条件付対数正規確率場のCokriging

Cokriging of Conditional Lognormal Stochastic Field

野田 茂*，竹内めぐみ**，星谷 勝***
Shigeru Noda, Megumi Takeuchi, Masaru Hoshiya

*工博，鳥取大学助教授，工学部社会開発システム工学科 (〒680-0945 鳥取市湖山町南4-101)
**エス・アイ・エス・ディ鳥取 (〒680-0911 鳥取市千代水1-1004 アイシン千代水ビル)
***Ph. D.，武蔵工業大学教授，工学部土木工学科 (〒158-0087 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

Methods of Cokriging have been studied by many researchers, for interpolation and extrapolation of a Gaussian stochastic field conditioned on observations at some points. This study discusses how to extend Cokriging to a lognormal stochastic field. It is found that the simple Cokriging estimator with known mean and covariances is superior to the universal Cokriging estimator since the latter has misspecification of the mean function, where only a variation indicator can be obtained. A numerical example of a two-dimensional lognormal stochastic field is demonstrated to show the characteristic differences between Kriging and Cokriging estimators.

Key Words: *lognormal stochastic field, cokriging, kriging, spatial statistics, conditional estimation, optimum estimator, mean-squared estimation error*

1. はじめに

有限個のセンサーを通して，地盤物性値，最大地動，地下浸透流，液状化の影響範囲，都市ライフラインの被害状況，地震ハザードなどの空間分布を正しく推定することは重要な問題である．その際，これらの現象はシステムの入出力関係として出現するものであるから，システムの物理的構造を調べておくことが必要である．この場合因果関係の情報を積極的に活用して空間分布を推定することが要求されるが，それほど容易なことではない．

物理量を時空間の確率場として捉え，モニタリングによって複数の特定地点で物理量が観測された場合，その観測値を確率場からのサンプルと見なし，このサンプル値を制約条件として，それ以外の地点における物理量を推定する問題は確率論的補間問題である．この補間手法はKrigingとして知られている．この手法は，補間のアイデアを出したKrigeから名付けられたものであり，Matheronによって最初に定式化が行われた．この空間分布推定法は現在広範囲で利用されており，色々な刊行物が出版されてきている(例えば，Journel and Huijbregts[1]), Ripley[2]), David[3]), Christakos[4]), Cressie[5])など)．

条件付確率場の確率論的補間法は，シミュレーションに留まらず，時空間分布の推定精度を確率的に取り扱うことができる有効な方法である．しかしながら，上記研究では単一の物理量を対象にしていることが多い．情報の質と量が異なる観測が混合した場合には，全ての情報を有効に活用する確率論的補間理論(Cokriging)を構築する必要がある．少数の限られたデータしか得られないときには，その対象確率場と相関性の強い他の確率場の物理量を用いれば，より精度の高い推定を行うことが可能となる．

本研究では，このCokrigingを対数正規確率場に適用して未観測点での物理量を空間的に推定するため，場特性の事前情報の違い(無条件平均値が既知と未知)によって二つの理論(Simple Cokriging, Universal Cokriging)を展開する．さらに，シミュレーションによって得られたサンプルデータを用いて数値分析を行い，二つの異なるCokrigingの推定結果を，著者らによって提案した単一物理量の推定手法であるKriging(Simple Kriging, Universal Kriging)[6),7)]と比較検討する．

既往のCokrigingは条件付正規確率場に限定されているので，最大地動のように対数正規分布に従う物理量の推定問題にこの理論をそのまま踏襲することはできない．これまでの研究により，条件付正規確率場のCokrigingがKrigingに比べて有用なことは周知の事実である．しかし対数正規確率場のCokrigingの定式化は著者らの知る限りこれまで見られないので，その推定理論式を提案することは工学上意味あるものである．また無条件平均場の事前情報の有無に伴うCokriging，すなわちSimple CokrigingならびにUniversal Cokrigingの理論式の違いを明示することは有用である．後述するように対数正規確率場と正規確率場のUniversal Cokrigingは異なる性質をもつので，その知見を示すことは大いに重要である．

以上のことから条件付対数正規確率場のCokriging式を提案した上で，Kriging式と比較し，条件付正規確率場のCokrigingとの相違点を示すことは意義あるものと考えられる．

2. Simple Cokriging

推定理論式，すなわち最適推定量ならびに最小誤差分散の式は，不偏性条件(後述の式(9))，推定誤差分散(式(14))の最小化条件に基づいて誘導しなければならない．これはKrigingの定義あるいは条件付確率場における推定の基本的なルールである．その際，対数正規確率場の性質を考慮し，対数正規確率場を正規確率場に変換した線形和(式(4))により，正規確率場の推定量を求めることを骨子としている．この考え方は星谷ら[8]の提案手法から得られる条件付特性値の誘導過程とほぼ同じである．ここで採用したルール(式(4)，(9)，(14))は条件付対数正規確率場の推定理論の原理・原則である．これらが確率的に意味あることは文献8)において既に証明されている．

本研究で提案する推定理論式の展開においては統計的な仮定が存在せず，確率論を一貫して用いている．不偏最小誤差共分散規範に基づく推定法は統計的近似解法ではなく，確率論に基づく厳密解法である．この考えの正しさは文献8)，9)において理論的・数値的に示されている．

2.1 問題の設定

空間位置$\boldsymbol{X}$において，対数正規分布に従う物理量W_αの確率変数$W_\alpha(\boldsymbol{X})$，正規分布に従う確率変数$\ln W_\alpha(\boldsymbol{X})$の無条件平均値をそれぞれ$m_\alpha(\boldsymbol{X}), m_{\alpha e}(\boldsymbol{X})$，それらの無条件分散を$\sigma_\alpha^2(\boldsymbol{X}), \sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X})$と定義する．ここで，添字$e$は正規確率変量を意味する．これら特性値は一般に空間座標に依存するので，理論的には非均一確率場を取り扱うことが可能である．

この場合，対数正規確率場と正規確率場における確率的特性(無条件平均値と無条件分散)は式(1)，(2)の関係を満たす．

$$m_\alpha(\boldsymbol{X}) = \exp\left(m_{\alpha e}(\boldsymbol{X}) + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X})\right) \quad (1)$$

$$\sigma_\alpha^2(\boldsymbol{X}) = m_\alpha^2(\boldsymbol{X})(\exp(\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X})) - 1) \quad (2)$$

2つの物理量W_α，W_βの無条件共分散については次の関係式が成り立つ．

$$C(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) = m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) m_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}) \cdot\Big(\exp(C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))) - 1\Big) \quad (3)$$

ここに，$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$は物理量$\alpha$の$i$番目の，$\boldsymbol{X}_{\beta j}$は物理量$\beta$の$j$番目の空間座標である．また，$C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))$は正規確率場における$\ln W_\alpha$と$\ln W_\beta$の無条件共分散を意味する．

上記のように無条件場の確率構造を設定した場合，空間補間問題は図-1に示すように与えられた観測値から未観測点$\boldsymbol{X}_r$の物理量を推定することになる．同図では

