

剛性の深度依存を考慮した盛土地盤の地震応答解

Analytical solution of earthquake response for earth bank considering depth dependency of soil rigidity

松原勝己*, 星谷勝**, 浦野和彦***

Katsumi Matsubara, Masaru Hoshiya and Kazuhiko Urano

*工修 東電設計(株)技術開発本部 (〒110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3)

**Ph.D 武蔵工業大学教授, 工学部土木工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

***工修 ハザマ技術研究所 (〒305-0822 茨城県つくば市荻間字西向 515-1)

In order to present a practical seismic analysis method of earth bank, the varied-sectioned beam theory for fill type dam is modified and the analytical solution of earthquake response for the bank is derived considering the depth dependency of soil rigidity. The earthquake response of the earth bank depends on the velocity spectrum of input motion S_v , the shear wave velocity of the bank V_s , the height of the bank H , the ratio of the height of the bank over the height of the bank cone r and rigidity distribution factor b .

Key Words: earth bank, seismic design, earthquake response, one-dimensional, depth dependency of soil rigidity

キーワード: 盛土地盤, 耐震設計, 地震応答, 一次元, 剛性深度依存性

1. まえがき

従来, 盛土地盤に対しては, 特に重要度の高いものや特殊な構造を有するものを除いて, 十分な耐震設計が実施されないのが通例であった. しかしながら, 1995 年兵庫県南部地震以後, 重要度の高い河川堤防などで液状化時の検討が実施されつつある. また, 重要度の高い地中構造物が盛土内に埋設される場合には盛土地盤の地震時応答が必要になるものと考えられる.

筆者らは, 先にダムなどの耐震検討に用いられる一次元せん断くさび理論^{1), 2)}を応用し, その境界条件を修正することにより台形断面を有する盛土地盤の地震応答解を求め数値計算結果を示した³⁾. この一次元せん断くさび理論は, 三角形断面を有する盛土形状を仮定し, 深度方向の一次元的な変位分布によるせん断振動として扱う方法であり, 松村^{4), 5)}によって先駆的な研究が行われている.

筆者らの先の報告³⁾では, 盛土地盤の剛性が深度方向に一樣であると仮定した. しかしながら, 動土質分野において地盤のせん断弾性係数が上載圧の平方根に依存すること⁶⁾が指摘されており, 地盤剛性の深度依存性により盛土地盤の応答性状が異なることが考えられる.

そこで本報では, 先の筆者らの研究をベースとして, 盛土の地盤剛性が深度方向に変化する場合の地震応答解を解析的に誘導し, その数値計算例を示したものである.

2. 盛土の運動方程式と一般解

図-1を参照して, 薄片 dz に対する運動方程式が式(1)で表される.

$$\rho \frac{B}{H} z dz \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{B}{H} (z + dz) \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \right) - \frac{B}{H} z \tau \quad (1)$$

ここに, ρ : 地盤の密度, u : x 方向の地盤変位, τ : せん断応力, B : 盛土底面の幅, H : 盛土をせん断くさびと考えた時の高さ, H_1 : せん断くさび頂点から地盤天端までの距離である. 式(1)で高次の微少量を無視すれば, 式(2)を得る.

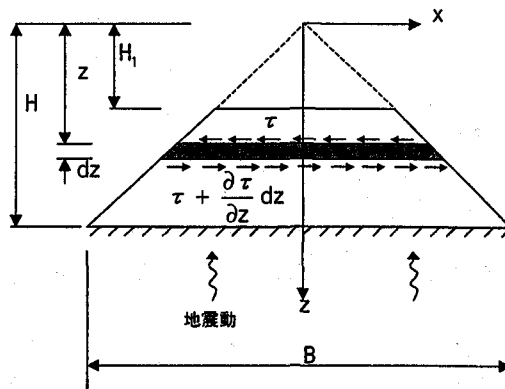


図-1 盛土地盤の地震時変位

$$\rho z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau + z \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (2)$$

せん断応力-せん断ひずみの関係は

$$\tau = G(z) \cdot \gamma = G(z) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

ここに、 $G(z)$ ：座標 z に依存するせん断弾性係数， γ ：せん断ひずみである。

式(3)を(2)に代入すれば、式(4)を得る。

$$\rho z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ G(z) + z \frac{\partial G(z)}{\partial z} \right\} \frac{\partial u}{\partial z} + G(z) \cdot z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4)$$

ここで、密度 ρ は z に依らず一定とし、 $G(z)$ の深度依存性として、式(5)を仮定する。

$$G(z) = a \cdot z^b \quad (a, b: \text{定数}) \quad (5)$$

式(5)の $G(z)$ の関数形は、松村⁵⁾の研究にならい定めたものであるが、密度が一定の場合はせん断弾性係数が上載圧の平方根に比例する場合も包含している。また、密度を一定としたのは地盤震動の問題において、密度変化よりも剛性の変化の方が応答解析結果に敏感であると考えられることとモデル化上の容易さのためである。さらに、式(5)ではせん断弾性係数を深さのみに依存させているが、盛土表面付近では、水平方向にも剛性が異なることが考えられる。しかしながら、本報では一次元せん断震動という簡便なモデル化により解析解が得られる場合を対象として式(5)のような仮定を採用した。

