

切断正規確率場の空間推定と条件付シミュレーション

Spatial Estimation and Conditional Simulation of Truncated Gaussian Fields

野田 茂*, 星谷 勝**

Shigeru Noda, Masaru Hoshiya

*工博, 鳥取大学助教授, 工学部社会開発システム工学科 (〒680-0945 鳥取市湖山町南4-101)

**Ph. D., 武蔵工業大学教授, 工学部土木工学科 (〒158-0087 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

This paper proposes the method for estimating the conditional mean and conditional variance of truncated Gaussian fields at an unobservation point under the condition that some of their realizations are observed and known. The method of conditional simulation is also developed. An example of a one-dimensional stochastic field is given to verify the effectiveness and accuracy of the proposed procedures. The results are compared with ones computed by nonstochastic methods and Kriging of Gaussian fields. It is found that the conditional mean and conditional variance are dependent of the realization values. This is a remarkable difference from the case of conditional Gaussian fields.

Key Words: truncated Gaussian distribution, stochastic field, spatial statistics, interpolation and extrapolation, conditional simulation, nonstochastic method

1. 序論

物理量の時間的变化を取り扱う問題は一般に確率過程と呼ばれる。また、空間座標での変動あるいは時空間座標での変動を取り扱う確率過程は確率場として表現される。このような確率過程あるいは確率場に関する研究はこれまで種々の分野で行われてきた。時空間分布を考慮するためには異なる2地点における物理量の相関特性が必要である。確率モデル解析の一例としては、地震荷重、風荷重、波浪荷重などを受ける構造物の確率論的解析法が挙げられる。その際、不確定性の取り扱いに確率論や統計学の数学的手法が積極的に用いられてきた。

モデル化に当たっては観測値が用いられる。その観測値の一般的な特徴は、データが等時間間隔で得られること、得られたデータには様々な時間・空間スケールを有する現象が混在していることなどである。空間的にまたは時間的に多数のデータを得ることは困難なので、エルゴード性を仮定することが多い。これは空間変動と時間変動が等価であること、すなわち時間的に観測されたデータは空間的構造を有するデータがその観測点を通過したこと意味し、空間的統計量と時間的統計量が等しいということを示している。これにより時間データ解析法と空間データ解析法は同等なものとして取り扱われる。空間場の確率構造はこのエルゴード性によってモデル化される。

一方、間欠的にあるいは有限地点で得られた観測値を条件として、観測前に表現された確率過程あるいは確率場を更新して得られる事後の確率過程・確率場は条件付確率過程・条件付確率場と呼ばれる。条件付推定

問題においては有限個の観測値を基にして間欠点あるいは未観測点における物理量が推定されるが、事前与えられた情報を観測値を基にして更新するので、更新された推定値は事前情報よりも真値に近づくことになる。ただし、ノイズが存在しなければ、観測点における推定値は観測値と完全に一致することが条件である。

条件付シミュレーションに関しては、平均値としての推定よりもサンプル場を知ること重点が置かれており、確率的に記述された変数に対して観測値を通る時空間サンプル実現値が具体的に求められる。ただしこのシミュレーションを充分数多く行ってそのサンプル平均値を求めると、それは推定された平均値と一致する。この実現値をビジュアル化することは物理量の空間的な連続性、異常値分布の出現状況などを把握する上で欠かせない。

物理量が正規分布に従うときの条件付推定問題、条件付シミュレーション法に関しては、星谷¹⁾、星谷・桑名²⁾、Shinozuka and Zhang³⁾が先駆的な研究を行っている。特に文献2)、3)では不偏推定・最小誤差共分散規範に基づくKriging法の結果が決して統計的方法による近似解によるのではなく、条件付確率場における厳密な理論を構築していることを示している。またこれら3つの文献においては、線形補間式による推定量、観測点の確率変数がそれぞれ推定誤差項と直交するという性質を活かして、従来の条件付シミュレーション方式に比べて著しい改善化を図り、推定誤差分散を用いた簡単な漸次拡張方式で複数点のサンプル場をシミュレートする方法を提示している。

これに対して、星谷・野田・稲田⁴⁾は、非正規確率場における条件付推定理論ならびに条件付シミュレー

ション法を提案した。そこでは一般的な非正規分布に従う定式化が行われており、数値解析ならびに理論解析においては5つの非正規分布(対数正規分布、指数分布、Rayleigh分布、Gumbel分布、一様分布)に適用して提案手法の妥当性を検証している。その理論は、条件付正規確率場の推定手法と非正規確率変数の正規確率変数への変換を組み合わせ条件付確率密度関数を定義することを基本としている。

また、Elishakoff, Ren and Shinozuka⁵⁾は、星谷⁴⁾と同様に非正規確率場の条件付シミュレーション法を示しているが、解析解に基づくのではなく数値シミュレーションによる反復解法を計算の骨子としている。その手法はYamazaki and Shinozuka⁶⁾による非正規確率場の無条件シミュレーション法を条件付確率場に拡張したものである。その考え方によれば、まず、非正規確率変数を相関特性を考慮せずに正規確率変数に変換し、条件付正規確率場において星谷¹⁾の方法によってサンプル実現値を得る。その上で、それを与えられた非正規確率場に変換したサンプル間の相関係数を求め、その値が目標の設定値と一致するまで反復的に収束計算を繰り返さなければならない。数値解析では切断正規分布、正規分布と指数分布の混合分布、指数分布よりなる非正規確率場を対象としている。

このように最近では条件付確率場解析に分布形の情報を積極的に組み込んで現実的な非正規確率場を推定したり、条件付シミュレーション法によってサンプル実現値を得たりする研究が実施されるようになった。しかしながらその対象としては分布形の型のみに関心が集中しているが、現実にはFig.1に示すように正規分布の下方裾部に裾切りを有するような切断正規確率場に関する定量的な議論はほとんど行われていない。

海洋波の流速ベクトル値、地震動最大加速度、地盤定数(粘着力、圧密係数)などの頻度分布を調べると、Fig.1のように正規分布の裾切り位置0に対応する切断正規分布を示すことがある。また現実には人為的に存在させている場合もあると考えられる分布形の裾切りを有する条件付推定問題に関してはElishakoff et al.の研究成果を除くとほとんど言及されていない。Elishakoff et al.はこの切断正規確率場の重要性を認めた上で、条件付シミュレーション結果を示しているものの、解析的な取り扱いについて検討していない。裾切り位置に対応する非超過確率が小さい場合には切断正規確率場を正規確率場で近似できるものと考え、条件付切断正規確率場の代わりに条件付正規確率場を分析することがある。これは従来の正規確率場理論をそのまま踏襲できると、理論的な取り扱いが簡単になるためと考えられる。しかしながら対象とするシステムが非線形であった場合、あるいはばらつきが大きく裾切りの影響を無視できない場合には条件付正規確率場理論の適用

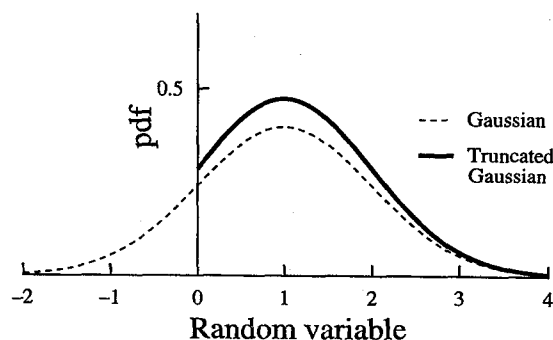


Fig.1 Marginal probability density functions for truncated Gaussian and corresponding Gaussian fields

は厳しい制約を受けることになる。

以上のことから、本論文では正規分布の裾切りを有する条件付切断正規確率場の推定理論を数値解析によらず解析的に導いている。従って、裾切りの有無が未観測点での条件付特性値(条件付平均値、条件付分散、推定誤差分散)に及ぼす影響に関して理論的な検証を容易に行うことができる。またこの推定理論に基づき、観測値を条件にして未観測点でのサンプル実現値を得るシミュレーション法を提案した上で、数値計算による検討を行うことにより、その有効性を示す。さらに、確定的補間手法(Aitken-Lagrange補間法、B-spline関数法、重みに放物曲線関数を用いた補間法)による推定結果との対比から、事前確率場を更新することの意味について議論する。本研究では条件付正規確率場と条件付切断正規確率場の本質的な違いについても分析を行う。これらのことからわかるように条件付切断正規確率場の理論解を陽に示そうとしていること、その特性、確定的補間法との相違点を明らかにしようとしていることは文献⁴⁾の内容と異なる点である。

