ \sum_{p=0}^{\infty} E_s \{1, 2p+1; m\} \mathcal{J}_{1,m}(a) \alpha_{2p+1,m}^5]
\end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{51} + i\nu_{51} &= \frac{a_{51} + ib_{51}/\omega}{\rho\pi a^2 H^2} = -\frac{1}{\pi a^2 H^2} \int_{S_B} \phi_1 n_5 dS \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{5,m}}{H} [\mathcal{H}_{1,m}(a) \alpha_{1,m}^1] \\
&+ \sum_{p=0}^{\infty} E_s \{1, 2p+1; m\} \mathcal{J}_{1,m}(a) \alpha_{2p+1,m}^1] \\
&- \frac{1}{aH^2} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(-D) \beta_{1,m}^1 \int_0^a r^2 \mathcal{I}_{1,m}(r) dr
\end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{55} + i\nu_{55} &= \frac{a_{55} + ib_{55}/\omega}{\rho\pi a^2 H^3} = -\frac{1}{\pi a^2 H^3} \int_{S_B} \phi_5 n_5 dS \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{5,m}}{H^2} [\mathcal{H}_{1,m}(a) \alpha_{1,m}^5] \\
&+ \sum_{p=0}^{\infty} E_s \{1, 2p+1; m\} \mathcal{J}_{1,m}(a) \alpha_{2p+1,m}^5] \\
&- \frac{1}{aH^3} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(-D) \beta_{1,m}^5 \int_0^a r^2 \mathcal{I}_{1,m}(r) dr
\end{aligned} \quad (52)$$

なお、文献^{11),12)}より、 $\mu_{15} = \mu_{51}$ 、 $\nu_{15} = \nu_{51}$ が理論的に成立する。

また、 $A_{ip}^{\pm}$ ($i = 1, 5$) は、文献⁸⁾の式 (3.20) より、

$$A_{ip}^{\pm} = \pm \frac{a \sinh kH}{\omega d M_0^{\frac{1}{2}}} \frac{\epsilon_p}{t_p} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1,0}^i \sin[2n \arcsin t_p] \quad (53)$$

により求められ、強制波力 F_1 、ならびにモーメント F_5 を式 (41) から、また造波減衰力係数 b_{ij} を式 (42) からも得ることができる。

3. 実験方法

実験の概要を図-2 に、想定実機ならびに実験モデル (想定実機の 1/125 モデル) の諸元を、無次元化パラメータとともに表-1 に示す。

実験モデルを $z = z_C$ の位置で水平移動ならびに x 軸および z 軸回りの回転運動を拘束し、浮体運動として、Heave 運動 ζ_3 および $z = z_C$ まわりの Pitch 運動 ζ_5 の 2 自由度運動のみを許容した。このうち、Heave 運動については自由浮体としての運動を生ずるよう非拘

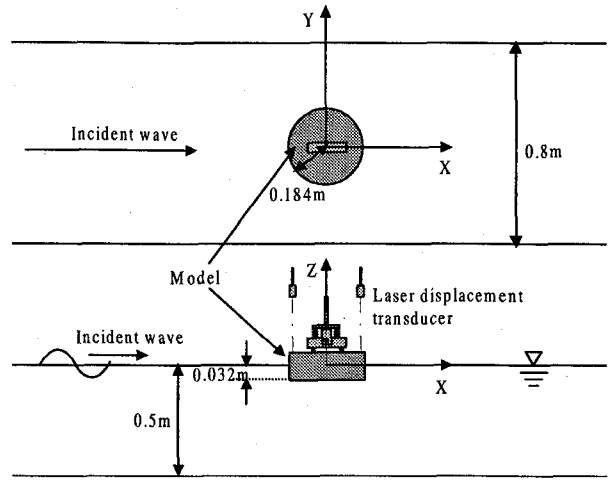


図-2 実験の概要

束とし、Pitch 運動については非拘束の場合 (case-0)、および $z = z_C$ まわりにねじり剛性が導入されるよう、バネをとりつけた場合 (case-1, case-2) について実験した。これは、浮体橋の基礎としてポンツーンが用いられる場合の、桁のねじり剛性の効果を念頭においたものである。Heave、Pitch の 2 自由度浮体運動は、非接触式のレーザー変位計 2 台で浮体縁端部の鉛直変位を計測し、これらの和および差から算出した。