式(4)および(5)より式(6)を得る。

$$\frac{\rho}{G(z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{b+1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6)$$

式(6)が、剛性の深度依存を考慮した時の、盛土の水平変位 u に関する運動方程式である。

式(6)を振動数領域に変換するため、 $u = Ue^{i\omega t}$ と置けば、式(7)を得る。

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{b+1}{z} \frac{dU}{dz} + \frac{\rho \omega^2}{G(z)} U = 0 \quad (7)$$

ここに、 U ：振動数領域での変位、 ω ：円振動数である。

式(7)を、式(8)を用いて変数変換することにより、式(9)が得られる⁷⁾。

$$U = z^{\frac{b}{2}} V \quad (8a)$$

$$y = \sqrt{\frac{\rho}{a}} \omega \frac{2}{2-b} z^{\frac{2-b}{2}} \quad (8b)$$

$$\frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dV}{dy} + \left(1 - \frac{v^2}{y^2}\right) V = 0 \quad (9)$$

ここに、 $v = b/(2-b)$ である。式(9)は、 v 次のベッセル方程式を表しているから、一般解が式(10)で表される。

$$V = C_1 J_v(y) + C_2 N_v(y) \quad (10)$$

ここに、 $J_v(y)$, $N_v(y)$ ：それぞれ v 次のベッセル関数およびノイマン関数、 C_1 , C_2 ：境界条件より定まる積分定

数である。

式(8)および式(10)より、式(7)の一般解が式(11)で表される。

$$U = z^{\frac{b}{2}} \left[C_1 \cdot J_v \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{a}} \omega \frac{2}{2-b} z^{\frac{2-b}{2}} \right\} + C_2 \cdot N_v \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{a}} \omega \frac{2}{2-b} z^{\frac{2-b}{2}} \right\} \right] \quad (11)$$

ここに、 $v = b/(2-b)$ である。

3. 減衰のない自由振動解

式(11)の積分定数 C_1 および C_2 を定めるために、境界条件として、盛土天端でせん断応力がゼロ、盛土底面で変位がゼロを指定する。すなわち、

$$Z = H_1; \frac{dU}{dz} = 0 \quad (12a)$$

$$Z = H; U = 0 \quad (12b)$$

式(11)および(12)より、式(13)を得る。

$$\begin{aligned} & \left[-J_v \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) + \frac{r x_i}{b} \left\{ J_{v-1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) - J_{v+1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) \right\} \right] C_1 \\ & + \left[-N_v \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) + \frac{r x_i}{b} \left\{ N_{v-1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) - N_{v+1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) \right\} \right] C_2 \end{aligned} \quad (13a)$$

= 0

$$J_v \left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i \right) C_1 + N_v \left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i \right) C_2 = 0 \quad (13b)$$

ここに、

$r = H_1 / H$, $x_i = \omega_i H / V_{s1}$, $V_{s1} = \sqrt{a / \rho H_1^{\frac{b}{2}}}$ (盛土天端でのせん断波速度)、 ω_i ： i 次の固有円振動数である。

なお、式(13)は連続量の振動数に対して定義されるものであるが、式(13)によって結果として定まる無限可算箇の規準化固有振動数を x_i と記している。

C_1 および C_2 に関する連立方程式(13)が自明な解を持たないための条件から式(14)の振動数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & J_v \left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i \right) \left[-b N_v \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) + \frac{r x_i}{b} \left\{ N_{v-1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) - N_{v+1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) \right\} \right] \\ & N_v \left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i \right) \left[-b J_v \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) + \frac{r x_i}{b} \left\{ J_{v-1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) - J_{v+1} \left(\frac{2}{2-b} r x_i \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

= 0

ここで、ベッセル関数に関する漸化式⁹⁾

$$\begin{aligned} J_{v-1}\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) \\ = \frac{b}{rx_i}J_v\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) - J_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} N_{v-1}\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) \\ = \frac{b}{rx_i}N_v\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) - N_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) \end{aligned} \quad (15b)$$

を用いると、式(14)は、式(16)に変形される。

$$J_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right)N_v\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{b}{2}}x_i\right) - \quad (16)$$

$$J_v\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{b}{2}}x_i\right)N_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}rx_i\right) = 0$$