2. 無条件切断正規確率場

2.1 問題の設定

正規分布形に下限値(いわゆる裾切り)が存在する非正規・非均一確率場において、離散空間位置 x_i における物理量の確率変数を w_i とする。このとき $n-1$ 箇所の地点 $x_i(i=1 \sim n-1)$ において観測が行われ、観測値 $W(x_i)(i=1 \sim n-1)$ が得られたとする。本論の問題は既知の観測値 $W(x_i)$ を用いて未観測点 x_n における物理量の推定値を得ることである。なお、下線は確定値としてのサンプル実現値を、下線のつかないのは確率変数を意味する。

推定値を得るためには、確率変数 $\mathbf{W}_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$ を用いて、未観測点 x_n における物理量 w_n に関する条件付確率密度関数(cpdf)を定義する必要がある。ここではこのcpdfを定めた上で、 w_n の条件付特性値

(条件付平均値, 条件付分散) を推定する理論式を導く。またその理論式を基にして, 未観測点 x_n におけるサンプル実現値の条件付シミュレーション手法を示す。

上記条件付推定理論, 条件付シミュレーション手法を検討するためには無条件確率場の特性値が事前情報として与えられていなければならない。そこで本章では無条件確率密度関数, 無条件平均値, 無条件分散について議論する。

Fig.1 に示すように正規分布形の下方裾部に裾切りがあると, 確率密度関数 (pdf) は正規分布の確率密度関数から変化する。このような裾切りは確率変数が非負となる条件を考慮したものである。本論文では正規分布に裾切りを有する非正規分布を切断正規分布と呼んでいる。

切断正規分布の確率変数 w_i は正規分布の確率変数 v_i と関連づけられる。そこで正規分布に従う確率変数 $V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T$ については, 観測結果または既往の先験知識によって与えられる事前情報に関する以下の仮定を設ける。なお実問題においてはこれら情報は w_i のサンプルデータから得られるものである。

- 1) 任意地点 x_i における確率変数 v_i の周辺確率密度関数 $f_{V_i}(v_i)$ は事前に与えられる。このとき無条件平均値 μ_{V_i} と無条件分散 $\sigma_{V_i}^2$ は既知である。
- 2) x_i, x_j 地点の確率変数 v_i, v_j の無条件共分散 $C(V_i, V_j) = E[(v_i - \mu_{V_i})(v_j - \mu_{V_j})]$ は推定されている。これより無条件分散 $\sigma_{V_i}^2$ は $C(V_i, V_i)$ で表せる。

条件付推定値問題, 条件付シミュレーションの定式化は非均一確率場を対象にしているので, 一般的に無条件平均値 μ_{V_i} , 無条件分散 $\sigma_{V_i}^2$ は位置 x_i の関数であり, 共分散 $C(V_i, V_j)$ は x_i と x_j の関数となる。共分散は2地点間距離すなわち相関距離によって支配され, この距離が大きくなるほど共分散は小さくなる特徴を有する。

2.2 切断正規分布の無条件特性値

正規分布に従う確率変数の無条件特性値 ($\mu_{V_i}, \sigma_{V_i}^2$) が既知のとき, これを用いて切断正規分布に従う確率変数の無条件特性値 (無条件平均値 μ_{W_i} , 無条件分散 $\sigma_{W_i}^2$) を求める。

正規分布の確率変数の定義域を正として0で切断 (裾切り) する場合, 無条件確率密度関数 $t_{W_i}(w_i)$ は $f_{V_i}(v_i)$ を用いると, 次式で表せる。

$$\begin{aligned} t_{W_i}(w_i) &= \frac{1}{1 - P_i} f_{V_i}(v_i) H(v_i) \\ &= \frac{1}{(1 - P_i)\sigma_{V_i}} \varphi\left(\frac{w_i - \mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) H(w_i) \quad (1) \end{aligned}$$

ここに, $\varphi(\cdot)$ は標準正規確率密度関数, $H(\cdot)$ はHeavisideの単位ステップ関数である。また P_i は標準正規確

率分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いて次式で表せる。

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_{V_i}} \varphi\left(\frac{v_i - \mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) dv_i \\ &= \Phi\left(-\frac{\mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

式(1)より, 無条件平均値 μ_{W_i} は

$$\begin{aligned} \mu_{W_i} &= \int_0^{\infty} w_i t_{W_i}(w_i) dw_i \\ &= \mu_{V_i} + \frac{\sigma_{V_i}}{1 - P_i} \varphi\left(\frac{\mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

で, 無条件分散 $\sigma_{W_i}^2$ は上式の μ_{W_i} を用いると,

$$\begin{aligned} \sigma_{W_i}^2 &= \int_0^{\infty} w_i^2 t_{W_i}(w_i) dw_i - \mu_{W_i}^2 \\ &= \mu_{V_i}^2 + \sigma_{V_i}^2 + \frac{\mu_{V_i}\sigma_{V_i}}{1 - P_i} \varphi\left(\frac{\mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) - \mu_{W_i}^2 \\ &= \sigma_{V_i}^2 - \frac{\mu_{V_i}\sigma_{V_i}}{1 - P_i} \varphi\left(\frac{\mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) \\ &\quad - \left\{ \frac{\sigma_{V_i}}{1 - P_i} \varphi\left(\frac{\mu_{V_i}}{\sigma_{V_i}}\right) \right\}^2 \quad (4) \end{aligned}$$

と表せる。

分布形がその下方裾部で裾切りされる場合, 式(3)よりわかるように裾切り後の分布形の平均値は裾切り前の分布形の平均値よりも大きくなっている。また式(4)からわかるように, 裾切り前の分散に比べて, 裾切り後の分布形の分散は小さい。従って分布形の裾切りにより, 変動係数は小さくなる。下方裾部への広がりが多い分布形ほど, 裾切りの効果は大きいと言える。

2.3 切断正規分布の結合確率密度関数

今, 確率変数 V_n の平均値ベクトルを $\bar{V}_n = \{\mu_{V_1}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_n}\}^T$, 共分散 $C(V_i, V_j) (i, j = 1 \sim n)$ よりなる共分散行列を C_{V_n} と表す。すると V_n の結合確率密度関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{V_n}(V_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_{V_n}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(V_n - \bar{V}_n)^T C_{V_n}^{-1} (V_n - \bar{V}_n)\right\} \quad (5) \end{aligned}$$

上式より v_i の負の値が裾切りされるとき, 切断正規分布の結合確率密度関数は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} t_{W_n}(W_n) &= \frac{1}{1 - P_1^n} f_{V_n}(V_n) \prod_{i=1}^n H(v_i) \\ &= \frac{1}{1 - P_1^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_{V_n}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(W_n - \bar{V}_n)^T \right. \\ &\quad \cdot C_{V_n}^{-1} (W_n - \bar{V}_n) \left. \right\} \prod_{i=1}^n H(w_i) \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)の P_1^n は次式で求められる。

$$P_1^n = \int_{-\infty}^0 \cdots \int_{-\infty}^0 f_{V_n}(V_n) dV_n$$

$$= \prod_{i=1}^n \Phi \left(-\frac{\mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}} \right) \quad (7)$$

ただし、共分散行列 C_{V_n} の固有値解析によって得られた固有値が $\sigma_{Y_i}^2$ ($i = 1 \sim n$)である。その固有値に対する固有ベクトルからなる直交行列 T_n を用いると、 $\bar{Y}_n = \{\mu_{Y_1}, \mu_{Y_2}, \dots, \mu_{Y_n}\}^T$ は $\bar{Y}_n = T_n^{-1} \bar{V}_n$ で表せる。このようにして得られた μ_{Y_i}, σ_{Y_i} ($i = 1 \sim n$)を用いると、式(7)の P_1^n を計算することができる。