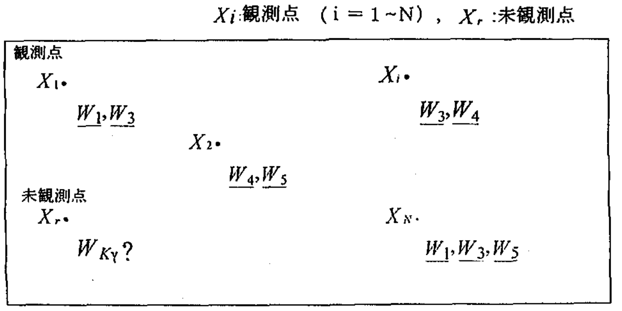


図-1 観測点と推定点の関係

5つの物理量を考え，1)未観測点の物理量は5つの物理量の観測値$\underline{W}_1 \sim \underline{W}_5$のいずれかによって支配され，2)各地点$\boldsymbol{X}_i$で観測される物理量の数，種類は異なるとしている．なお，下線の付いた$\underline{W}$は観測値を，下線の付かないWは確率変数を意味する．

2.2 基本式

M個の物理量のうちγ番目の物理量の未観測点$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$に注目すると，対数正規分布に従う物理量$W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})(\gamma = 1 \sim M)$は$\alpha$番目の$N_\alpha$地点での確率変数$W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha 1})\cdots W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha N_\alpha})(\alpha = 1 \sim M)$に基づいて推定できると仮定する．このとき，推定量$\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は次式を満足するように求める必要がある．この正規確率場における線形補間式の意義・有効性については文献8)において示されている．

$$\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha} \lambda_{\alpha i} \ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) + k \quad (4)$$

ただし，k，$\lambda_{\alpha i}(\alpha = 1 \sim M, i = 1 \sim N_\alpha)$は未知定数である．なお，各地点の物理量の数は一般に異なるため，α番目の物理量の数はN_αとする．

上式の両辺の数学的期待値をとると，式(1)より，

$$E\left[\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right] = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha} \lambda_{\alpha i} \cdot\left(\ln m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})\right) + k \quad (5)$$

となる．

一方，$\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の分散は式(4)，(5)より次式で表せる．

$$\sigma_\gamma^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta} \lambda_{\alpha i}\lambda_{\beta j} \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) \quad (6)$$

ただし，物理量W_α，W_βの正規確率場における共分散$C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))$は次式のようである．

$$C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) = E\Big[\Big(\ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - E\left[\ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i})\right]\Big)$$

$$\cdot\left(\ln W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}) - E\left[\ln W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})\right]\right)\Bigg] \tag{7}$$

従って，式(5)，(6)を式(1)に代入すると，対数正規確率場における推定量$\widehat{W}_\gamma$の数学的期待値は次式で表せる．

$$\begin{aligned}
&E\left[\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right] \\
&= \exp\left(E[\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})] + \frac{1}{2}\sigma_\gamma^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\right) \\
&= \exp\Bigg\{k + \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\Bigg(\ln m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{8}$$

上記のような考え方で条件付対数正規確率場の最適推定量を得ることの正しさは条件付確率密度関数に基づく推定理論[8]において既に証明されている．

2.3 不偏推定の条件

式(8)の未知定数kは不偏性の条件下で決められる量である．不偏推定の条件式は確率論的に次式のように表せる．この条件は推定誤差$\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の数学的期待値が0となることを意味する．

$$E\left[\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right] = 0 \tag{9}$$

従って，上式に**2.(1)**で定義した記号ならびに式(8)を適用すると，不偏推定の条件式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&E\left[\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right] - E\left[W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right] \\
&= \exp(\ln m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\
&\quad \cdot\Bigg[\exp\Bigg\{k + \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\ln m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \ln m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\Bigg(\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j} \\
&\quad \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\Bigg)\Bigg\} - 1\Bigg] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

これより，未知定数kは次式を満たさなければならない．

$$\begin{aligned}
k &= \ln m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\ln m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\Bigg(\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j} \\
&\quad \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\Bigg)
\end{aligned} \tag{11}$$

このとき，当然次式の不偏性が成り立つ．

$$E[\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})] = m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \tag{12}$$

よって式(4)，(11)より，無条件場の確率構造が既知のときの最適推定量は

$$\begin{aligned}
&\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \\
&= \exp\Bigg\{\ln m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\left(\ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \ln m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i})\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\Bigg(\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j} \\
&\quad \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{13}$$

で表せる．なお，上式の重み係数λを求める必要があるが，これは次節で述べるように最小誤差分散条件から得られる．

2.4 推定誤差分散と重み係数

推定誤差分散$\sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))$は推定理論の定義に基づくと，次式で表せる．

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\
&\quad = \sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) + \sigma_\gamma^2\left(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right) \\
&\quad\quad -2E\Big[(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\
&\quad\quad \cdot(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\Big]
\end{aligned} \tag{14}$$

ただし，上式右辺第3項を除いた3つの項は次のようである．

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\
&\quad = E\Big[\Big\{\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \\
&\quad\quad -(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\Big\}^2\Big]
\end{aligned} \tag{15.a}$$

$$\sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) = E\left[(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))^2\right] \tag{15.b}$$

$$\sigma_\gamma^2(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) = E\left[(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))^2\right] \tag{15.c}$$

式(6)，(12)が成り立つので，これらの関係式を用いると，式(15.b)，(15.c)は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) = m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})^2 \\
&\quad \cdot\Bigg\{\exp\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\alpha i}\lambda_{\beta j} \\
&\quad \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\Bigg) - 1\Bigg\}
\end{aligned} \tag{16.a}$$

$$\sigma_\gamma^2(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) = m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})^2\left\{\exp\left(\sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right) - 1\right\}$$

(16.b)

a) 推定誤差分散

式(14)の右辺第3項が求まれば，式(16)を用いることにより，式(14)を確率的に計算することができる．そこで，式(17)で表せる$\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$，$\ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の共分散を得た上で，式(3)の関係からこれを対数正規確率場の共分散に変換することを考える．

$$E\Big[(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \cdot (\ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\Big] \tag{17}$$

今，式(4)，(5)より次式が成り立つので，

$$\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - E\left[\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right] = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\Big(\ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - m_{\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i})]\Big) \tag{18}$$

上式を式(17)に代入すれば，$\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$，$\ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の共分散は次式で表せる．

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}E\Big[\Big(\ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - m_{\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i})]\Big) \cdot \Big(\ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})]\Big)\Big]$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \tag{19}$$

$\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}), \ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の数学的期待値はそれぞれ$E\left[\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right]$(式(5))，$m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$で，それらの共分散は式(19)である．一方，$\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の平均値はともに$m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$である．これらより，式(3)の関係を用いると，式(14)右辺第3項は次のようになる．

$$m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})^2\left\{\exp\left(\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i} \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\right) - 1\right\} \tag{20}$$

以上より，式(16)，式(20)を式(14)に代入すれば，推定誤差分散が次のように得られる．

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&= m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})^2\Bigg\{\exp(\sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&\quad + \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\alpha i}\lambda_{\beta j} \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\right)\\
&\quad - 2\exp\left(\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\right)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{21}$$