ここに、 $x_i = \omega_i H / V_{s1}$ (ω_i : i 次の固有円振動数),

$r = H_1 / H$, $v = b / (2 - b)$,

$V_{s1} = \sqrt{G(H_1) / \rho} = \sqrt{aH_1^b / \rho}$ (盛土天端でのせん断波速度) である。

式(16)が盛土の固有振動数を定める振動数方程式である。特に、 $b = 0$ とすれば式(17)を得る。

$$J_1(rx_i)N_0(x_i) - J_0(x_i)N_1(rx_i) = 0 \quad (17)$$

式(17)は、均質な場合の盛土の振動数方程式³⁾に一致していることがわかる。さらに、松村は剛性が深度依存する場合の解⁵⁾を三角形断面の盛土に対して導びいているが、その解との比較を行ってみる。

式(16)を書き換えると、式(18)を得る。

$$\begin{aligned} J_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{2-b}{2}}x_i'\right)N_v\left(\frac{2}{2-b}x_i'\right) - \\ J_v\left(\frac{2}{2-b}x_i'\right)N_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{2-b}{2}}x_i'\right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 $x_i' = \omega_i H / V_{s2}$, $V_{s2} = \sqrt{aH^b / \rho}$ (盛土底面でのせん断波速度) である。せん断弾性係数が深度方向に直線的に分布する場合は、 $b = 1$ であり、この時 $v = 1$ となる。さらに、 $r \rightarrow 0$ (三角形断面) を考慮すれば、式(18)より式(19)が得られる。

$$J_1(2x_i') = 0 \quad (19)$$

式(19)より、一次固有周期

$$T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2\pi / x_1' \sqrt{\rho H / a} \approx 3.28 \cdot \sqrt{\rho H / a} \text{ が得}$$

られ、松村の解と一致する。

また、式(11)および(13)より、固有振動モード $\phi_i(z)$ が、式(20)で得られる。

$$\begin{aligned} \phi_i(z) = \phi_i(H\zeta) = \\ \zeta^{-\frac{b}{2}} \begin{bmatrix} J_v\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{b}{2}}x_i\zeta^{\frac{2-b}{2}}\right) \\ - \frac{J_v\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{b}{2}}x_i\right)}{N_v\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{b}{2}}x_i\right)} N_{v+1}\left(\frac{2}{2-b}r^{\frac{b}{2}}x_i\zeta^{\frac{2-b}{2}}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 $\zeta = z / H$ である。

4. 減衰のある強制振動解

減衰のある場合のせん断応力-せん断ひずみの関係として、式(3)の代わりに式(21)を用いる。

$$\tau = G(z) \frac{\partial u}{\partial z} + \eta(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \quad (21)$$

ここに、 $\eta(z)$: 減衰定数である。

式(21)において、式(5)および式(22)を仮定すれば、式(2)より式(23)が得られる。

$$\eta(z) = c \cdot z^b \quad (22)$$

ここで、式(22)により減衰係数にせん断弾性係数と同じ形の深度依存性を規定したのは、後述のモード合成法の適用によりモード分解を可能にするための解析上の配慮からである。

$$\begin{aligned} z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G(z)}{\rho} \left\{ z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (b+1) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \\ + \frac{\eta(z)}{\rho} \left\{ z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial t} + (b+1) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、盛土の変位を盛土底面の変位 $u_B(t)$ に対する相対変位 $\xi(z, t)$ で表示する。すなわち、

$$u(z, t) = \xi(z, t) + u_B(t) \quad (24)$$

式(23)および(24)より、式(25)を得る。

$$\begin{aligned} z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{G(z)}{\rho} \left\{ z \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + (b+1) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\} \\ - \frac{\eta(z)}{\rho} \left\{ z \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2 \partial t} + (b+1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial t} \right\} \\ = -z \ddot{u}_B(t) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、モード合成法を適用するため、式(26)を仮定する。

$$\xi(z, t) = \sum_j \phi_j(z) \cdot Q_j(t) \quad (26)$$

ここに、 $\phi_j(z)$: 式(20)で表される j 次の固有振動モード、

$Q_j(t)$: j 次の時間関数である。

式(25)および(26)、また $\phi_j(z)$ が式(7)を満足すること、

さらに $\eta(z) = 2hG(z) / \omega_j(h)$ (h : 盛土地盤の減衰定数) の関係を考慮すれば式(27)が得られる。

$$\sum_j [\ddot{Q}_j(t) + 2h\omega_j \dot{Q}_j(t) + \omega_j^2 Q_j(t)] \cdot \phi_j(z) = -\ddot{u}_B(t) \quad (27)$$

式(27)の両辺に $z\phi_i(z)$ を乗じ z に関して H_1 から H まで積分すれば、式(28)が成立する【付録1参照】ことから、式(29)が得られる。

$$\int_{H_i}^H z \phi_i(z) \phi_j(z) dz = 0 \quad (i \neq j) \quad (28)$$

$$\ddot{Q}_i(t) + 2h\omega_i \dot{Q}_i(t) + \omega_i^2 Q_i(t) = -\mu_i \ddot{u}_B(t) \quad (29)$$

$$\text{ここに, } \mu_i = \frac{\int_{H_i}^H z \phi_i(z) dz}{\int_{H_i}^H z \{\phi_i(z)\}^2 dz} \quad (30)$$