3. 切断正規分布に従う条件付確率場の推定理論と条件付シミュレーション

3.1 条件付確率密度関数

式(6)より、確率変数 w_i ($i = 1 \sim n-1$)が与えられた条件下における確率変数 w_n の条件付確率密度関数は密度関数の性質(後述の式(13))をもたせるための定数 a を用いると、次式のように表せる。

$$\begin{aligned} t_{W_n}(w_n | C) &= at_{W_n}(W_n)/t_{W_{n-1}}(W_{n-1}) \\ &= \frac{1 - P_1^{n-1}}{1 - P_1^n} \frac{f_{V_n}(V_n)}{f_{V_{n-1}}(V_{n-1})} aH(v_n) \\ &= \frac{1 - P_1^{n-1}}{(1 - P_1^n)\sigma_{V_n|C}} \\ &\quad \cdot \varphi \left(\frac{w_n - \mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) aH(w_n) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $t_{W_n}(w_n | C)$ は $t_{W_n}(w_n | w_1, \dots, w_{n-1})$ を意味し、簡単のため任意の確率変数 v_n の条件 $v_n | v_1, \dots, v_{n-1}$ を以下 $v_n | C$ と表す。 P_1^{n-1} は共分散行列 $C_{V_{n-1}}$ の固有値 $\sigma_{Y_i}^2$ ならびに直交行列 T_{n-1} を用いて得られる $\bar{Y}_{n-1} = \{\mu'_{Y_1}, \mu'_{Y_2}, \dots, \mu'_{Y_{n-1}}\}^T = T_{n-1}^{-1} \bar{V}_{n-1}$ を用いると、式(7)と同様にして次式で求められる。

$$P_1^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \Phi \left(-\frac{\mu'_{Y_i}}{\sigma'_{Y_i}} \right) \quad (9)$$

式(8)において $\mu_{V_n|C}, \sigma_{V_n|C}$ はそれぞれ正規確率場における条件付平均値、条件付分散を意味し、次式で与えられる^{1)~3)}。

$$\mu_{V_n|C} = \mu_{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (w_i - \mu_{V_i}) \quad (10)$$

$$\sigma_{V_n|C}^2 = \sigma_{V_n}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C(V_i, V_n) \quad (11)$$

ここに、重み係数 λ_i ($i = 1 \sim n-1$)は次式の連立方程式を解くことによって求められる。

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j C(V_i, V_j) = C(V_i, V_n) \quad (i = 1 \sim n-1) \quad (12)$$

上式より、未観測点 x_n が観測点 x_j と一致すると、すなわち $j = n$ のとき $\lambda_j = 1$ となり、 $j \neq n$ のとき $\lambda_j = 0$ となることがわかる。この条件から未観測点が観測点に一致すると、式(10)より $\mu_{V_j|C} = w_j$ 、式(11)より

$\sigma_{V_j|C}^2 = 0$ が成立する。すなわち正規確率場において条件付分散が0となるので、同条件付平均値は観測点における確率変数と完全に一致する。このことが条件付確率場を構成している制約条件であると言える。

式(8)において次式を満たすように

$$\int_0^\infty t_{W_n}(w_n | C) dw_n = 1 \quad (13)$$

定数 a を決めることにより、切断正規分布の条件付確率密度関数は次のように定義される。

$$\begin{aligned} t_{W_n}^*(w_n | C) &= \frac{1}{(1 - P_C)\sigma_{V_n|C}} \\ &\quad \cdot \varphi \left(\frac{w_n - \mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) H(w_n) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ここに、} P_C = \Phi \left(-\frac{\mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) \quad (15)$$

式(1)の無条件確率密度関数と式(14)の条件付確率密度関数を比べるとわかるように、式(14)は $\mu_{V_n}, \sigma_{V_n}, P_n$ の代わりに $\mu_{V_n|C}, \sigma_{V_n|C}, P_C$ を用いているにすぎない。ただし x_n 地点が x_i ($i = 1 \sim n-1$)地点に一致することを前提に条件付確率密度関数を考えると、このときには式(14)の代わりに δ 関数を用いて次式で条件付確率密度関数を定義しなければならない。

$$t_{W_n}^*(w_n | C) = \delta(w_n - w_i) \quad (16)$$

3.2 条件付特性値の誘導

切断正規確率場における条件付平均値 $\mu_{W_n|C}$ は式(14)の条件付確率密度関数を用いると、次式で定義できる。

$$\begin{aligned} \mu_{W_n|C} &= \int_0^\infty w_n t_{W_n}^*(w_n | C) dw_n \\ &= \mu_{V_n|C} + \frac{\sigma_{V_n|C}}{1 - P_C} \varphi \left(\frac{\mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 P_C は式(15)で、 $\mu_{V_n|C}$ は式(10)で、 $\sigma_{V_n|C}^2$ は式(11)で表せる。

一方、条件付分散は上式の条件付平均値を用いると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{W_n|C}^2 &= \int_0^\infty w_n^2 t_{W_n}^*(w_n | C) dw_n - \mu_{W_n|C}^2 \\ &= \mu_{V_n|C}^2 + \sigma_{V_n|C}^2 + \frac{\mu_{V_n|C} \sigma_{V_n|C}}{1 - P_C} \\ &\quad \cdot \varphi \left(\frac{\mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) - \mu_{W_n|C}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

式(17)と式(3)、式(18)と式(4)の比較からわかるように、条件付平均値、条件付分散の理論式は無条件平均値、無条件分散の式において、 $\mu_{V_n}, \sigma_{V_n}, P_n, \mu_{W_n}$ にそれぞれ $\mu_{V_n|C}, \sigma_{V_n|C}, P_C, \mu_{W_n|C}$ の条件付特性値を代入することにより求められ、式の基本に変わりはない。

観測点 x_n が未観測点 x_j に一致すると、 $\mu_{V_n|C}, \sigma_{V_n|C}, P_C$ はそれぞれ $w_j, 0, 0$ となる。このようなときには式(16)を式(17)に代入すると、 $\mu_{W_j|C} = w_j$ と求められる。

また式(18)の右辺第1式第1項に式(16)を代入すると、この項は w_j^2 となり、結局 $\sigma_{W_j|C}^2 = 0$ と求められる。

ところで未観測点 x_n が観測点 $x_i (i = 1 \sim n-1)$ よりも遠方に位置すると、式(12)において $C(V_i, V_n)$ はほぼ0となり、観測点間の共分散 $C(V_i, V_j)$ が有限の値となることを勘案すると、重み係数 $\lambda_i (i = 1 \sim n-1)$ は0に近い値とならなければならない。従ってこのように観測点よりも遠方場において条件付推定を行う場合には式(10)、(11)より、正規確率場における条件付平均値 $\mu_{V_n|C}$ 、条件付分散 $\sigma_{V_n|C}^2$ はそれぞれ無条件平均値 μ_{V_n} 、無条件分散 $\sigma_{V_n}^2$ に近づくようになる。その結果式(17)と式(3)、式(18)と式(4)の比較分析からわかるように、遠方未観測点における切断正規確率場の条件付平均値 $\mu_{W_n|C}$ 、条件付分散 $\sigma_{W_n|C}^2$ は無条件平均値 μ_{W_n} 、無条件分散 $\sigma_{W_n}^2$ に漸近していく特徴がある。

なお、観測値 $W(x_i) (i = 1 \sim n-1)$ が具体的に与えられたときには条件 $\nu_n|C$ の代わりに $\nu_n|C$ すなわち $\nu_n|W(x_1), W(x_2), \dots, W(x_{n-1})$ としなければならない。従ってこのときの条件付平均値は

$$\mu_{W_n|C} = \mu_{V_n|C} + \frac{\sigma_{V_n|C}}{1 - P_C} \varphi \left(\frac{\mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) \quad (19)$$

$$\text{ただし, } \mu_{V_n|C} = \mu_{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda (W(x_i) - \mu_{V_i}) \quad (20)$$

$$\sigma_{V_n|C}^2 = \sigma_{V_n}^2 \quad (21)$$

となり、条件付分散は

$$\begin{aligned} \sigma_{W_n|C}^2 &= \mu_{V_n|C}^2 + \sigma_{V_n|C}^2 + \frac{\mu_{V_n|C} \sigma_{V_n|C}}{1 - P_C} \\ &\quad \cdot \varphi \left(\frac{\mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) - \mu_{W_n|C}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