一方，正規確率場での推定誤差分散$\sigma_{\gamma e}^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))$は式(6)，(19)より次式のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\gamma e}^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&= \sigma_\gamma^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) + \sigma_\gamma^2(\ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&\quad -2E\Big[(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \cdot (\ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\Big]\\
&= \sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\alpha i}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\\
&\quad -2\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))
\end{aligned} \tag{22}$$

b) 重み係数の決定

最小誤差分散を与えるためには，式(21)を重み係数$\lambda_{\gamma k}(\gamma = 1 \sim M, k = 1 \sim N_\gamma)$で偏微分して0とおけばよい．すなわち，次式が成立する必要がある．

$$\frac{\partial \sigma_\gamma^2(\widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))}{\partial \lambda_{\gamma k}} = 0 \tag{23}$$

具体的に式(21)を式(23)に適用すれば，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma k}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\\
&\cdot \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\left(\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) - C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\right)\right\}\\
&-C_e(W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma k}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) = 0
\end{aligned} \tag{24}$$

これより，重み係数λに関して次式の連立方程式が導かれる．

$$\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) = C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \tag{25}$$
$$(\alpha = 1 \sim M, i = 1 \sim N_\alpha)$$

上式の連立方程式は式(22)の最小化条件から誘導できる式と同一である．

上式よりわかるように，未観測点$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が観測点$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致すると，重み係数は$\lambda_{\gamma r} = 1$，$\lambda_{\alpha i} = 0(\alpha \neq \gamma, i \neq r)$となる．

2.5 最適推定値と最小誤差分散

式(25)の連立方程式を満たす重み係数λを用いると，推定誤差分散の最小値を求めることができる．まず，正規確率場におけるSimple Cokrigingの最小誤差分散は，式(22)に式(25)を代入すれば，次式で与えられる．

$$\sigma_{SK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) = \sigma_\gamma^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))$$

$$= \sigma^2_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \quad (26)$$

ここに，$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致するとき，**2.(4)b)** で述べた重み係数の性質により，$\sigma^2_{SK\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) = 0$となる．すなわち未観測点が観測点に一致すると，正規確率場の推定誤差分散は0になる．

今，観測値$\underline{W}_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i})$ $(\alpha = 1 \sim M, i = 1 \sim N_\alpha)$が具体的に与えられた条件付確率場の問題を考える．このとき最適推定値$\widehat{\underline{W}}_{SK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は，式(13)，(25)より，次のように求められる．

$$\widehat{\underline{W}}_{SK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) = \exp\left(\widehat{\underline{W}}_{SK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) + \frac{1}{2}\sigma^2_{SK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right) \quad (27)$$

ここに，

$$\widehat{\underline{W}}_{SK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) = m_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) + \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i} \cdot(\ln \underline{W}_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - m_{\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i})) \quad (28)$$

未観測点$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が観測点$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致すると，式(27)ならびに**2.(4)b)** で述べた重み係数λの性質より，最適推定値$\widehat{\underline{W}}_{SK\alpha}(\boldsymbol{X}_{\alpha i})$は観測値$\underline{W}_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i})$と完全に一致することが理解できる．

一方，Cokrigingの最小誤差分散$\sigma^2_{SK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は，式(21)，(25)より，式(26)に示した正規確率場の推定誤差分散$\sigma^2_{SK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$を用いれば，

$$\sigma^2_{SK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) = m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})^2 \exp(\sigma^2_{\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \cdot\left\{1 - \exp(-\sigma^2_{SK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\right\} \quad (29)$$

と表せる．$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致するとき，$\sigma^2_{SK\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) = 0$である．従ってこのとき推定誤差分散$\sigma^2_{SK\alpha}(\boldsymbol{X}_{\alpha i})$は0となる．

式(28)は正規確率場におけるCokrigingの最適推定値を意味する．式(27)右辺の指数部第2項目は不偏性を保証する項であるので，式(27)よりわかるように，$\widehat{\underline{W}}_{SK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$の指数すなわち条件付中央値を求めても対数正規確率場の最適推定値は得られない．また式(29)の推定誤差分散は式(2)の無条件分散と同一形式になっていない．これらは特に重要な意味をもつが，正しい解釈が与えられないことがある．

3. Universal Cokriging

本章では，無条件平均値 $m(\boldsymbol{X})$ が未知なときのUniversal Cokrigingの推定式を誘導する．その際，正規確率場における式(4)の線形推定量，式(9)の不偏性条件，式(14)の誤差分散の最小化条件を用いることはSimple Cokrigingのときと同様である．この場合も確率論的推定理論を一貫して用いているので，式(4)が確率的立場，式(9)が統計的立場と言うように不自然な仮定の導入はない．

以下にはSimple Cokrigingの理論式の誘導過程と同様の手順に従い，Universal Cokrigingの最適推定値，変動係数的指標の式を提案する．

3.1 一般式

2.(3) で示した考え方を適用すれば，無条件平均値が未知のとき，式(10)の不偏性が成立するためには次式を満たさなければならない．

$$\ln m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\ln m_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) = 0 \quad (30)$$

このとき，式(11)は

$$k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\left(\sigma^2_{\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\right) \quad (31)$$

となるので，無条件平均値が未知のときの最適推定量$\widehat{W}_{UK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は次式で表せる．

$$\widehat{W}_{UK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\ln W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\left(\sigma^2_{\alpha e}(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\right)\right\} \quad (32)$$

3.2 重み係数の決定

無条件平均値$m(\boldsymbol{X})$は未知量であるため，まず次式のように無条件平均値$\ln m(\boldsymbol{X})$を既知の座標関数$f_h(\boldsymbol{X})$と未知パラメーターβ_hの線形和で展開する．すなわち$\ln m(\boldsymbol{X})$はp次の多項式で表せると仮定する．

$$\ln m(\boldsymbol{X}) = \sum_{h=0}^{p}\beta_h f_h(\boldsymbol{X}) \quad (33)$$

このとき，式(30)は

$$\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}\sum_{h=0}^{p}\beta_h f_h(\boldsymbol{X}_{\beta j}) = \sum_{h=0}^{p}\beta_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \quad (34)$$

となる．上式が任意の未知パラメーターβ_hについて成り立つためには次式を満たさなければならない．

$$\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}f_h(\boldsymbol{X}_{\beta j}) = f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \quad (h = 0 \sim p) \quad (35)$$

そこで式(35)の制約条件を満足するようにラグランジェ乗数$2\mu_h(h=0\sim p)$を導入して，式(36)の拡張された評価関数の最小化問題を考える．すなわち，Universal Cokrigingの最適推定量$\widehat{W}_{UK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は，式(35)の条件下で正規確率場の推定誤差分散(式(22))を最小にするように求めればよい．そのためには，ラグランジェ乗数を導入して，拡張された評価関数を最小にするように重み係数λを決定すればよい．

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2(\ln \widehat{W_\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&\quad +2\sum_{h=0}^{p}\mu_h\left(\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}f_h(\boldsymbol{X}_{\beta j}) - f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right)\\
&= \sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) + \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\alpha i}\lambda_{\beta j}\\
&\quad \cdot C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j}))\\
&\quad -2\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&\quad +2\sum_{h=0}^{p}\mu_h\left(\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}f_h(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) - f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right)\\
&\qquad \longrightarrow Min \qquad (36)
\end{aligned}
$$

なお，文献7)と同様に，式(35)の制約条件の下で対数正規確率場の推定誤差分散(式(21))を最小にする重み係数は正規確率場のそれを最小化することが証明される．そのためここでは式の誘導が簡単な手続をとっている．