式(20)を用い、式(30)を計算すれば、式(31)を得る【付録2参照】。

$$\mu_i = \frac{\pi N_v \left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i \right)}{1 - \left\{ \frac{\pi}{2-b} r^{\frac{b+2}{2}} x_i N_v \left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i \right) \phi_i(rH) \right\}^2} \quad (31)$$

式(29)より、 $Q_i(t)$ の時刻歴最大値は、式(32)で表される。

$$Max\{Q_i(t)\} = \mu_i S_D(\omega_i, h) = \frac{\mu_i}{2\pi} T_i S_V(\omega_i, h) \quad (32)$$

ここに、 $S_D(\omega_i, h)$ 、 $S_V(\omega_i, h)$ ：それぞれ加速度 $\ddot{u}_B(t)$ に対する変位応答スペクトルおよび速度応答スペクトル、 T_i ： i 次の固有周期である。

式(26)および(32)より、相対変位 $\xi(z, t)$ の時刻歴最大値は、一次変形モードのみに着目すれば、式(33)で表される。

$$Max\{\xi(z, t)\} = \frac{\mu_i}{2\pi} \cdot T_i \cdot S_V(\omega_i, h) \cdot \phi_i(z) \quad (33)$$

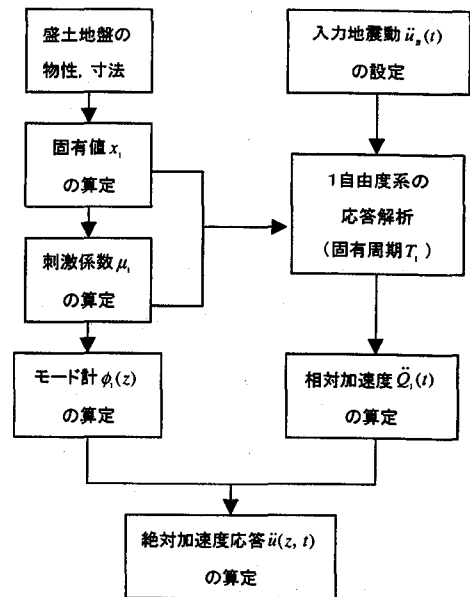
5. 数値計算例

前記の提案式を用いて、盛土地盤の地震応答解の数値計算を行う。今回の数値計算では、盛土高さ h と盛土勾配 k をパラメータとし、また、盛土の地盤剛性が深度方向に変化する場合の影響を見るため、地盤剛性の深度依存が有る場合と無い場合の2種類の計算例を示す。

盛土地盤の応答変位については、一次変形モードのみに着目したとき、以下の手順で求めることができる。

- ①定められた $r(=H_i/H)$ に対し式(16)により、一次モードの固有値 x_i を求め、さらに円振動数 $\omega_i(=V_{s1}x_i/H)$ および固有周期 $T_i(=2\pi/\omega_i)$ を算定する。
- ②式(20)より、高さ z におけるモード形 $\phi_i(z)$ を算定する。
- ③式(31)より、刺激係数 μ_i を算定する。
- ④式(33)より、盛土地盤底面位置の振動数に対する速度応答スペクトルが与えられた時の地盤変位が、高さ z の関数として算定される。

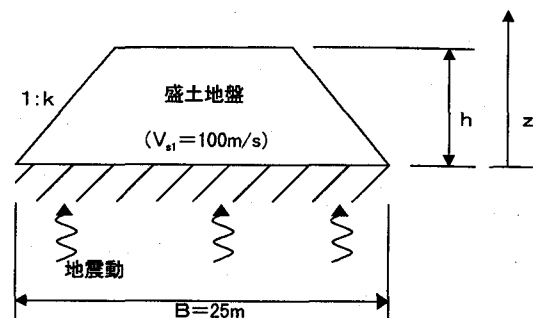
さらに、加速度応答については、上記の①～③の手順を実施後、式(29)に基づいて相対加速度応答 $\ddot{Q}_i(t)$ を求め、式(34)により絶対加速度応答 $\ddot{u}(z, t)$ を算定する。



図－2 数値計算フロー

表－1 計算パラメータ

パラメータ	ケース1	ケース2
盛土勾配 k	1.0	1.5
盛土高さ h(m)	2.5, 5.0, 7.5	2.5, 5.0



図－3 検討盛土地盤

表－2 盛土地盤の固有周期(sec)