で求められる。

式(19)、(22)よりわかるように、正規分布の下方裾切りを有する切断正規確率場の条件付平均値 $\mu_{W_n|C}$ 、条件付分散 $\sigma_{W_n|C}^2$ は観測値によって決められる $\mu_{V_n|C}$ を各評価式に含んでおり、その値は観測値に依存している。正規確率場では式(20)で示される条件付平均値は観測値に依存するが、式(21)の条件付分散は観測値に独立である。このように切断正規確率場と正規確率場における条件付特性値に相違点が存在することを解析的に見出した点は本論文の一つの成果である。

3.3 最適推定値に関する検討

未観測点における条件付平均値が不偏性と最小誤差分散条件を満たす最適推定量に一致することを以下に示す。

未観測点における物理量 w_n の最適推定量 $\widehat{W}_n$ は推定誤差分散を最小にするように決めることができる。推定誤差分散は次式で与えられる。

$$E[(w_n - \widehat{W}_n)^2]$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_{W_{n-1}}(W_{n-1}) \\ &\quad \cdot \left(\int_0^\infty (w_n - \widehat{W}_n)^2 t_{W_n}^*(w_n | C) dw_n \right) dW_{n-1} \end{aligned} \quad (23)$$

上式の推定誤差分散が最小となるためには、次式の条件付誤差分散を最小とするように $\widehat{W}_n$ を決めればよいことになる。

$$\int_0^\infty (w_n - \widehat{W}_n)^2 t_{W_n}^*(w_n | C) dw_n \quad (24)$$

式(24)を最小とする最適推定量 $\widehat{W}_n$ の条件は上式を $\widehat{W}_n$ で偏微分をとり、その値を0とすればよいので、これより次式が得られる。

$$\begin{aligned} \widehat{W}_n &= \int_0^\infty w_n t_{W_n}^*(w_n | C) dw_n \\ &= \mu_{W_n|C} \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)より最小推定誤差分散条件を満たす最適推定量は条件付平均値に一致することがわかる。ここで、 $\widehat{W}_n, \mu_{W_n|C}$ は確率変数なので、 $\widehat{W}_n$ の期待値 $E[\widehat{W}_n]$ を求めると、式(25)から

$$\begin{aligned} E[\widehat{W}_n] &= E[\mu_{W_n|C}] \\ &= \mu_{W_n} \\ &= E[w_n] \end{aligned} \quad (26)$$

が成り立つので、式(25)は不偏推定式であり、かつ最小誤差分散式となっていることがわかる。

サンプル実現値すなわち観測値 $W(x_i) (i = 1 \sim n-1)$ が与えられた条件下では最適推定値 $\widehat{W}_n$ が式(25)より次のように求められる。

$$\widehat{W}_n = \mu_{W_n|C} \quad (27)$$

一方、推定誤差分散は式展開をすると、

$$\begin{aligned} E[(w_n - \widehat{W}_n)^2] &= E[w_n^2] - 2E[w_n \widehat{W}_n] + E[\widehat{W}_n^2] \\ &= E[w_n^2] - E[\widehat{W}_n^2] \end{aligned} \quad (28)$$

のようになる。右辺第2式第1項の $E[w_n^2]$ は式(4)より

$$E[w_n^2] = \mu_{V_n}^2 + \sigma_{V_n}^2 + \frac{\mu_{V_n} \sigma_{V_n}}{1 - P_n} \varphi \left(\frac{\mu_{V_n}}{\sigma_{V_n}} \right) \quad (29)$$

と求められる。

式(28)の右辺第2式第2項は条件付平均値(式(17))および結合確率密度関数(式(6))を用いて W_{n-1} に関する積分に置き換えると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} E[\widehat{W}_n^2] &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\{ \mu_{V_n|C} + \frac{\sigma_{V_n|C}}{1 - P_C} \varphi \left(\frac{\mu_{V_n|C}}{\sigma_{V_n|C}} \right) \right\}^2 \\ &\quad \cdot t_{W_{n-1}}(W_{n-1}) dW_{n-1} \end{aligned} \quad (30)$$

上式の被積分関数には積分変数 $w_i (i = 1 \sim n-1)$ に依存した正規確率場の条件付平均値 $\mu_{V_n|C}$ (式(10))を含んでいる。従ってその解析解を得ることは容易ではなく、式(30)の算出に当たっては数値積分を用いざるを得ない。

式(28)~(30)で示される推定誤差分散の評価式では $\mu_{V_n|C}$ が W_{n-1} に関する積分の中に含まれるため、推定

誤差分散の値は観測点位置のみに依存し、観測値に独立であることがわかる。このことは、条件付平均値(式(19))、条件付分散(式(22))が観測値によって決められる $\mu_{V_n|C}$ を評価式に含み、観測値に依存することと異なる。さらに、式(22)の条件付分散と式(28)~(30)の推定誤差分散の式が異なることも明らかである。このような特徴は切断正規確率場に限らず、一般的な非正規確率場においても成り立つことが星谷・野田・稲田⁴⁾によって明らかにされている。しかしながらこの重要な性質についてはあまり広く認識されておらず、そのために解釈、考え方、理論に不備が見られる場合がある。

Elishakoff, Ren and Shinozuka⁵⁾は、Yamazaki and Shinozuka⁶⁾による非正規確率場の無条件シミュレーション法と、星谷¹⁾による正規確率場の条件付シミュレーション法を組み合わせた反復解法により、条件付サンプル平均値と条件付サンプル分散値を求めている。本論で対象とした切断正規確率場の数値シミュレーションも実施した結果、条件付サンプル平均値はサンプル実現値に依存するが、条件付サンプル分散値はサンプル実現値に無関係に決まると指摘している。しかしながらこの指摘は上記理論解の誘導からわかるように正確ではない。また切断正規確率場の条件付分散と推定誤差分散が異なるという重要な性質は得られていない。これは、解析的な評価を行わずに収束計算を伴う数値シミュレーションを実施したために見出されなかったものと考えられる。

3.4 サンプル場の条件付シミュレーション

ここではサンプル実現値 $W(x_i)(i = 1 \sim n-1)$ が与えられた条件下で、未観測点 x_n においてサンプル実現値を得る条件付シミュレーション法の手順を以下に示す。

確率変数 $w_i(i = 1 \sim n)$ について、各変数 w_i の周辺確率密度関数は式(1)で与えられる。また条件付周辺確率密度関数は式(14)のようである。同式より w_n の条件付確率分布関数 $T_{W_n}^*(w_n | C)$ は正規確率変数 v_n の周辺確率分布関数 $F_{V_n}^C(v_n)$ (条件付平均値 $\mu_{V_n|C}$ 、条件付分散 $\sigma_{V_n|C}^2$)を用いると、

$$T_{W_n}^*(w_n | C) = \{F_{V_n}^C(w_n) - P_C\} / (1 - P_C) \quad (31)$$

で与えられる。同関数は連続な増加関数であるので、確率変数 w_n は等価正規変換によって正規確率変数 v_n に変換できる。

正規分布における周辺確率分布関数は $F_{V_n}^C(v_n)$ であるので、

$$T_{W_n}^*(w_n | C) = F_{V_n}^C(v_n) \quad (32)$$

を満たす切断正規確率変数 w_n と正規確率変数 v_n の関係は

$$\begin{aligned} w_n &= F_{V_n}^C{}^{-1} \{P_C + (1 - P_C)F_{V_n}^C(v_n)\} \\ &= h(v_n) \end{aligned} \quad (33)$$

で表せる。ただし $F_{V_n}^C, F_{V_n}^C{}^{-1}$ の計算には $\mu_{V_n|C}, \sigma_{V_n|C}^2$ を必要とする。