4. 解析・実験結果および考察

4.1 解析値の検証

作成したプログラムの妥当性を検証するため、文献⁸⁾の Figure 12 (μ_{11})、Figure 14 (ν_{11})、Figure 20 (μ_{33})、Figure 21 (ν_{33})、ならびに文献⁷⁾の Fig. 4, 5 (μ_{33} , ν_{33})、Fig. 8 ($|X_1|$, $|X_3|$, $|X_5|$) と同じパラメータに対する計算をおこない、これらと同じ結果の得られることを確認した。Pitch モードに対しては、Vazquez ら¹⁰⁾ が Green 関数法により計算された楕円柱体に対する数値結果を示しているものの、円筒に対する結果は過去の文献に見当たらず、 μ_{55} , ν_{55} , μ_{51} (μ_{15}), ν_{51} (ν_{15}) の諸量に対する過去の結果との直接比較はできなかった。しかし、間接的には、Haskind 関係から得られた $|X_5|$ が文献⁷⁾と一致したこと、後に示すとおり、 $\mu_{15} = \mu_{51}$ ならびに $\nu_{15} = \nu_{51}$ の対称関係が精度良く成立していること、無限海域中での理論値との対応関係が自然であること、等を総合して、これらも正しい結果として得られているものと考えられる。

実際の数値計算では無限級数を有限級数に打ちきって計算するが、その収束性について調べた結果を表-2 に示す。同表から明らかとなっており、Fourier 級数の項数 N_F に対する収束性は極めて良好であるが、深さ方向の Evanescent モードの項数 N_E に関する収束性はこれと比較して余り良くないことがわかる。以下の計算例では、全て、 $N_F = 4$ 、 $N_E = 20$ として計算を行っている。

表-1 想定実機ならびに実験モデルの諸元

item	prototype	1/125 model	nondim. parameter
water depth H	62.5 m	0.5 m	$H/H = 1.0$
half width of channel d	50 m	0.4 m	$d/H = 0.8$
radius a	23.0 m	0.184 m	$a/H = 0.368$
draft D	4.0 m	0.032 m	$D/H = 0.064$
radius of gyration r	12.12 m	0.0970 m	$r/H = 0.194$
center of gravity z_G	1.776 m	0.0142 m	$z_G/H = 0.0284$
center of rotation z_C	10.0 m	0.08 m	$z_C/H = 0.16$
metacentric height $\overline{GM}$	29.29 m	0.2343 m	$\overline{GM}/H = 0.4686$
spring constant S_{55} (case-0)	0.0 Nm	0.0 Nm	$S_{55}/\rho g \pi a^2 H^2 = 0.0$
spring constant S_{55} (case-1)	1.0 GNm	3.977 Nm	$S_{55}/\rho g \pi a^2 H^2 = 0.01525$
spring constant S_{55} (case-2)	4.0 GNm	15.91 Nm	$S_{55}/\rho g \pi a^2 H^2 = 0.06101$

表-2 μ_{33} ($kd = 1.0$) の計算に関する収束性の検討

N_E	$N_F = 1$	$N_F = 2$	$N_F = 4$	$N_F = 8$
1	0.186386	0.186396	0.186397	0.186397
2	0.163602	0.163614	0.163614	0.163614
5	0.151973	0.151987	0.151988	0.151988
10	0.153424	0.153439	0.153439	0.153439
20	0.153636	0.153652	0.153652	0.153652
40	0.153828	0.153844	0.153844	0.153844

4.2 Heave 応答について

Heave 応答は、式 (43) に示すとおり、水平運動や回転運動と連成せず、1 自由度系として単独に求められる。Heave 方向の付加質量係数 μ_{33} 、造波減衰力係数 ν_{33} 、強制波力振幅 $|X_3|$ の理論値を、無限海域中での理論値とともに図-3~5 に示す。なお、無限海域中の理論値は、文献³⁾に示される方法により求めたものである。