最小化条件式は，上式を$\lambda_{\alpha i}$ $(\alpha=1\sim M, i=1\sim N_\alpha)$，$\mu_h(h=0\sim p)$で偏微分して0とおくことにより，式(37)で表せる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{\beta j})) + \sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\alpha i})\\
&\qquad = C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&\qquad\qquad (\alpha=1\sim M, i=1\sim N_\alpha) \quad (37.a)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{\beta=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_\beta}\lambda_{\beta j}f_h(\boldsymbol{X}_{\beta j}) = f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \qquad (h=0\sim p) \quad (37.b)
$$

上式より，未観測点$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が観測点の一つ$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致するとき，重み係数，ラグランジェ乗数は次式を満たすことになる．

$$
\lambda_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \gamma=\alpha, i=r \\ 0, & \gamma\neq\alpha, i\neq r \end{cases} \qquad (38.a)
$$

$$
\mu_h = 0\ (h=0\sim p) \qquad (38.b)
$$

このとき，正規確率場における推定誤差分散$\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は式(22)，(37)を用いると，

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\\
&= \sigma_\gamma^2(\ln \widehat{W}_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \ln W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&= \sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\
&\quad -\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \qquad (39)
\end{aligned}
$$

と表せるので，これより$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致するとき，$\sigma_{UK\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})=0$となる．

次に，式(37)の関係をマトリックス・ベクトルによって表す．このため，まず次の$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma}$を定義すると，

$$
\boldsymbol{A} = \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N_\beta} \\ \hline \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{array}\right\} \qquad (40)
$$

$$
\boldsymbol{B} = \left\{\begin{array}{c} C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_1), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\ C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_2), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\ \vdots \\ C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{N_\alpha}), W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})) \\ \hline f_0(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \\ f_1(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \\ \vdots \\ f_p(\boldsymbol{X}_{\gamma r}) \end{array}\right\} \qquad (41)
$$

$$
\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_2 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad (42)
$$

$$
\boldsymbol{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_1), W_\beta(\boldsymbol{X}_1)) & \cdots & C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_1), W_\beta(\boldsymbol{X}_{N_\beta})) \\ C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_2), W_\beta(\boldsymbol{X}_1)) & \cdots & C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_2), W_\beta(\boldsymbol{X}_{N_\beta})) \\ \vdots & & \vdots \\ C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{N_\alpha}), W_\beta(\boldsymbol{X}_1)) & \cdots & C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{N_\alpha}), W_\beta(\boldsymbol{X}_{N_\beta})) \end{bmatrix} \qquad (43.a)
$$

$$
\boldsymbol{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} f_0(\boldsymbol{X}_1) & f_1(\boldsymbol{X}_1) & \cdots & f_p(\boldsymbol{X}_1) \\ f_0(\boldsymbol{X}_2) & f_1(\boldsymbol{X}_2) & \cdots & f_p(\boldsymbol{X}_2) \\ \vdots & \vdots & & \\ f_0(\boldsymbol{X}_{N_\alpha}) & f_1(\boldsymbol{X}_{N_\alpha}) & \cdots & f_p(\boldsymbol{X}_{N_\alpha}) \end{bmatrix} \qquad (43.b)
$$

式(37)の最小化条件は

$$
\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \qquad (44.a)
$$

あるいは
$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_2 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{Bmatrix} \qquad (44.b)
$$

で表せる．ただし式(40)のλ_i，式(43.b)の$f_i(\boldsymbol{X}_j)$はサブベクトル，式(41)，式(43.a)の$C_e(\cdot,\cdot)$はサブベクトル，サブ行列を意味するが，詳細については割愛する．

従って，重み係数ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$，ラグランジェ乗数ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ は上式より次のようになる．

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\left\{\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{\Gamma}_2^T\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_2)^{-1}(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{\Gamma}_2^T\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1)\right\} \tag{45.a}$$

$$\boldsymbol{\mu}=-(\boldsymbol{\Gamma}_2^T\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_2)^{-1}(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{\Gamma}_2^T\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1) \tag{45.b}$$

3.3 最適推定値

式(31)の未知定数k は式(37)を用いれば次式で表せる．

$$\begin{aligned}k=&\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\left(\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})\right.\\&\left.-C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}),W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\right)+\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\end{aligned} \tag{46}$$

ここに，$\lambda_{\alpha i}(\alpha=1\sim M,i=1\sim N_\alpha)$，$\mu_h(h=0\sim p)$ は式(45) で与えられる．

このとき，観測値$\widehat{\underline{W}}_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i})(\alpha=1\sim M,i=1\sim N_\alpha)$が与えられると，Universal Cokriging による最適推定値$\widehat{\underline{W}}_{UK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は式(32)，(46)を用いれば次のようになる．

$$\begin{aligned}&\widehat{\underline{W}}_{UK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\\&=\exp\left\{\widehat{\underline{W}}_{UK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\right.\\&\quad\cdot\Big(\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})-C_e(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}),W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\Big)\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right\}\\&=\exp\left\{\widehat{\underline{W}}_{UK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})+\frac{1}{2}\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right.\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\sigma_{\alpha e}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})-\sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right)\\&\quad\left.+\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right\}\end{aligned} \tag{47}$$

ただし，

$$\widehat{\underline{W}}_{UK\gamma e}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})=\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\ln\underline{W}_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) \tag{48.a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})=&\sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})-\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\lambda_{\alpha i}\\&\cdot C_e\left(W_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}),W_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right)-\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\end{aligned} \tag{48.b}$$

なお，$\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は前述した正規確率場におけるUniversal Cokrigingの推定誤差分散である．

今，未観測点$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$ が観測点$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$に一致すると，式(38)，(47)より

$$\widehat{\underline{W}}_{UK\alpha}(\boldsymbol{X}_{\alpha i})=\underline{W}_\alpha(\boldsymbol{X}_{\alpha i}) \tag{49}$$

となって，推定値は観測値と完全に一致する．

3.4 最小誤差分散

Universal Cokriging の最小誤差分散$\sigma_{UK\gamma}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は，式(21)に式(37)を代入して式(48.b)の$\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$を用いて式を変形すれば，最終的に次式で表せる．

$$\begin{aligned}&\sigma_{UK\gamma}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\\&=m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})^2\exp(\sigma_{\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r}))\\&\quad\cdot\left[1+\exp\left(-\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})-\sigma_{UK\gamma e}^2(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right)\right.\\&\quad\left.\cdot\left\{\exp\left(-\sum_{h=0}^{p}\mu_h f_h(\boldsymbol{X}_{\gamma r})\right)-2\right\}\right]\end{aligned} \tag{50}$$

ここに，$\boldsymbol{X}_{\gamma r}$が$\boldsymbol{X}_{\alpha i}$と一致すると，$\sigma_{UK\alpha}^2(\boldsymbol{X}_{\alpha i})$は0となる．

しかしながら，無条件平均値$m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$は未知量なので，このままでは推定誤差分散を定量的に評価できない．すなわち，Universal Cokrigingによると，推定誤差分散ではなく$\sigma_{UK\gamma}(\boldsymbol{X}_{\gamma r})/m_\gamma(\boldsymbol{X}_{\gamma r})$なる変動係数的指標しか求められない．式(50)はこのことを示しているが，これまであまり周知されていなかった知見である．これは正規確率場のUniversal Cokrigingとは異なる極めて重要な性質である．