よって条件付シミュレーションに当たっては、始めに、切断正規確率場における観測値 $W(x_i)(i = 1 \sim n-1)$ を用いて、未観測点 x_n におけるサンプル実現値 $V(x_n)$ を正規分布 $N(\mu_{V_n|C}, \sigma_{V_n|C}^2)$ に従う乱数値として次式のように与える。

$$V(x_n) = \mu_{V_n|C} + \sigma_{V_n|C}\varepsilon \quad (34)$$

ただし、 ε は標準正規乱数である。

次に、求められた条件付正規確率場におけるサンプル実現値 $V(x_n)$ を式(33)に従って与えられた切断正規確率場に変換すれば、未観測点におけるサンプル実現値 $W(x_n)$ は次式のように求められる。

$$W(x_n) = h(V(x_n)) \quad (35)$$

複数の未観測点でサンプル実現値を得るためには、観測点ならびに未観測点間の相関特性を勘案してシミュレートしなければならない。このためには文献1)で提案された漸次拡張方式を用いればよい。すなわち未観測点 x_n において得られたサンプル実現値 $W(x_n)$ を観測値と見なして n 個の観測値 $W(x_i)(i = 1 \sim n)$ を得る。観測値 $W(x_i)(i = 1 \sim n)$ を用いることにより、上記と同様の手順に従うと、未観測点 x_{n+1} におけるサンプル実現値 $W(x_{n+1})$ を求めることができる。このような方法で必要な未観測点だけ漸次的に計算を繰り返せば、切断正規確率場における条件付サンプル場を得ることができる。

サンプル場を多数発生させることにより、得られた複数のサンプル場から任意地点における条件付サンプル平均値、条件付サンプル分散値、条件付頻度分布などの統計量を求めることができる。これら統計諸量を式(19)の条件付平均値、式(22)の条件付分散、これらよりなる条件付確率密度関数と比較することにより、理論解の妥当性を検討することが可能である。

4. 数値計算結果および考察

4.1 条件付切断正規確率場の理論的結果

条件付切断正規確率場における条件付推定結果の意味、条件付シミュレーション法の精度を検討する。ここでは簡単のために1次元均一場を対象とする。周辺正規確率分布の無条件平均値を $\mu_V = 1$ 、無条件分散 σ_V^2 を1として考える。また x_i 地点と x_j 地点の無条件共分散は $C(V_i, V_j) = \exp(-\|x_i - x_j\|/5)$ と仮定する。このような前提下で得られた周辺確率密度関数を正規分布と切断正規分布について示すと、Fig.1の破線($f_V(v)$)、太線(式(1)の $t_W(w)$)となる。

観測点は8点($x = 0, 10, 40, 50, 70, 80, 90, 100$)とする。観測点におけるサンプル実現値は相関を有する正規確率場の同時シミュレーションにより予め求められた

ものである。ただしここでは切断正規確率場においてもこれと同一の観測値が得られるものと仮定する。このように同じ観測値に対して分布形の下方裾部の裾切りが条件付特性値(条件付平均値, 条件付分散)に及ぼす影響について検討する。

Fig.2には式(19), (22)によって求められた切断正規確率場における条件付平均値(最適推定値), 条件付分散を太線で, また式(3), (4)で計算される無条件平均値, 無条件分散を破線で示す。(a)図における○印は事前に与えられた観測値を, (b)図のそれは観測位置を意味する。

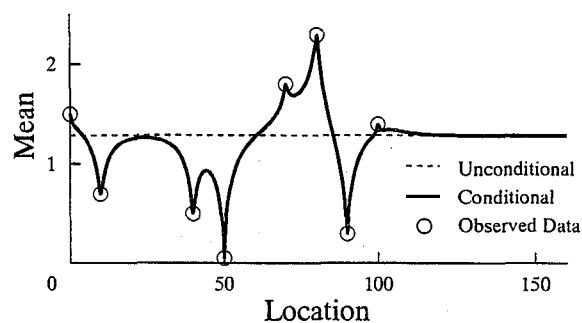
Fig.2よりわかるように, 切断正規確率場の無条件平均値は正規確率場のそれよりも大きくなっている。これは2.で述べたように任意の確率分布形が下方裾部で裾切りされた場合の一般的特徴である。最適推定値としての条件付平均値は内外挿地点において無条件平均値に近づくように算出されている。観測値が無条件平均値より大きい場合の内挿値, 無条件平均値よりも小さいときの観測点間の内挿値のどちらであっても, このような特徴を示している。推定点が観測点と一致すると, 条件付平均値は観測値と完全に一致する。

条件付分散(Fig.2(b))を見ると, 観測値の大きさによっては条件付分散が無条件分散よりも大きくなることがわかる。また2つの観測点間距離が同一値を与える場合の内挿地点 x , すなわち $0 < x < 10, 40 < x < 50, 70 < x < 80, 80 < x < 90, 90 < x < 100$ における条件付分散を見ると, その値は未観測点の位置 x によって変動していることが理解できる。同図より条件付分散が観測値に依存していることを確認できる。観測点から遠くなり観測値の影響が小さくなると, 条件付分散は無条件分散に近づく。Elishakoff et al.⁵⁾の数値シミュレーションによる検討ではこのような条件付分散の特徴が得られない。

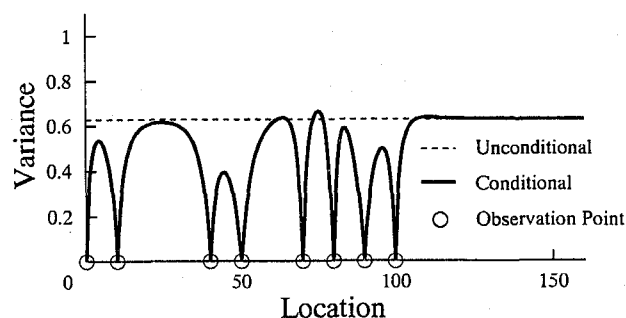
4.2 条件付シミュレーション結果

次に3.(4)の手順に従う条件付シミュレーション5000個のサンプル場を発生させ, 得られたサンプル実現値から各点について条件付サンプル平均値と条件付サンプル分散値の統計量を求めた。Fig.3(a)が条件付サンプル平均値, Fig.3(b)が条件付サンプル分散値である。若干の変動は見られるものの, シミュレーションによって得られた結果はFig.2の特性をほぼ満足していることがわかる。すなわち理論値とシミュレーションによる結果はほぼ一致しており, ここで提案した条件付シミュレーション法の有効性が検証できたと言える。なおシミュレーション回数を増やせば, サンプル統計量が理論値に次第に近づくことを確認している。

以上の特性を条件付確率密度関数を調べることによって検討する。6つの空間位置($x=5, 20, 45, 65, 75, 95$)におけるサンプル実現値の頻度分布を求め, 各点につい

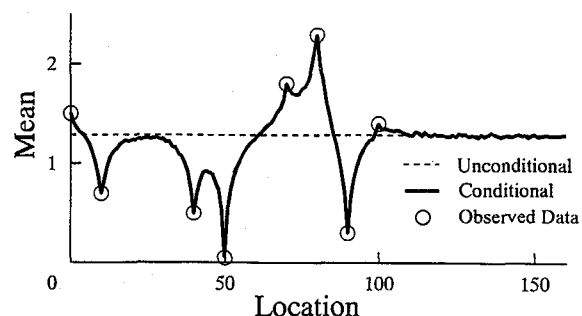


(a) Conditional mean

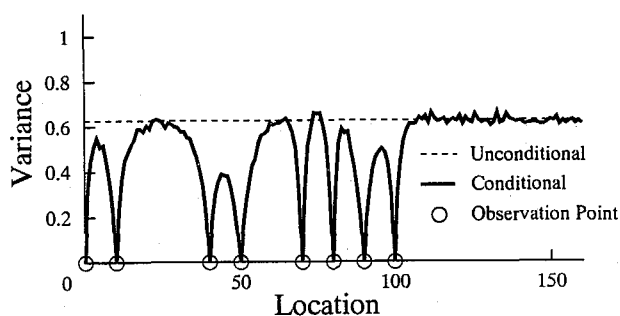


(b) Conditional variance

Fig.2 Theoretical solution of conditional characteristics of truncated Gaussian field



(a) Conditional mean



(b) Conditional variance

Fig.3 Simulated conditional characteristics of truncated Gaussian field (5000 samples)