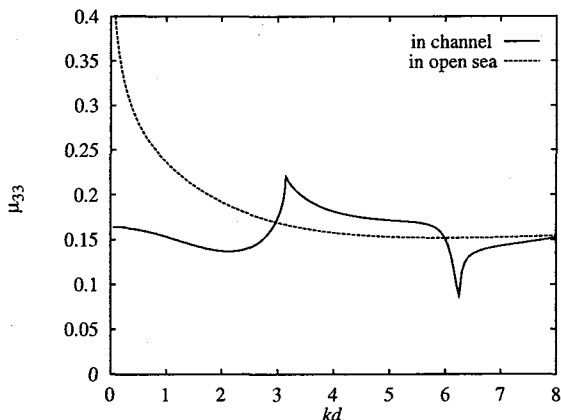
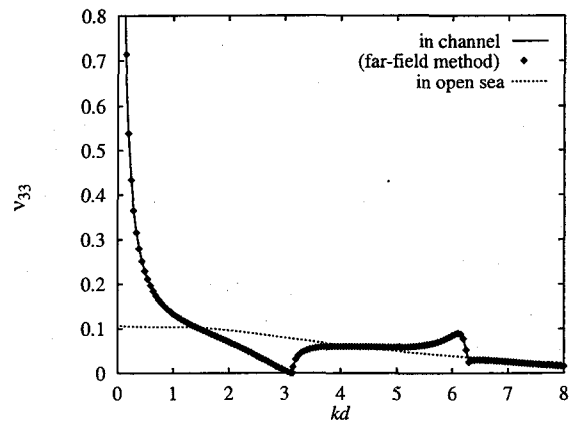
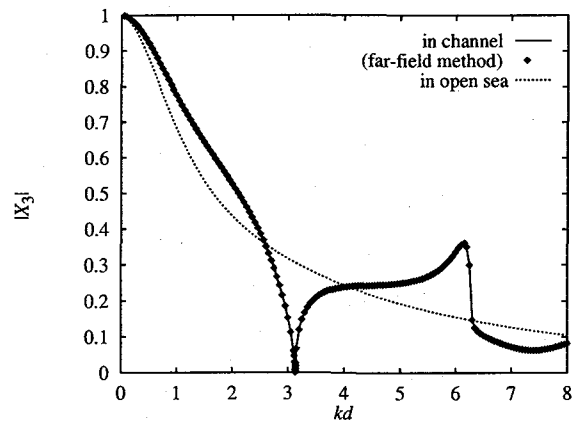
図-3 付加質量係数 μ_{33}

図-4、5において、 ν_{33} および $|X_3|$ はそれぞれ、物体表面での圧力の直接積分により求められるものと、式 (42) および (41) により求められるもの (far-field method) とがグラフ上で完全に一致しており、得られた解析値

図-4 造波減衰力係数 ν_{33} 図-5 強制波力振幅 $|X_3|$

の妥当性が検証される。 $kd \rightarrow 0$ の挙動が μ_{33} 、 ν_{33} 、それぞれ無限海域中の場合と水槽内の場合で著しい違いがみられるが、これについては文献⁷⁾でも示されているとおりである。また、 $kd \approx \pi$ において、 $|X_3| \approx 0$ となっている。より詳細には、 $kd = 3.1330785$ ($N_E = 40$, $N_F = 4$) の時、 $|X_3|$ がほぼ 0 ($< 10^{-7}$) となった。

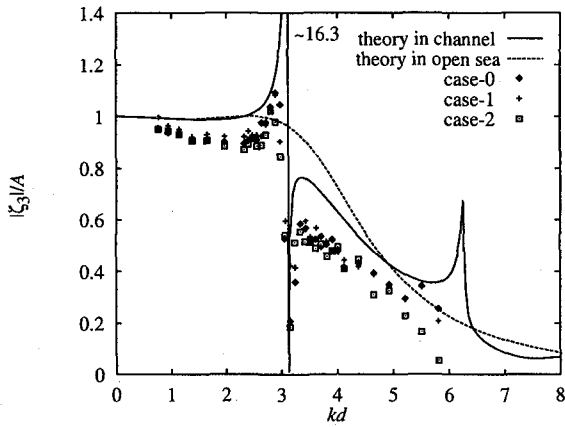


図-6 Heave 応答変位振幅 $|\zeta_3|/A$

式 (43) により Heave 応答変位を求めたものを図-6 に、実験値 (case-0, 1, 2) とともに示す。 $|X_3|$ がほぼ 0 となる $kd = 3.1330785$ の点で、Heave 応答の理論値もほぼ 0 ($< 10^{-6}$) となったが、実験値においても同様な傾向が得られている。これは、線形回折波理論に基づく理論値においては造渦減衰等の粘性に起因する減衰作用が含まれておらず、実際の応答の上限を与えるものと考えられるため、理論で予測される応答の極小点の実験でも再現されたものと考えられる。一方、その極小点より少し低い周波数において理論値は高いピークを示しているが ($|\zeta_3|/A \approx 16.3$) 実験値は 1.1 程度の低いピークを示すにとどまっている。図-5 にみられるとおり実際にはこの点での波力は小さく、理論的に得られる応答のピークは図-4 にみられる小さな造波減衰の効果によるところが大きい。このため、実際には造渦減衰等が付加される実験においては、応答のピークが理論値のように高くならなかったものと考えられる。