4. 数値計算例および考察

図-2は本研究の計算フローをとりまとめたものである．無条件平均値，無条件共分散が既知のときの推定法であるSimple Cokrigingでは，最適推定値を式(27)で，推定誤差分散を式(29)で評価する．ただし重み係数は式(25)によって求めなければならない．一方，無条件平均値が未知のときの推定法であるUniversal Cokrigingにおいて，最適推定値は式(47)で，変動係数的指標は式(50)で求められる．このとき，未知の重み係数，ラグランジェ乗数は式(45)によって算定される．

本研究では，条件付対数正規確率場において，2変量以上の空間相関性を有する物理量の空間補間法であるCokrigingを，単一変量のKriging推定法と比較検討する．そこで，確率構造(無条件平均値，無条件共分散，対数正規分布)が事前に既知のときは文献6)のSimple Kriging法を，無条件平均値が未知のときの対数正規確率場における推定に当たっては文献7)のUniversal Kriging法を採用する．推定誤差分散は未知の無条件平

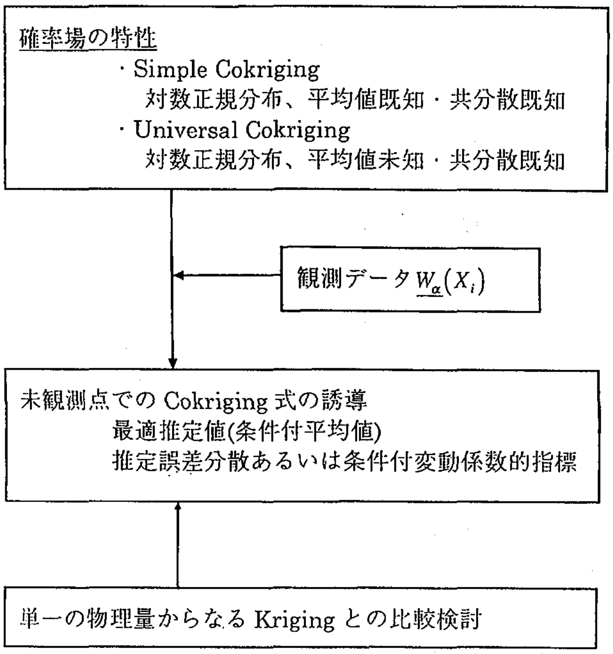


図-2 計算のフロー

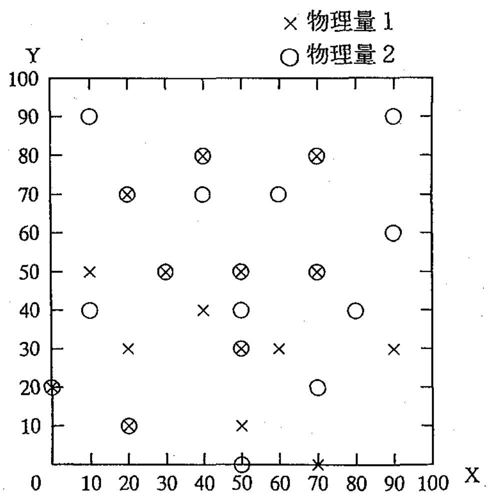


図-3 計算の対象とした観測点配置

均値のときの推定法であるUniversal Caseでは求められないので，Simple CaseとUniversal Caseの比較に当たっては変動係数的指標(=推定誤差標準偏差/無条件平均値)をともに用いる．

ここでは，分析の容易さのため，2つの物理量を用いて数値計算を実施する．未観測点の推定値の算定に当たっては物理量1のみを対象にしても一般性を失うことはない．事前確率場の構造として，物理量1の無条件平均値は空間位置によらず3，物理量2のそれは5とする．無条件分散は物理量1で4，物理量2で16，物理量1と2の無条件相関係数は0.6である．無条件共分散は空間座標に依存せず，2点間距離である相関距離によって決定されると仮定する．すなわち，無条件共分散は，物理量1で$4\exp(-\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|/3)$，物理量2で$16\exp(-\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|/4)$，物理量1と2で$4.8\exp(-\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|/\sqrt{20})$としている．このように数値分析では定常均一確率場を取り扱うので，厳密にはUniversal Kriging，Universal CokrigingではなくOrdinary Kriging，Ordinary Cokrigingを取り扱うことになる．

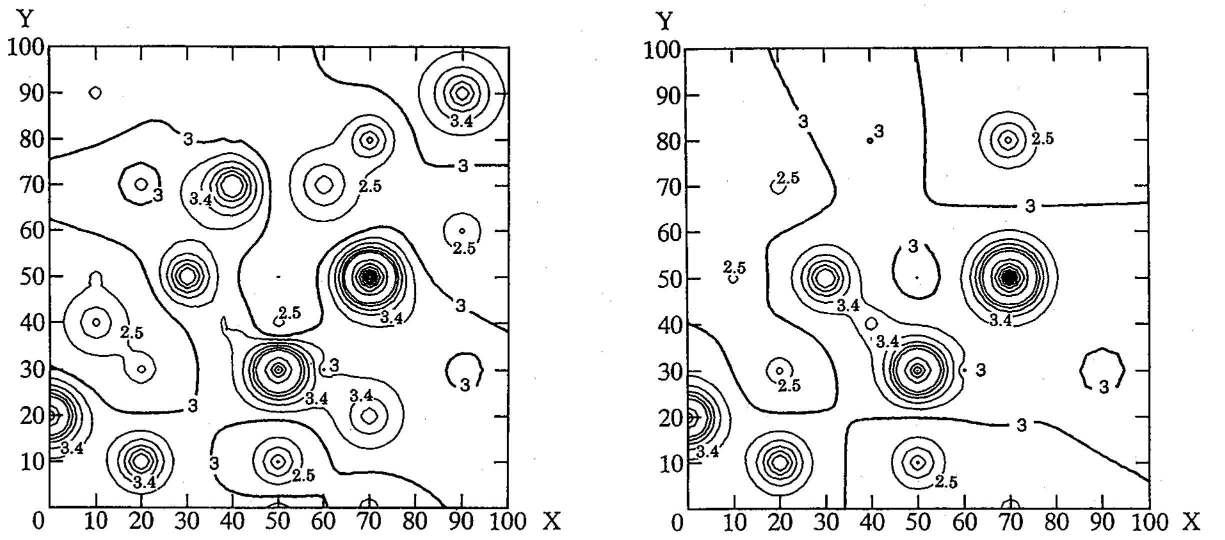
物理量1と2の観測点配置を**図-3**に示す．物理量1は16地点で，物理量2は19地点で観測される．9地点では2つの物理量が得られる．上記確率構造を与えて，共分散のコレスキー分解，標準正規乱数の発生により，無条件場のシミュレーションを実施した．シミュレーション手法の詳細については文献5)，6)を参照されたい．このようにして得られた観測値を基にして**図-2**の計算フローにより，Simple Kriging，Simple Cokriging，Universal Kriging，Universal Cokrigingの計算を行った．