て条件付確率密度関数に換算した結果がFig.4の細線である。図中太線はFig.2の理論解(条件付平均値, 条件付分散)を満足する条件付周辺確率密度関数(式(14))

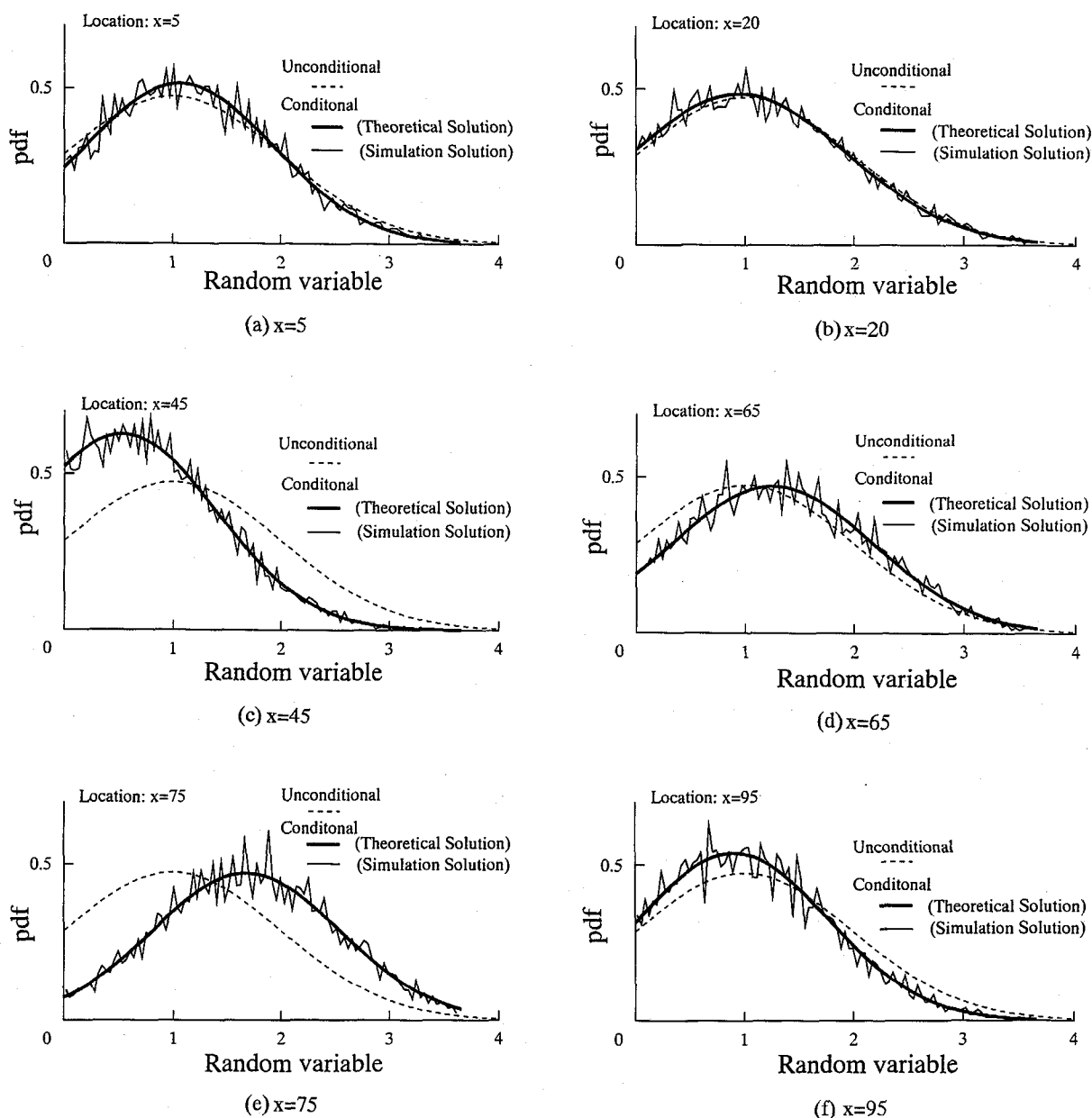


Fig.4 Comparison of simulated and analytical results for conditional probability density functions obtained at six spatial points (5000 samples)

で、破線はFig.1に示した事前分布としての無条件確率密度関数である。均一場を考えているので、無条件確率密度関数は空間位置によらず同一である。

Fig.2(a), Fig.3(a)を見ると、 $x=5, 20$ の地点の条件付平均値は無条件平均値とほぼ一致し、さらに $x=20$ の地点の条件付分散は無条件分散に近い値を示していることがわかる。これより、条件付確率密度関数、特に $x=20$ 地点のそれは無条件周辺確率密度関数とほぼ一致している。 $x=45$ の地点は無条件平均値よりもかなり小さい観測値をもつ観測点($x=40, 50$)の中間に位置している。その結果Fig.4(c)よりわかるように、観測値に引きずられるために破線の無条件確率密度関数に

比べると、条件付確率密度関数の形状は確率変数の小さい方に変形している。このことから条件付平均値、条件付分散は無条件統計量よりも小さくなる。 $x=95$ における結果も同様である。 $x=65, 75$ の地点は無条件平均値よりも大きな観測値を有する観測点($x=70$)の近傍に位置する。従って、(d), (e)図よりわかるように、(c)図の結果とは逆に、条件付確率密度関数の形は確率変数の値の大きい方に変形している。 $x=75$ 地点では確率変数値の小さい、または大きい裾野部分において無条件ならびに条件付確率密度関数に顕著な差が見られる。

信頼性問題、確率過程の交差問題などを取り扱うと

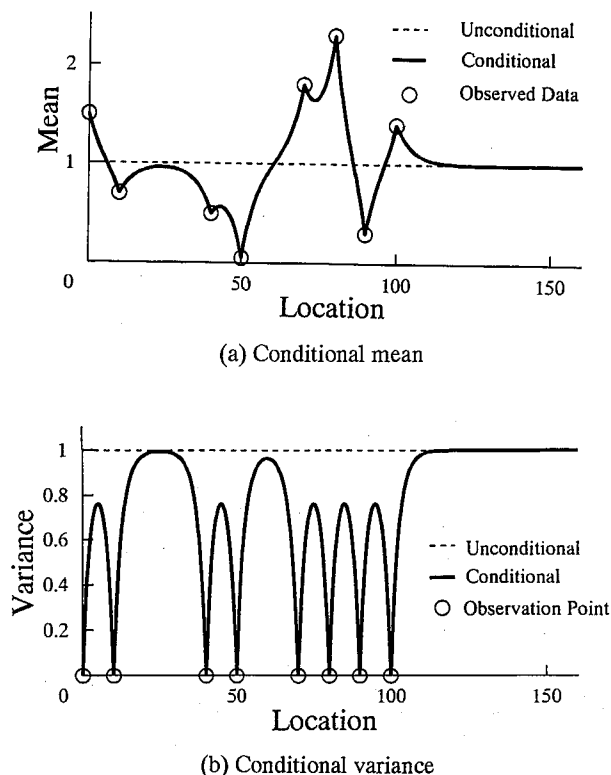


Fig.5 Theoretical solution of conditional characteristics of Gaussian field

きには強度や荷重に関する確率密度関数の裾野部分が特に重要となる。上で検討したように、無条件特性値と観測値の関係により、空間地点によっては条件付確率密度関数の下方・上方裾野部分の大きさが大いに異なる場合がある。このようなときには切断正規分布を十分に考慮した上で条件付推定問題を捉えることが必要である。

4.3 正規確率場ならびに確定的補間法の結果との対比

Fig.5 には条件付正規確率場の条件付平均値(式(20))と条件付分散(式(21))を示す。図中には無条件平均値と無条件分散も破線で併記している。条件付平均値が観測値を通して事前に与えた無条件平均値に近づくように求められていること、外挿値が無条件平均値に近づくことなど、全体的な挙動はFig.2(a)の切断正規確率場の結果と同じである。条件付分散についてはFig.2(b)と異なった特性を示している。すなわち正規確率場の条件付分散は無条件分散よりも大きくなり、観測値に依存して条件付分散の大きさに違いが見られない。これは条件付分散が観測値によらず、観測点からの距離のみに依存するためである。切断正規確率場の条件付分散と推定誤差分散は異なる意味をもつが、正規確率場では両者が同一値をとる。このように条件付確率場の周辺分布の分布型が推定結果に重大な影響を及ぼすことが理解できる。