4.3 Pitch 応答について

Pitch 応答を算出する際には、Surge と Pitch との連成効果を考慮する必要がある。自由浮体に対する運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \begin{pmatrix} m + \bar{a}_{11} & mz_G + \bar{a}_{15} \\ mz_G + \bar{a}_{51} & mr^2 + \bar{a}_{55} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mg\overline{GM} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

となる。ここで、 $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}/\omega$ の置換をおこなった。自由浮体に対しては、上記の連立方程式を解くことで Surge と Pitch の応答値を求めることができるが、今回の実験では、 $z = z_C$ において水平移動を拘束し、また case-1, 2 においては、ねじり剛性 S_{55} の導入をおこなっている。そこで、これらの効果を加味し、運動

方程式を以下のように書き改める。

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \begin{pmatrix} m + \bar{a}_{11} & mz_G + \bar{a}_{15} \\ mz_G + \bar{a}_{51} & mr^2 + \bar{a}_{55} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mg\overline{GM} + S_{55} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + H \\ F_5 + z_C H \end{Bmatrix} \quad (55)$$

ただし、 H は $z = z_C$ における水平反力をあらわす。また、 $z = z_C$ において水平移動が 0 となる条件から、 $\zeta_1 + z_C \zeta_5 = 0$ が成り立つ。これを (55) に代入し ζ_1 ならびに H を消去すると、 F_1 と F_5 の位相が同じである¹⁾ことを考慮して、次式により Pitch 応答が得られる。

$$|\zeta_5| = \frac{|F_5| - |F_1|z_C}{|-\omega^2 \{m(r^2 + z_C^2 - 2z_C z_G) + \bar{a}_{55} + \bar{a}_{11}z_C^2 - 2\bar{a}_{51}z_C\} + mg\overline{GM} + S_{55}|} \quad (56)$$

これを、無次元量により表示すると、

$$|\zeta_5 a|/A = \frac{\bar{a}(|X_5| - |X_1|\bar{z}_C)}{|-kH \tanh kH \{\bar{D}(\bar{r}^2 + \bar{z}_C^2 - 2\bar{z}_C \bar{z}_G) + \bar{\mu}_{55} + \bar{\mu}_{11}\bar{z}_C^2 - 2\bar{\mu}_{51}\bar{z}_C\} + \bar{D}(\overline{GM}/H) + \bar{S}_{55}|} \quad (57)$$

ただし、 $\bar{a} = a/H$ 、 $\bar{r} = r/H$ 、 $\bar{D} = D/H$ 、 $\bar{z}_C = z_C/H$ 、 $\bar{z}_G = z_G/H$ 、 $X_1 = F_1/\rho g \pi a^2 A$ 、 $X_5 = F_5/\rho g \pi a^2 H A$ 、 $\bar{S}_{55} = S_{55}/\rho g \pi a^2 H^2$ 、 $\bar{\mu}_{ij} = \mu_{ij} + i\nu_{ij}$ である。

図-7~14 に、Pitch 応答変位の算出に必要な諸量に関する理論値をそれぞれ示す。図-8、9、11、13、14 においても、物体表面の圧力の直接積分により得られる値と、式 (41) および (42) から得られる値 (far-field method) は完全に一致しており、解の妥当性が検証される。また、図-12、13 において、 $\mu_{15} = \mu_{51}$ 、 $\nu_{15} = \nu_{51}$ の対称性が成立しており、このことも解の妥当性を示している。無限海域での理論値との比較では、いずれも $kd \approx \pi, 2\pi$ において側壁の影響による特徴的な挙動が現れているが、Heave に対する結果に比べれば、両者の差異は小さい。