盛土高さ h(m)	k=1.0		k=1.5		平行層
	深度依存無	深度依存有	深度依存無	深度依存有	
2.5	0.096	0.088	0.093	0.082	0.1
5.0	0.181	0.150	0.169	0.120	0.2
7.5	0.253	0.180	-	-	0.3

$$\ddot{u}(z, t) = \phi_i(z) \cdot \ddot{Q}_i(t) + \ddot{u}_s(t) \quad (34)$$

これらの流れを図-2の数値計算フローに示す。

図-3のような盛土地盤に対して、表-1に示すように、盛土高さ h と盛土勾配 k をパラメータとして盛土地盤の固有周期の算定および地震応答計算を行う。ここで、今回の計算では、盛土の地盤剛性の深度依存としては、剛性が深度方向に直線的に分布する(式(5)において $b=1$ の場合)とした。したがって、深度依存無しの場合には盛土地盤全体が均一な剛性であるが、深度依存有りの場合には盛土地盤下方ほど剛性が大きくなっている。また、図-3に示すように、盛土地盤の底面長さ $B=25\text{m}$ 、盛土天端でのせん断速度 $V_{s1}=100\text{m/s}$ は一定とした。

前記の計算手法に従い算定した盛土地盤の固有周期を表-2に示す。これより、盛土高さ h が大きくなるほど固有周期が大きくなることがわかる。また、いずれのケースも平行層より固有周期が短くなっており、さらに、盛土全体の剛性が大きくなる深度依存有りの方が無しの場合より固有周期が短くなっている。

参考までに、本計算結果の信頼性の確認のために実施したFEM解析では、 $h=7.5\text{m}$ 、 $k=1.0$ のケースで、剛性の深度依存無しの場合の固有周期は0.263秒、深度依存有りの場合は0.187秒であり、表-2の計算結果とほぼ等しい値であった。

次に、図-3に示すように、盛土地盤底面より地震動が入力した時の盛土地盤中の加速度応答を算定する。ここで、入力地震動としては道路橋示方書⁸⁾におけるI種地盤用L1地震動(修正開北橋記録、最大加速度102gal)を用いた。参考までに、入力地震動の時刻歴波形と加速度応答スペクトルを図-4に示す。数値計算において、式(29)による加速度応答の算定はNewmark- β 法による直接積分法($\beta=0.25$ 、積分時間間隔0.01秒)により行い、盛土地盤の減衰定数は5%とした。

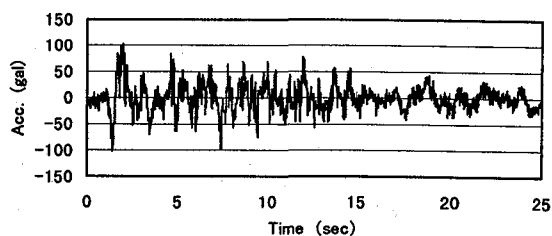
図-5および図-6に盛土地盤中の最大加速度分布を示す。最大加速度分布の比較より、盛土高さ h の増加に伴い盛土天端の最大加速度も増加しているが、その差はあまり大きくない。また、同じ盛土高さ h であれば、 k が大きい方(盛土勾配が緩い)が加速度が大きくなっている。

次に、地盤剛性の深度依存の影響については、 $h=7.5\text{m}$ および 5.0m のケースの場合、盛土下方で深度依存無しの方が加速度大きく、盛土天端では深度依存有りの方が大きい傾向がみられる。また、 $h=2.5\text{m}$ のケースの場合には、その逆の傾向がみられることがわかる。

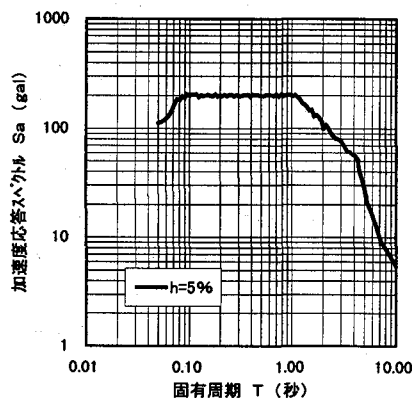
6. まとめ

本報の検討結果をまとめると、以下のようになる。

- (1) フィルダム等の耐震検討に用いる一次元せん断くさび理論を応用し、台形断面を有する盛土に対し剛



(a)時刻歴波形



(b)加速度応答スペクトル

図-4 入力地震動

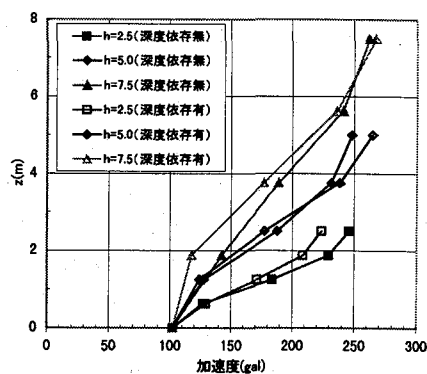


図-5 盛土地盤の最大加速度分布(ケース1)