図-4はSimple CokrigingとSimple Krigingの，**図-5**はUniversal CokrigingとUniversal Krigingの最適推定値を比較したものである．変動係数的指標を比較すると，**図-6**，**図-7**のようになる．**図-6**はSimple CokrigingとSimple Krigingの，**図-7**はUniversal CokrigingとUniversal Krigingの場合に相当する．各図とも空間分布を明示するため，等高線マップで図化している．

Krigingは単一物理量のみを考慮した空間分布推定であるのに対し，Cokrigingでは2変量の相互相関性を満たすように推定を行う．従って各図の**(b)**からわかるように物理量1の観測点周辺においては物理量1の観測値の影響を受けて推定が行われている．Cokriging，Krigingとも，推定点が観測点と一致すると，1)最適推定値は観測値と一致し，2)変動係数的指標が0となっている．すなわち観測点近傍ほど推定精度がよく，観測点から離れるほど最適推定値は真値を表現しにくくなる傾向にある．このような傾向は条件付正規確率場においても見られる．

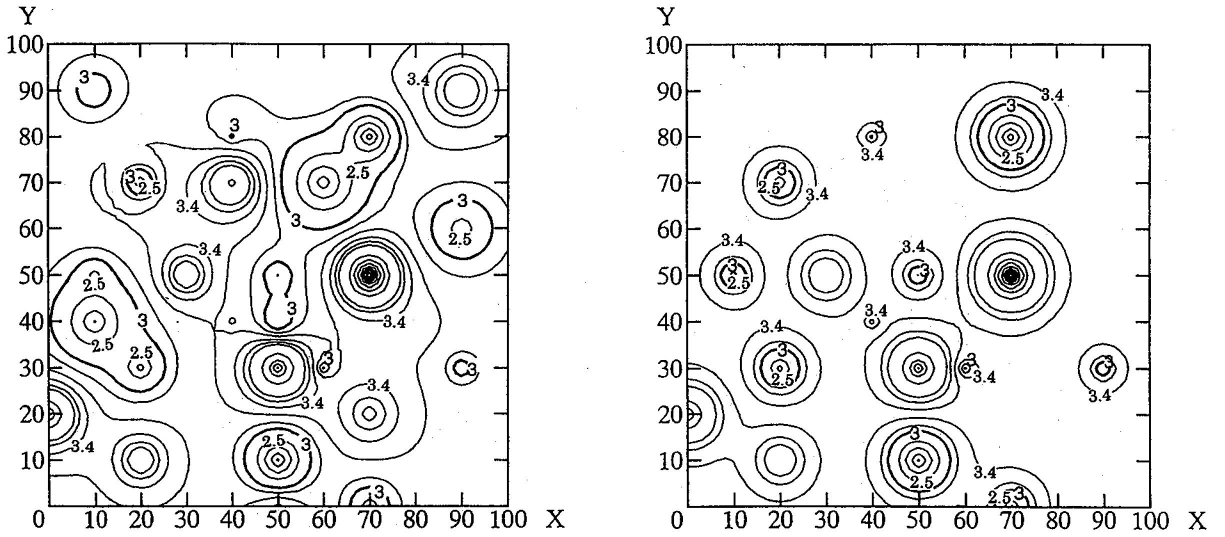
CokrigingはKrigingに比べ物理量2に左右されるので，図の**(a)**と**(b)**の比較からわかるように，物理量2の観測点周辺において物理量2の影響を受け，最適推定値が求められている．物理量2の観測点付近における最適推定値はKrigingによると無条件平均値の3に近い値を呈すが，Cokrigingではその値から変化している．物理量2の観測点付近の変動係数的指標はKrigingよりもCokrigingの方で小さい．Universal Caseの推定結果はSimple Caseと同様なコンターマップを示しているが，事前平均値が未知な分だけ，その値自体はSimple Caseに比べて若干大きくなっている．

上記の傾向をさらに詳しく見るため，X軸，Y軸の任意断面上で推定結果を比較する．**図-8**にはY=40の，**図-9**にはX=10の線上におけるSimple CokrigingとSimple Krigingの最適推定値，変動係数的指標を示した．同様に**図-10**はY=40の，**図-11**はX=10の線上におけるUniversal CokrigingとUniversal Krigingの推定結果である．