式 (57) により最終的に求まる Pitch 応答変位の理論値を、実験値 (case-0, 1, 2) と共にプロットしたものを図-15 に示す。側壁影響を考慮した理論値と無限海域での理論値との間にはほとんど差異はなく、 $kd = \pi, 2\pi$ の近傍において、側壁影響を考慮したものに不連続的な挙動が少し観察される程度である。実験値との比較については、造渦減衰を考慮していない理論値は、特に共振時においてかなり過大な応答値を与えている。この造渦減衰を予め理論的に精度よく予測する手法は実質的にはないのが現状であり¹³⁾、実験的に同定する必要がある。ここでは、無次元化線形減衰モーメント係数 ν_e を式 (57) に付加し、

$$|\zeta_5 a|/A = \frac{\bar{a}(|X_5| - |X_1|\bar{z}_C)}{|-kH \tanh kH \{\bar{D}(\bar{r}^2 + \bar{z}_C^2 - 2\bar{z}_C \bar{z}_G) + \bar{\mu}_{55} + i\nu_e + \bar{\mu}_{11}\bar{z}_C^2 - 2\bar{\mu}_{51}\bar{z}_C\} + \bar{D}(\overline{GM}/H) + \bar{S}_{55}|} \quad (58)$$

により Pitch 応答変位を求めることにする。 ν_e は実験的に同定されるべき係数であるが、ここでは、case-0 の実験結果のピーク値であわせ、 $\nu_e = 0.0006$ とした。この係数を用い、式 (58) により求めた理論値を実験値と比較したものを図-16 に示す。このような簡易な補正方法でも、かなり効果のあることがわかる。より合理的な造渦減衰の評価方法の検討については今後の課題としたい。

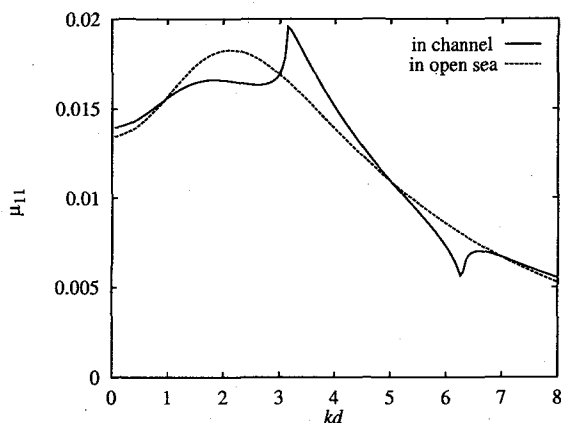


図-7 付加質量係数 μ_{11}

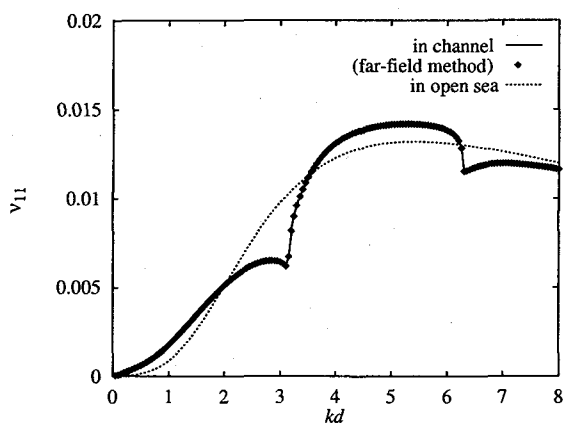


図-8 造波減衰力係数 ν_{11}

5. まとめ

水槽内に設置された円筒浮体の波浪応答解析を、その側壁影響を厳密に考慮できる多重極展開法によりおこない、これを実験値と比較した。また、無限海域中での理論値もあわせて計算した。

特に Heave モードにおいて、側壁の影響は大きく、 $kd \approx \pi$ において応答がほとんど 0 となる特異な挙動が予測され、これは実験的にも確認された。また、 $kd \approx 3$ 近傍において、側壁影響を考慮した理論値は高い応答のピークを示したが、これは主として造波減衰が小さくなることに起因しているため、実験ではこのような高い応答のピークは観察されなかった。