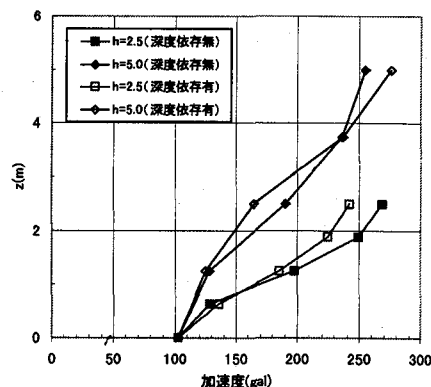


図-6 盛土地盤の最大加速度分布(ケース2)

性の深度依存を考慮した地震応答解を誘導した。

- (2) 盛土高さ・勾配をパラメータとした地震応答解析を実施した結果、盛土高さの増大に伴い加速度応答が増大することや同一の盛土高さの場合に勾配の緩い方が加速度応答が増大することがみられた。
- (3) 盛土剛性の深度依存の影響については、盛土高さによって深度依存性の有無による加速度分布の差異が逆になる傾向がみられた。

7. あとがき

本報では、盛土の地震応答計算法として、現状で多用される有限要素法などによらず、盛土を一自由度系に帰着させる簡便な方法の開発の一つとして、盛土剛性が深度依存する場合の解を導入し、その数値計算例を示した。ただし、解の誘導に主眼を置いたため、系統的な数値計算や結果に対する分析・考察が不足していると考えられる。また、一次モードのみに着目した検討になっており、高次モードが応答に及ぼす影響についても考察が加えられていない。したがって、さらにパラメータスタディを追加するとともに、高次モードの影響を定量的に把握することを今後の課題としたい。

最後に本報で示した盛土地盤の地震応答計算は、有限要素法などの数値解析手法により容易に行えるものであるが、本報のような解析解による方法の意義を付け加えておきたい。まず、線形問題でしかも単純な境界条件という制限下ではあるが、得られる解の構造が明確となり結果に対する見通しが良くなること、次に設計式などの形で一般化するのに適していること、さらにモデル形状を変化させるパラメータスタディを行うのが有限要素法などの数値解析に比べて非常に容易であることが挙げられる。以上のような理由から、解析解を導入することは、解の性質を吟味するという理論的な意味合いだけでなく、実用上の意味もあることを強調したい。

なお、本報における解の誘導は松原が実施し、数値計算については浦野が行い、さらに研究全体の指導を星谷が担当した。

付録1 $I = \int_{H_1}^H z \phi_i(z) \phi_j(z) dz = 0 \ (i \neq j)$ の誘導

$z = H\zeta$ と置けば、

$$\int_{H_1}^H z \phi_i(z) \phi_j(z) dz = H^2 \int_r^1 \zeta \phi_i(\zeta H) \phi_j(\zeta H) d\zeta \quad (A1)$$

ここに、 $r = H_1 / H$ である。

式(20)を用いて

$$\begin{aligned} & \int_r^1 \zeta \phi_i(\zeta H) \phi_j(\zeta H) d\zeta \\ &= \int_r^1 \zeta^{1-b} \left[J_v(ax_i \zeta^k) - \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} N_v(ax_i \zeta^k) \right] \\ & \times \left[J_v(ax_j \zeta^k) - \frac{J_v(ax_j)}{N_v(ax_j)} N_v(ax_j \zeta^k) \right] d\zeta \end{aligned} \quad (A2)$$

ここに、 $k = (2 - b) / 2$, $a = 1 / k \cdot r^{b/2}$ である。

$$\begin{aligned} & \int_r^1 \zeta \phi_i(\zeta H) \phi_j(\zeta H) d\zeta \\ &= \int_r^1 \zeta^{1-b} \left[J_v(ax_i \zeta^k) J_v(ax_j \zeta^k) - \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} N_v(ax_i \zeta^k) J_v(ax_j \zeta^k) \right. \\ & \quad \left. - \frac{J_v(ax_j)}{N_v(ax_j)} J_v(ax_i \zeta^k) N_v(ax_j \zeta^k) \right. \\ & \quad \left. + \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} \frac{J_v(ax_j)}{N_v(ax_j)} N_v(ax_i \zeta^k) N_v(ax_j \zeta^k) \right] d\zeta \end{aligned} \quad (A3)$$

式(A3)の第一項に関して、 $\xi = \zeta^k$ と置けば、

$$\begin{aligned} & \int_r^1 \zeta^{1-b} J_v(ax_i \zeta^k) J_v(ax_j \zeta^k) d\zeta \\ &= \frac{1}{k} \int_r^1 \xi J_v(ax_i \xi) J_v(ax_j \xi) d\xi \end{aligned} \quad (A4)$$