(a) Simple Cokriging　　(b) Simple Kriging

図-4 Simple Caseの最適推定値

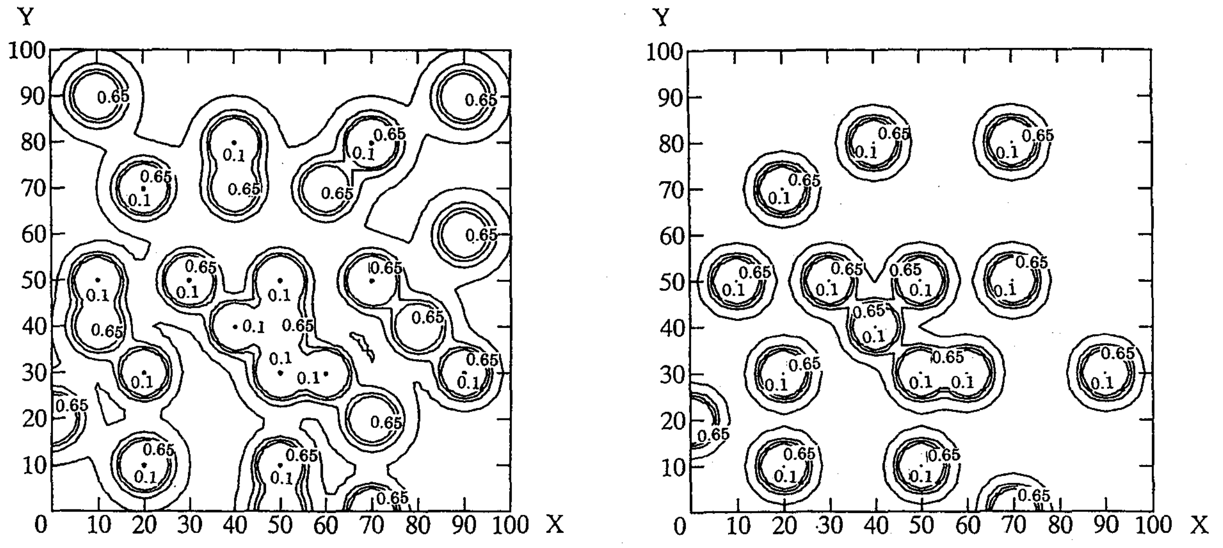


(a) Universal Cokriging　　(b) Universal Kriging

図-5 Universal Caseの最適推定値

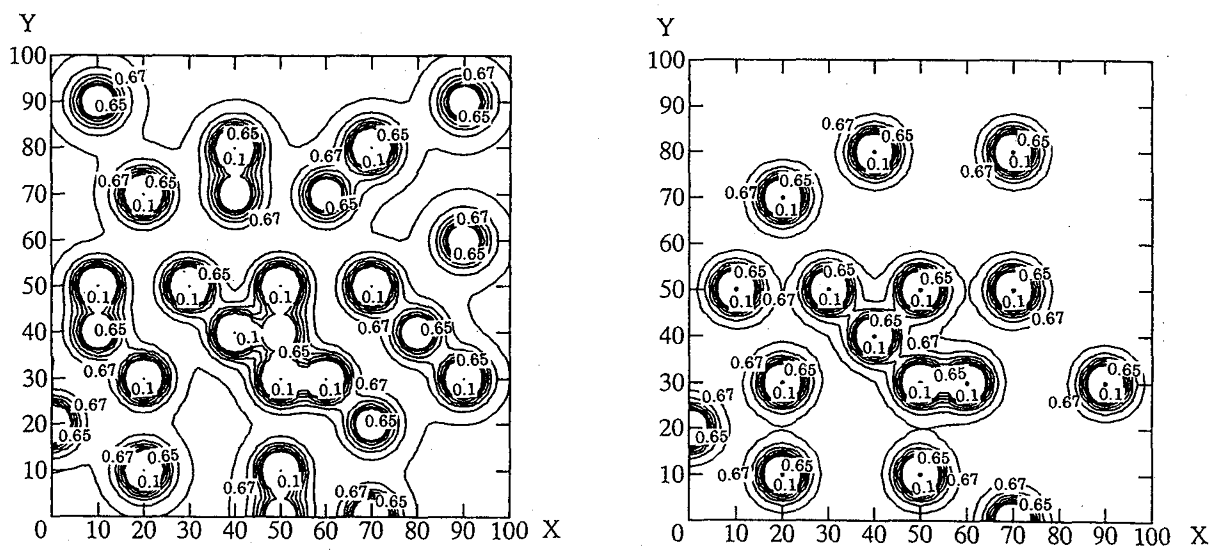
図-3からわかるようにY=40の線上において物理量1はX=40の点で観測されている．X=10，50，80の地点においては物理量2が得られている．Y=40の線を含めY=30，50の線上にも観測値が存在する．仮定した共分散の設定値から考えると，推定点から遠方の観測値はY=40の線上の推定結果に顕著な影響を及ぼさない．従ってY=30，50の線上における観測値の効果のみを考えればよい．同様にX=10の線上には物理量1がY=50で観測されているが，推定結果の分析に当たってはX=0とX=20の線上にある物理量1，2の観測値のみに注目すれば十分である．

図よりわかるように，Krigingでは物理量2に左右されないため，物理量1の観測点付近のみで推定が行われている．すなわち，物理量1の観測点では変動係数的指標が0となり，推定値は観測値に一致している．さらに，観測点から離れると，最適推定値は無条件平均値に，条件付変動係数的指標は無条件変動係数(=無条件標準偏差/無条件平均値)に漸近している．ただし，Universal Krigingでは真の無条件平均値3が未知なため，最適推定値は観測点よりも遠方で16地点の観測値から得られるサンプル平均値に近づいている．またX=10，Y=40の線以外の地点の物理量1の観測値に左右され，最適推定値，変動係数的指標はX=10，Y=40の線上の物理量1の観測点以外で若干変動している．



(a) Simple Cokriging　　(b) Simple Kriging

図-6 Simple Case の条件付変動係数的指標



(a) Universal Cokriging　　(b) Universal Kriging

図-7 Universal Case の条件付変動係数的指標

一方，Cokriging では Kriging の結果と明らかに異なった特徴を示している．例えば Y=40 の線上に注目すると，X=10，50，80 で物理量2が観測されているため，その観測値に相互依存した最適推定値が得られている．すなわちこれらの観測点付近では無条件平均値とは大いに異なる推定値となっている．物理量2の影響を受けて，変動係数的指標は小さくなり，その結果物理量1の推定精度は高まっている．このことは，2変量以上の条件付確率場において相互相関特性を有する物理量を検討するとき，影響度の大きい要因のみを抽出して単一物理量から空間補間を行うことが理論的にも数値的にも正しい結果を与えないことを意味する．

Universal Cokriging，Universal Kriging の推定結果は Simple Cokriging，Simple Kriging と同様の傾向を示している．ただし，無条件平均値が未知なため，Universal Case の最適推定値，変動係数的指標は Simple Case よりも大きくなっている．事前確率場は確率分布，無条件平均値，無条件共分散によってモデル化できる．条件付確率場は観測値を用いてこの事前確率場を更新することを意味する．従って，上記事実は無条件平均値を明らかにしておくことが推定に当たって最も重要なことを示唆するものである．このことは条件付正規確率場の結果と同様である．

図-10，**図-11** に見られるように，Universal Case の最適推定値，変動係数的指標がともに無条件確率場のものよりも大きくなることは条件付正規確率場の Krig-