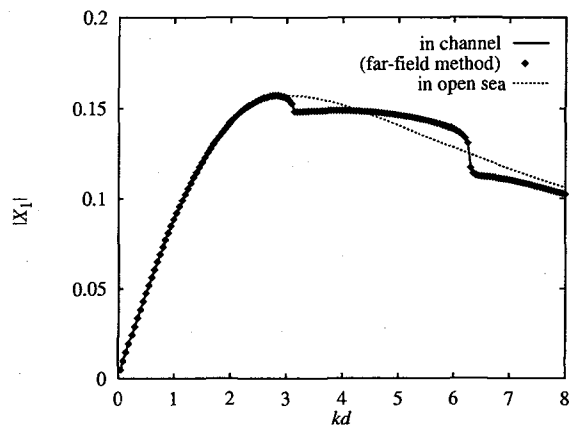


図-9 強制波力振幅 $|X_1|$

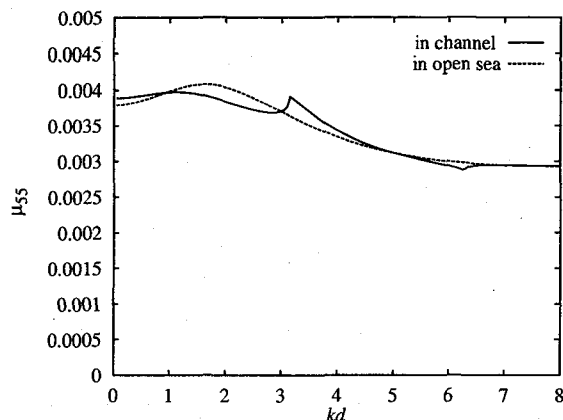


図-10 付加慣性モーメント係数 μ_{55}

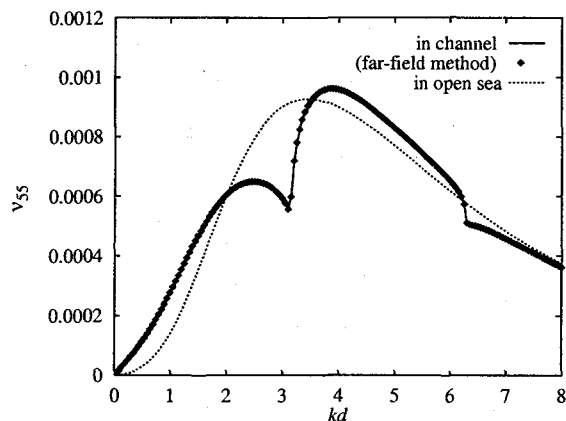


図-11 造波減衰モーメント係数 ν_{55}

一方、Pitch モードにおいては、側壁影響は最終的な応答にはほとんど現れず、無限海域中での理論値との差異はほとんどなかった。Pitch モードにおいては、その共振時において線形回折波理論に基づく応答の理論値は実験値に対してかなり過大な評価となっており、造渦減衰等の減衰作用の合理的の評価法を採り入れることが今後の課題である。

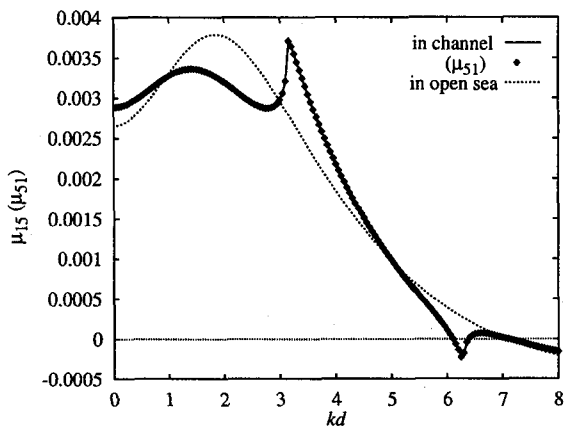


図-12 連成付加質量係数 μ_{15} (μ_{51})

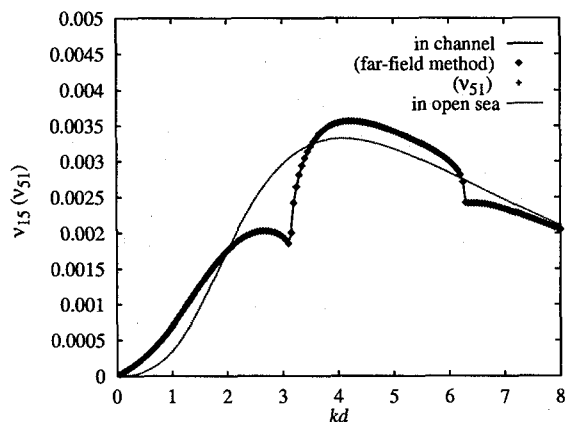


図-13 連成造波減衰力係数 ν_{15} (ν_{51})