ベッセル関数の積分公式⁹⁾

$$\begin{aligned} & \int z C_v(kz) \bar{C}_v(mz) dz \\ &= \frac{z}{k^2 - m^2} \{ k C_{v+1}(kz) \bar{C}_v(mz) - m C_v(kz) \bar{C}_{v+1}(mz) \} \end{aligned} \quad (A5)$$

($C_v, \bar{C}_v$: ベッセル関数)

を用いて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \int_r^1 \xi J_v(ax_i \xi) J_v(ax_j \xi) d\xi = \frac{1}{k} \frac{1}{a^2(x_i^2 - x_j^2)} \\ & \left[\{ ax_i J_{v+1}(ax_i) J_v(ax_j) - ax_j J_v(ax_i) J_{v+1}(ax_j) \} \right. \\ & \quad \left. - r^k \left\{ ax_i J_{v+1}(ax_i r^k) J_v(ax_j r^k) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. ax_j J_v(ax_i r^k) J_{v+1}(ax_j r^k) \right\} \right] \end{aligned} \quad (A6)$$

式(A3)の他の項に関しても同様の表示が得られるから、

$$\begin{aligned} & \int_r^1 \zeta \phi_i(\zeta H) \phi_j(\zeta H) d\zeta \\ &= \frac{1}{ka} \frac{1}{N_v(ax_i)} \frac{1}{N_v(ax_j)} \frac{1}{x_i^2 - x_j^2} \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\times r^k \begin{bmatrix} x_i \{ J_v(ax_i) N_{v+1}(ax_i r^k) - J_{v+1}(ax_i r^k) N_v(ax_i) \} \\ \times \{ J_v(ax_j r^k) N_v(ax_j) - J_v(ax_j) N_v(ax_j r^k) \} \\ - x_j \{ J_v(ax_i r^k) N_v(ax_i) - J_v(ax_i) N_v(ax_i r^k) \} \\ \times \{ J_v(ax_j) N_{v+1}(ax_j r^k) - J_{v+1}(ax_j r^k) N_v(ax_j) \} \end{bmatrix}$$

ここで, $ar^k = 2r/(2-b)$, $a = 2/(2-b) \cdot r^{b/2}$ およ
び式(16)より, $i \neq j$ のとき,

$$\int_r^1 \zeta \phi_i(\zeta H) \phi_j(\zeta H) d\zeta = 0 \quad (\text{A8})$$

すなわち, $i \neq j$ のとき, $I = 0$ が成立する。

付録2 刺激係数 μ_i の表示式

$z = H\zeta$ と置けば

$$\mu_i = \frac{\int_H^1 z \phi_i(z) dz}{\int_H^1 z \{\phi_i(z)\}^2 dz} = \frac{\int_r^1 \zeta \phi_i(H\zeta) d\zeta}{\int_r^1 \zeta \{\phi_i(H\zeta)\}^2 d\zeta} \quad (\text{A9})$$

ここに, $r = H_1/H$ である。

また,

$$\phi_i(\zeta H) = \zeta^{\frac{b}{2}} \left[J_v(ax_i \zeta^{\frac{1}{2}}) - \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} N_v(ax_i \zeta^{\frac{1}{2}}) \right] \quad (\text{A10})$$

ここに, $a = 2/(2-b) \cdot r^{b/2}$, $k = (2-b)/2$ である。
式(A9)の分子の計算を行う。

$$\int_r^1 \zeta \phi_i(H\zeta) d\zeta = \int_r^1 \zeta^{\frac{b}{2}} \left[J_v(ax_i \zeta^{\frac{1}{2}}) - \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} N_v(ax_i \zeta^{\frac{1}{2}}) \right] d\zeta \quad (\text{A11})$$

式(A11)で $\xi = \zeta^{\frac{1}{2}}$ と置き, さらに $t = ax_i \xi$ と置けば,

$$\int_r^1 \zeta \phi_i(H\zeta) d\zeta = \frac{1}{k(ax_i)^{v+2}} \int_{ax_i r^{\frac{1}{2}}}^{ax_i} t^{v+1} \left[J_v(t) - \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} N_v(t) \right] dt \quad (\text{A12})$$

ここに, $v = b/(2-b)$ である。

式(A12)において, ベッセル関数に関する以下の公式⁹⁾

$$\int z^{\nu+1} C_\nu(z) dz = z^{\nu+1} C_{\nu+1}(z) \quad (C_\nu: \text{ベッセル関数}) \quad (\text{A13})$$

$$J_\nu(z) N_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z) N_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z} \quad (\text{A14})$$

を用い, 式(16)を考慮すれば, 次式が得られる。

$$\int_r^1 \zeta \phi_i(H\zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \frac{2-b}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x_i^2} \frac{1}{N_v(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i)} \quad (\text{A15})$$