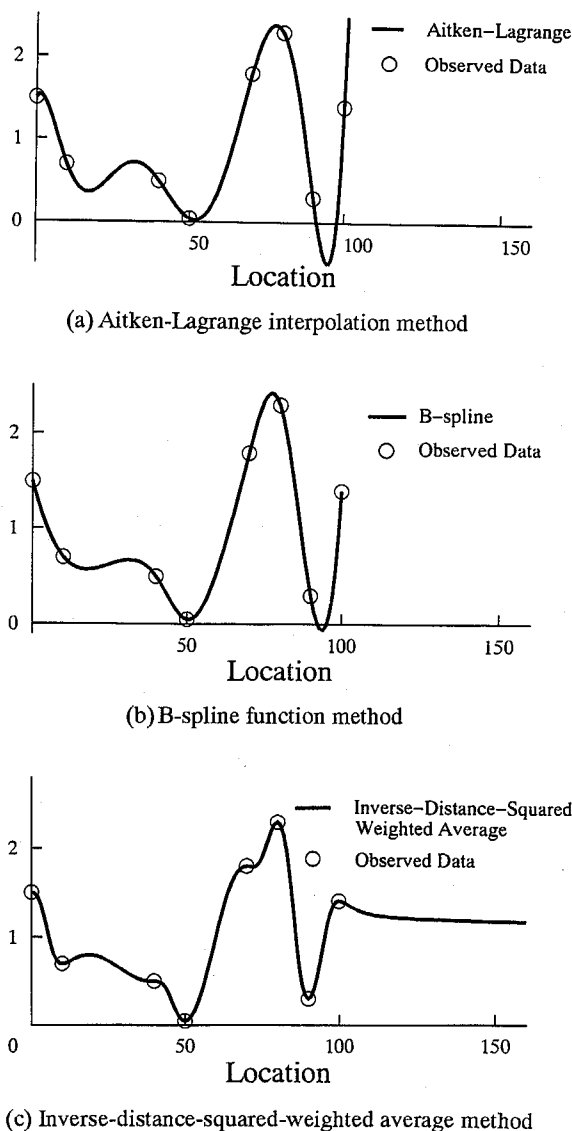


Fig.6 Spatial interpolation and extrapolation computed by nonstochastic methods

先に示した結果は確率的補間結果であるが、これを確定的補間値と比較する。確定的補間手法としては付録に示すように3つの方法(Aitken-Lagrange補間法、3次のB-spline補間法、放物曲線関数法)を用いた。放物曲線関数法では、補間点と観測点間距離の2乗に逆比例した重み係数を観測値に乗じて足し合わせ補間値を得ている。その結果をFig.6に示す。

Fig.6を見ると、補間値は観測値を通るように滑らかに求められている。Aitken-Lagrange法、B-spline関数法によると、補間値が負の値を示す場合が見られる。確率的補間手法では確率変数に非負の拘束条件を与えているが、確定的補間手法ではこのような因果性が存在していない。すなわち現象を支配する物理的因果性を考慮せず、単に観測値を用いて未観測点の物理量を推定するような多項式を求めたのが確定的補間手法である。またAitken-Lagrange法では観測点から遠く離れた外挿値は

ど発散した値を呈し、B-spline関数法では内挿値しか得られない。放物曲線関数法では内外挿点ともに補間値が計算されている。この方法によると、Fig.2(a)に近い補間値が得られているが、これは式(20)と式(A9)、式(12)から求められる重みと式(A10)の重みの対比、ここで設定した共分散関数の挙動から期待されることである。

Fig.2(a)とFig.6を比較すると、事前情報が補間値に大きな影響を与えていることがわかる。確率的補間手法では観測情報に基づいて事前に設定した確率場を更新するので、条件付平均値は観測点を通して無条件平均値に近づくように求められる。これに対して、確定的補間手法では事前情報が与えられていないので、観測値を通るように滑らかな曲線が得られている。このことは、真値を反映するような事前モデルを与えることができれば、観測結果を用いて事後更新モデルを求める確率的補間手法が確定的補間法に比べて有益であることを示唆していると言えよう。すなわち条件付確率場の問題においては不確実性が考慮できる上に、現象の支配方程式としての事前平均値をできる限り正確に設定することが重要な基本になっているのである。

以上のことから空間分布推定研究における確定的補間手法と確率的補間手法の本質的な相違点が明らかになった。

5. 結論

条件付正規確率場の推定理論ならびにその地震工学的応用についてはこれまで多くの研究が進められ、様々な知見が得られてきた。任意の非正規確率場に関しては星谷・野田・稲田が条件付非正規確率場を推定する理論を導き、条件付シミュレーション法を提案している。またElishakoff, Ren and Shinozukaは無条件非正規確率場のシミュレーション法と星谷が提案した条件付正規確率場のシミュレーション法を組み合わせ、数値的に条件付非正規確率場を検討している。

本論文では、分布形の特性として裾切りが存在しているケースを想定し、条件付切断正規確率場の理論解ならびに条件付シミュレーション法を提案し、条件付正規確率場ならびに確定的補間手法の結果と比較検討した。その結果、1) 切断正規確率場における未観測点の最適推定値は条件付平均値に等しいこと、2) 推定誤差分散は条件付分散と異なること、3) 条件付平均値、条件付分散は観測値に依存するが、推定誤差分散は観測点配置で決まることがわかった。この結果は条件付正規確率場の場合と異なる性質である。Elishakoff et al.も条件付切断正規確率場について数値的な検討を加えているが、このような性質に関する結論を得ていない。

条件付シミュレーションを行い、未観測点におけるサンプル実現値の確率密度関数を検討した結果、未観

測点によっては事前に与えた周辺分布に比べて条件付分布に大きな差が生じることがわかった。このことは、分布形の下方裾部に制約を与える切断正規分布に対して条件付確率場を推定するときには本理論のような展開を必要とすることを意味する。条件付シミュレーションによる結果は理論解とほぼ同一になっており、本定式化の有効性が検証された。

確定的補間法では空間分布に関する事前情報を考慮できないが、確率的補間法では観測情報が得られることにより事前確率場の更新が行われる。また後者によるとその更新の程度を定量的に評価することができる。地震工学で対象とする現象には多くの不確定要因が介在するから、このような場合の補間問題を取り扱う際には本論の定式化は大いに意義深い。切断正規分布を与えるような物理量は現象として存在するから、このような確率場の更新理論は問題を解決する上で必要不可欠であると考えられる。

付録 確定的補間法

付録 1 不確実性の有無による空間補間

空間データの処理法としては確定的補間手法と確率的補間手法がある。

確率的補間法は、得られた観測値はある確率分布特性を満たす一つのサンプル実現値であると仮定し、存在しているはずの真値と推定値の誤差を最も小さくするように、最適内外挿法を用いて未観測点での不偏推定値を求めようとするものである。このとき観測前にどのような空間分布になっているかを表すため、平均面とそれからのばらつきを示す共分散、確率分布形が事前に与えられる。すなわち確率的補間法は事前情報に基づいて設定したモデルの確率場を観測情報を与えることによって更新するための条件付推定技法であると言える。

一方、確定的補間法は離散空間点において観測値が与えられたとき、与えられたサンプル点を通る近似関数(多項式、区分的多項式など)で表した等値曲面を仮定し、観測値を基に近似関数の係数を決めて補間式を求め、観測点以外の未観測点での補間値を求めていく方法である。従ってこの方法では単に観測値を用いて未観測点での物理量を推定するので、空間場の事前情報、更新の考え方を含まない。

確率的補間手法では観測によって事前確率場が更新されるが、その更新の程度は推定誤差分散によって定量的に求められる。しかしながら確定的補間法ではこのような推定精度を客観的に評価できない。