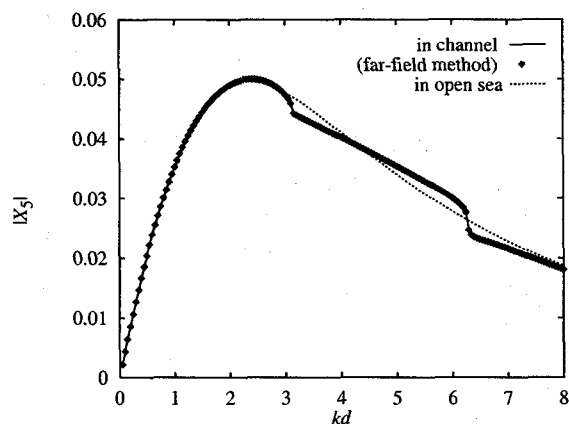


図-14 強制波モーメント振幅 $|X_5|$

付録 I 係数 $E_s\{q, n; m\}$ の計算法

文献⁸⁾により、係数 $E_s\{q, n; m\}$ は以下のように与えられる。

$$E_s\{2q, 2n; 0\} = -\frac{2i\epsilon_q}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k\gamma d} c_{2q}(t) c_{2n}(t)}{\gamma \sinh k\gamma d} dt + \frac{\epsilon_q}{kd} \sum_{p=0}^{j_s} \epsilon_p t_p^{-1} c_{2q}(t_p) c_{2n}(t_p) \quad (I.1)$$

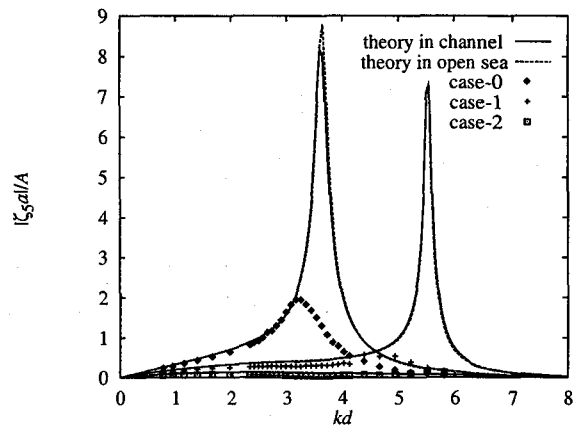


図-15 Pitch 応答変位振幅 $|\zeta_5 a|/A$

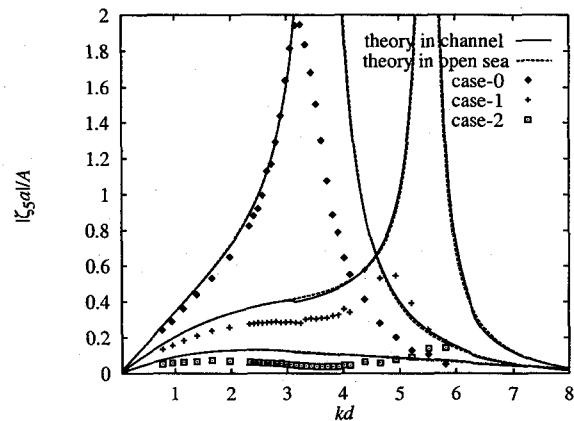


図-16 Pitch 応答変位振幅 $|\zeta_5 a|/A$ (線形減衰を付加)

$$E_s\{2q+1, 2n+1; 0\} = -\frac{4i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k\gamma d} s_{2q+1}(t) s_{2n+1}(t)}{\gamma \sinh k\gamma d} dt + \frac{2}{kd} \sum_{p=0}^{j_s} \epsilon_p t_p^{-1} s_{2q+1}(t_p) s_{2n+1}(t_p) \quad (I.2)$$

$$E_s\{2q, 2n; m\} = \epsilon_q \int_1^\infty \frac{e^{-k_m dt} c_{2q}(t) c_{2n}(t)}{\gamma \sinh k_m dt} dt \quad \text{for } m \geq 1 \quad (I.3)$$

$$E_s\{2q+1, 2n+1; m\}$$

$$= 2 \int_1^\infty \frac{e^{-k_m dt} c_{2q+1}(t) c_{2n+1}(t)}{\gamma \sinh k_m dt} dt \quad (\text{I.4})$$

for $m \geq 1$

ただし、

$$\gamma(t) = \begin{cases} -i(1-t^2)^{\frac{1}{2}} & t \leq 1 \\ (t^2-1)^{\frac{1}{2}} & t > 1 \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

$$c_{2n}(t) = \begin{cases} \cos[2n \arcsin t] & t \leq 1 \\ (-1)^n \cosh[2n \operatorname{arcosh} t] & t > 1 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

$$c_{2n+1}(t) = \begin{cases} \cos[(2n+1) \arcsin t] & t \leq 1 \\ i(-1)^n \sinh[(2n+1) \operatorname{arcosh} t] & t > 1 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

$$s_{2n+1}(t) = \begin{cases} \sin[(2n+1) \arcsin t] & t \leq 1 \\ (-1)^n \cosh[(2n+1) \operatorname{arcosh} t] & t > 1 \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