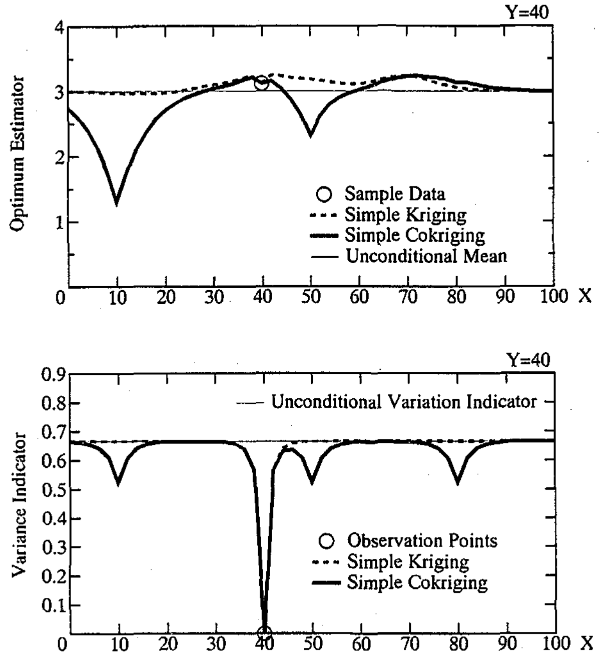


図-8 Y=40の線上におけるSimple CokrigingとSimple Krigingの比較

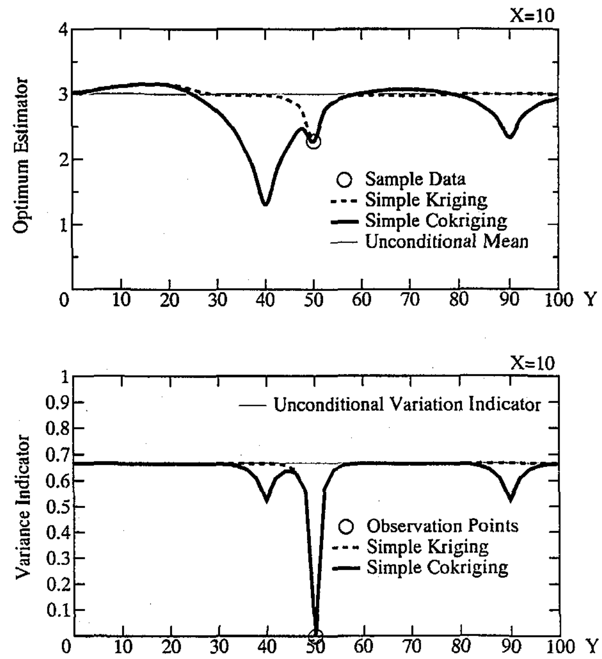


図-9 X=10の線上におけるSimple CokrigingとSimple Krigingの比較

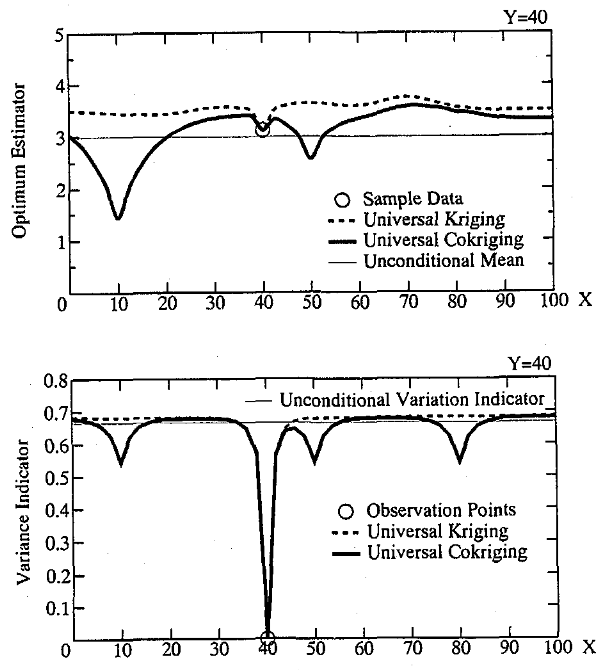


図-10 Y=40の線上におけるUniversal CokrigingとUniversal Krigingの比較

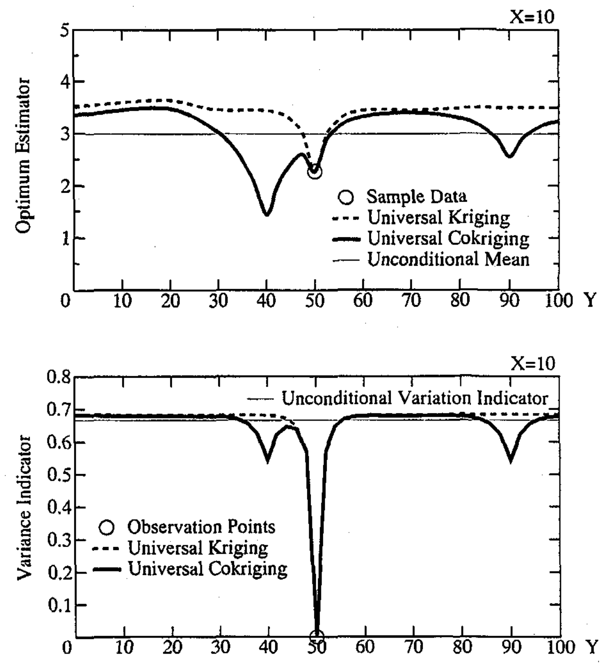


図-11 X=10の線上におけるUniversal CokrigingとUniversal Krigingの比較

ing, Cokrigingにおいて知られていなかった知見であり，本研究で提案した推定理論式の意義・有用性を示すものと考えられる．また正規確率場のように推定誤差分散ではなく，変動係数的指標でしか推定精度を評価できないので，その理論式を提案できたことは本成果の最も重要な点である．

5. おわりに

最近，確率場の概念を用いて空間的に分布する地盤物性値などのモデル化(統計的モデル推定)を行い，さらに調査によって得られた観測値を併用することにより，未観測点における物理量を推定する研究(空間的補間)が盛んに行われている．これは，確率場の一つの実現事象である観測値を用いて空間分布を捉える条件付

確率場の研究である．その際よく用いられるCokrigingは，異なる複数の物理量の観測値より構成されたある物理量の空間分布を推定できるとともに，その推定誤差をも確率的に取り扱うことができる有効な方法である．しかし，これまでは主に正規確率場に従う物理量を対象にした研究が中心であり，その基本的な考え方ならびに理論式は既に文献1)などでよく知られてきた．対数正規確率場のCokrigingも実施されており，その有用性が明らかになっているが，中には不正確な理論展開とその応用研究が見られる．

そこで本研究では，観測値を基にして対数正規確率場の構造が既知のときのSimple Cokrigingの，無条件平均値が未知のときのUniversal Cokrigingの推定理論式を新しく提案した．また単一物理量よりなるSimple Kriging[6)]ならびにUniversal Kriging[7)]と比較検討するため，数値分析を行った．異なる2つの物理量1，2の観測値は，無条件相互共分散を満たすようにシミュレーションによって求めた．なお，推定の対象としたのは物理量1であるが，このようにしても一般性は失われない．

新しい推定理論式の定式化以外に得られた成果をまとめれば，次のようになる．

1) 2つの物理量は相互に相関しているため，単一物理量1のみのデータを用いるKrigingの推定結果(最適推定値，変動係数的指標)はCokrigingの結果と大いに異なる．
2) 特に物理量2の観測点周辺の推定点では物理量2の観測値に左右されて変動係数的指標が小さくなり，最適推定値はそのデータの影響を強く受ける．
3) Universal推定法では無条件平均値を正しく推定できないため，最適推定値，条件付変動係数的指標はSimpleのそれよりも大きくなり，Simple推定法に比べて推定精度が悪い．

上記1)，2)の結果は既往の条件付正規確率場においても見られる定性的な特徴であるが，3)については条件付対数正規確率場に特有の性質である．よって事前情報の違いに伴う推定理論式を提案することは実際にデータ解析をする上で必要不可欠であろう．

対数正規確率場に従い，周波数成分の異なる最大地動の空間分布を推定する際には，観測された最大加速度，最大速度，SI値などの異種情報を用いることが望ましい．実現象においてはこのように複数の物理量が相互に影響していることがあるため，本論で提案した対数正規混合確率場におけるCokriging法を用いる意義・有用性が明らかになった．

参考文献

1) Journel, A. G. and Huijbregts, C. J.: *Mining Geostatistics*, Academic Press, New York, 1978.
2) Ripley, R. D.: *Spatial Statistics*, John Wiely & Sons, New York, 1981.
3) David, M.: *Handbook of Applied Advanced Geostatistical Ore Reserve Estimation*, Elsevier Scientific Publishing, Amsterdam, 1988.
4) Christakos, G.: *Random Field Models in Earth Sciences*, Academic Press, San Diego, 1992.
5) Cressie, N. A. C.: *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.
6) 野田　茂，星谷　勝：条件付対数正規確率場の同定，第9回日本地震工学シンポジウム(1994)論文集，Vol. 1，pp. 247-252，1994年12月．
7) 野田　茂，星谷　勝，塚本博之：対数正規確率場におけるユニバーサル・クリッキング，第9回日本地震工学シンポジウム(1994)論文集，Vol. 1，pp. 253-258，1994年12月．
8) 星谷　勝，野田　茂，稲田　裕：観測情報に基づく条件付非正規確率場の推定理論の誘導，土木学会論文集，No. 570/I-40，pp. 83-95，1997年7月．
9) 星谷　勝，桑名智英：条件付確率場のシミュレーション理論の検証，土木学会論文集，No. 477/I-25，pp. 93-96，1993年10月．

(1999年9月17日受付)