次に式(A9)の分母の計算を行う。

$$\int_r^1 \zeta \{\phi_i(H\zeta)\}^2 d\zeta = \int_r^1 \zeta^{1-b} \left\{ J_v(ax_i \zeta^{\frac{1}{2}}) - \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} N_v(ax_i \zeta^{\frac{1}{2}}) \right\}^2 d\zeta \quad (\text{A16})$$

ここで, $\xi = \zeta^{\frac{1}{2}}$ と置けば

$$\int_r^1 \zeta \{\phi_i(H\zeta)\}^2 d\zeta = \frac{1}{k} \int_r^1 \xi \left\{ J_v(ax_i \xi) + \frac{J_v(ax_i)^2}{N_v(ax_i)^2} N_v(ax_i \xi)^2 - 2 \frac{J_v(ax_i)}{N_v(ax_i)} J_v(ax_i \xi) N_v(ax_i \xi) \right\} d\xi \quad (\text{A17})$$

式(A17)において, 以下の積分公式⁹⁾

$$\int z C_\nu(kz)^2 dz = \frac{z^2}{2} \{ C_\nu(kz)^2 - C_{\nu-1}(kz) C_{\nu+1}(kz) \} \quad (\text{A18})$$

$$\int z C_\nu(kz) \overline{C}_\nu(kz) dz = \frac{z^2}{4} \left\{ 2 C_\nu(kz) \overline{C}_\nu(kz) - C_{\nu-1}(kz) \overline{C}_{\nu+1}(kz) - C_{\nu+1}(kz) \overline{C}_{\nu-1}(kz) \right\} \quad (\text{A19})$$

を用い, さらに(A14)と式(16)を考慮すれば

$$\begin{aligned} \int_r^1 \zeta \{\phi_i(H\zeta)\}^2 d\zeta &= \frac{1}{\pi^2} \frac{2-b}{r^b} \frac{1}{x_i^2} \frac{1}{N_v(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i)^2} \\ &\times \left[1 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{2}{2-b} \right)^2 x_i^2 r^2 \left\{ J_v\left(\frac{2}{2-b} r x_i\right) N_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - J_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) N_v\left(\frac{2}{2-b} r x_i\right) \right\}^2 \right] \quad (\text{A20}) \end{aligned}$$

式(A20)において

$$\begin{aligned} J_v\left(\frac{2}{2-b} r x_i\right) N_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) - J_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) N_v\left(\frac{2}{2-b} r x_i\right) \\ = r^{\frac{b}{2}} N_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) \cdot \phi_i(rH) \quad (\text{A21}) \end{aligned}$$

を考慮すれば

$$\begin{aligned} \int_r^1 \zeta \{\phi_i(H\zeta)\}^2 d\zeta &= \frac{1}{\pi^2} \frac{2-b}{r^b} \frac{1}{x_i^2} \frac{1}{N_v(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i)^2} \\ &\times \left[1 - \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{2}{2-b} r^{\frac{b+2}{2}} x_i N_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) \phi_i(rH) \right\}^2 \right] \quad (\text{A22}) \end{aligned}$$

式(A15)および(A22)を考慮することにより

$$\mu_i = \frac{\pi N_v(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i)}{1 - \left\{ \frac{\pi}{2-b} r^{\frac{b+2}{2}} x_i N_v\left(\frac{2}{2-b} r^{\frac{b}{2}} x_i\right) \phi_i(rH) \right\}^2} \quad (\text{A23})$$

ここに, $v = b/(2-b)$ である。

式(A23)で, $b = 0$ とすれば

$$\mu_i = \frac{\pi N_0(x_i)}{1 - \left\{ \frac{\pi}{2} r x_i N_0(x_i) \phi_i(rH) \right\}^2} \quad (\text{A24})$$

となり, 均質な場合の結果³⁾に一致する。

参考文献

- 1) S. Okamoto, C. Tamura, K. Kato: Earthquake Response of Fill type Dam, Proc. of 3rd Japan Earthquake Engineering Symposium, pp.461-468, 1970.
- 2) 岡本舜三：耐震工学，オーム社，1971.
- 3) 松原勝己，浦野和彦：盛土地盤に対する実用的な地震応答計算法，第25回地震工学研究発表会講演論文集，pp.429-432，1999.
- 4) 松村孫治：震動による土堰堤の変形，土木試験所報告，第28号，1934.
- 5) 土木学会編：地震応答解析と実例，pp.263-265，1973.
- 6) 例えば足立紀尚，龍岡文夫：土木学会編新体系土工学 18 土の力学（Ⅲ）－圧密・せん断・動的解析－，技報堂出版，1981.
- 7) 寺澤寛一：自然科学者のための数学概論，岩波書店，pp.492-493，1977.
- 8) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編，1990.
- 9) 吉田耕作，雨宮綾夫，伊藤清，加藤俊夫，松島興三，古屋茂：応用数学便覧，pp.399-453，丸善，1967.

(1999年9月17日受付)