このうち、 $m \geq 1$ の計算ならびに $m = 0$ の場合の実部の計算には困難はないが、 $m = 0$ の場合の虚部の計算は、コーシー主値積分を含むため、その精度良い計算には工夫を要する。文献⁸⁾においては、コーシー主値積分を直接扱う方法が紹介されているが、著者らの経験では、実際には精度よい数値計算は困難であった。そこで、文献⁹⁾の Appendix A に示された方法を基礎とする、以下の方法により計算した。

文献⁹⁾の式 (3.19)、(3.20) により、

$$E_s\{2q, 2n; 0\} = -\frac{i\epsilon_q(-1)^{q-n}}{\pi} I \quad (\text{I.9})$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\gamma kd} + 1}{\gamma \sinh 2k\gamma d} \cosh 2q\tau \cosh 2n\tau d\tau \quad (\text{I.10})$$

ただし、 $\tau = \cosh^{-1} t$ である。この積分も実軸上に極を有し、極の下側をとる積分路について積分する必要がある。そこで、 $t = e^{-i\pi/4}\{s(1+is/4)\}^{\frac{1}{2}}$ 、 $\gamma = -i(1+is/2)$ の変数変換をおこない、極近傍での積分を回避する。

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-2\gamma kd} + 1}{t \sinh 2k\gamma d} \cosh 2q\tau \cosh 2n\tau ds \quad (\text{I.11})$$

さらに、文献¹⁴⁾の公式 1.331 より、

$$\cosh 2n\tau = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \gamma^{2k} t^{2n-2k} \quad (\text{I.12})$$

であり、 I が s に関する積分で表される。この被積分関数の実部のみを標準的な数値積分手法により積分し、精度よい結果を得ることができる。 $E_s\{2q+1, 2n+1; 0\}$ も、同様な方法により積分できる。

参考文献

- 1) Garrett, C. J. R.: Wave forces on a circular dock, *J. Fluid Mech.*, Vol. 46, pp. 129-139, 1971.
- 2) 井島武士, 田淵幹修, 湯村やす: 有限水深の波による円柱状浮体の運動, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp. 71-84, 1972.
- 3) Yeung, R. W.: Added mass and damping of a vertical cylinder in finite-depth waters, *Applied Ocean Research*, Vol. 3, pp. 119-133, 1981.
- 4) 大楠丹: 複数本の鉛直円柱に働く波力について, 日本造船学会論文集, 第 133 号, pp. 53-64, 1972.
- 5) Kagemoto, H. and Yue, D. K. P.: Interactions among multiple three-dimensional bodies in water waves: an exact algebraic method, *J. Fluid Mech.* Vol. 166, pp. 189-209, 1986.
- 6) Linton, C. M. and Evans, D. V.: The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders, *J. Fluid Mech.* Vol. 215, pp. 549-569, 1990.
- 7) Yeung, R. W. and Sphaier, S. H.: Wave-interference effects on a truncated cylinder in a channel, *J. Engng Maths*, Vol. 23, pp. 95-117, 1989.
- 8) Linton, C. M. and Evans, D. V.: The radiation and scattering of surface waves by a vertical circular cylinder in a channel, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, Vol. A338, pp. 325-357, 1992.
- 9) McIver, P. and Bennett, G. S.: Scattering of water waves by axisymmetric bodies in a channel, *J. Engng Maths*, Vol. 27, pp. 1-29, 1993.
- 10) Vazquez, J. H. and Williams, A. N.: Wave radiation by a three-dimensional body in a narrow tank, *Ocean Engng.*, Vol. 22, pp. 799-817, 1995.
- 11) Srokosz, M. A.: Some relations for bodies in a channel, with an application to wave-power absorption, *J. Fluid Mech.*, Vol. 99, pp. 145-162, 1980.
- 12) Linton, C. M. and Evans, D. V.: Hydrodynamic characteristics of bodies in channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 252, pp. 647-666, 1993.
- 13) Faltinsen, O. M.: *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*, Cambridge Univ. Press, 1990.
- 14) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M.: *Table of Integrals, Series, and Products*, Fifth Edition, Academic Press, 1994.

(1999 年 9 月 17 日 受付)