本論文では3.で示した確率的補間手法と確定的補間手法の比較検討を行うことも一つの目的としている。このため以下には確定的補間手法の代表例(数値計算例で使用した方法)について概要を述べる。なおここでは

簡単のために1次元場の補間曲線を求めるケースを考える。

付録2 Aitken-Lagrange補間

観測値を通る近似関数が多項式の場合には、多項式としてLagrange補間多項式、Hermite補間多項式などが用いられる。Aitken-Lagrange補間法、Aitken-Hermite補間法はこれに類似した手法であるが、反復的に補間多項式の次数を上げていくことにより、最も適当と考えられる補間値を見出そうとすることに特徴がある。

今、1次元場を考え、観測点 $x_i (i = 1 \sim n)$ は $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ を満足しているとする。この x_i を未観測点 x_r に近い順に並びかえて $z_i (i = 1 \sim n)$ とする。観測値 $W(x_i) (i = 1 \sim n)$ もそれに対応して $W(z_i) (i = 1 \sim n)$ で表す。

$i + 1$ 個の離散点 $(z_1, W(z_1)), (z_2, W(z_2)), \dots, (z_i, W(z_i)), (z_j, W(z_j))$ を通る i 次のLagrange補間多項式による未観測点 x_r での補間値を $W_{1,2,\dots,i,j}$ で表す。このときAitken-Lagrange補間法⁷⁾によれば、補間値は次式で求められる。

$$W_{1,2,\dots,i,j} = W_{1,2,\dots,i} + \frac{W_{1,2,\dots,i} - W_{1,2,\dots,i-1,j}}{z_j - z_i} (z_i - x_r) \quad (A1)$$

上式を繰り返し用いることにより、 $(z_i, W(z_i)) (i = 1 \sim n)$ を通るLagrange補間式による補間値として $W_{1,2}, W_{1,2,3}, W_{1,2,3,4}, \dots, W_{1,2,\dots,n}$ が得られる。最終的に求めたいのは n 個の観測値を通る補間値であるので、 $W_{1,2,\dots,n}$ となる。

Lagrange補間は単一の多項式を用いているため、激しく振動した補間曲線となることがある。この現象はRungeの現象⁸⁾としてよく知られている。この振動の危険性を克服するため、最近ではspline補間が用いられるようになった。

付録3 B-spline関数による補間

単なる多項式を用いて補間がうまくいかないときには、区分的多項式よりなる近似関数を用いられる。spline関数による補間はその一つである。spline関数による補間式は、補間の条件(与えられた観測値を通ること)を加えたspline関数のことである。

観測点 $x_i (i = 1 \sim n) (x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ に対して観測値 $W(x_i) (i = 1 \sim n)$ が与えられたとき、

$$\xi_1 = x_i \quad (A2a)$$

$$\xi_i = x_{i+(m-1)/2} \quad (i = 2 \sim n-m) \quad (A2b)$$

$$\xi_{n-m+1} = x_n \quad (A2c)$$

を節点とする m 次の正規化されたB-spline補間式(未

観測点 x_r)は次式で表せる⁸⁾。

$$S(x_r) = \sum_{j=-m+1}^{n-m} C_j N_{j,m+1}(x_r) \quad (A3)$$

補間条件として、1) $S(x_r)$ は各部分区間 $[\xi_i, \xi_{i+1}] (i = 1 \sim n-m)$ で高々 m 次の多項式であること、2)区間 $[x_1, x_n]$ で $S(x_r)$ の $m-1$ 階導関数までが連続であること、3) $S(x_r)$ は観測値を通ること(すなわち $S(x_i) = W(x_i) (i = 1 \sim n)$)の3つが考えられている。

区間 $[x_i, x_n]$ で定義され、3つの補間条件を満たす $N_{j,m+1}(x_r)$ は m 次の正規化されたB-splineであり、次式で定義される。

$$N_{j,m+1}(x_r) = (t_{j+m+1} - t_j) \cdot g_{m+1}[t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+m+1}; x_r] \quad (A4)$$

上式において、B-splineの節点列 $\{t_k\}$ ならびに $m+1$ 階差分商 $g_{m+1}[t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+m+1}; x_r]$ は次のようである。まず、 $\{t_k\}$ は

$$t_k = \begin{cases} \xi_1 & ; k = -m+1, -m+2, \dots, 1 \\ \xi_k & ; k = 2, 3, \dots, n-m \\ \xi_{n-m+1} & ; k = n-m+1, n-m+2, \dots, n+1 \end{cases} \quad (A5)$$

とする。このとき差分商は次式で表せる。

$$g_{m+1}[t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+m+1}; x_r] = \sum_{k=j}^{j+m+1} \frac{(t_k - x_r)_+^m}{(t_k - t_j) \cdots (t_k - t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k+1}) \cdots (t_k - t_{j+m+1})} \quad (A6)$$

ここに記号 $(t_k - x_r)_+^m$ は次式を意味する。

$$(t_k - x_r)_+^m = \begin{cases} (t_k - x_r)^m & ; t_k \geq x_r \\ 0 & ; t_r < x_r \end{cases} \quad (A7)$$

式(A3)の補間係数 $C_j (j = -m+1 \sim n-m)$ は補間の条件を満たす次式の連立方程式を解くことによって求められる。

$$S(x_i) = \sum_{j=-m+1}^{n-m} C_j N_{j,m+1}(x_i) = W(x_i) \quad (i = 1 \sim n) \quad (A8)$$

以上に述べた補間法は多項式をつないだ形の多項式splineであるが、ある種のデータを補間する場合にはLagrange補間と同様に振動を起こすことがある。このような場合には有理式spline補間が用いられる⁸⁾。

補間の問題によく使われるのは3次のspline関数である。そこで関数の柔軟さと取り扱いの簡単さから、ここでは数値計算に当たって $m = 3$ を用いる。

付録 4 重みに放物曲線関数を用いた補間

次式のように観測値 $W(x_i)$ ($i = 1 \sim n$) の重み線形結合によって補間値 $\widehat{W}(x_r)$ を求める.

$$\widehat{W}(x_r) = \sum_{i=1}^n \lambda_i W(x_i) \quad (\text{A9})$$

ただし, 重み係数 λ_i は未観測点 x_r と観測点 x_i 間の距離に依存するものとし, 次式で表す⁹⁾.

$$\lambda_i = \|x_r - x_i\|^{-2} / \sum_{j=1}^n \|x_r - x_j\|^{-2} \quad (i = 1 \sim n, x_r \neq x_i) \quad (\text{A10a})$$

$$\lambda_j = \begin{cases} 1; & (j = i, x_r = x_i) \\ 0; & (j \neq i, x_r = x_i) \end{cases} \quad (\text{A10b})$$

一般に未観測点から遠く離れた観測点の観測値は推定値に及ぼす影響が小さい. 式(A9)は簡単な計算法であるが, このような事実を反映している.

参考文献

- 1) 星谷 勝: 条件付確率場のシミュレーション理論, 土木学会論文集, No. 459/I-22, pp. 113-118, 1993年1月.

- 2) 星谷 勝, 桑名智英: 条件付確率場のシミュレーション理論の検証, 土木学会論文集, No. 477/I-25, pp. 93-96, 1993年10月.
- 3) Shinozuka, M. and R. Zhang: Equivalence between kriging and CPDF methods for conditional simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 122, No. 6, pp. 530-538, June 1996.
- 4) 星谷 勝, 野田 茂, 稲田 裕: 観測情報に基づく条件付非正規確率場の推定理論の誘導, 土木学会論文集, No. 570/I-40, pp. 83-95, 1997年7月.
- 5) Elishakoff, I., Y. J. Ren and M. Shinozuka: Conditional simulation of non-Gaussian random fields, *Engineering Structures*, Vol. 16, No. 7, pp. 558-563, July 1994.
- 6) Yamazaki, F. and M. Shinozuka: Digital generation of non-Gaussian stochastic fields, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 7, pp. 1183-1197, July 1988.
- 7) Ralston, A.: *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- 8) 市田浩三, 吉本富士市: スプライン関数とその応用, 教育出版, 1985年2月.
- 9) Cressie, N. A. C.: *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.

(1999年9月17日 受付)