条件付正規・対数正規混合確率場における空間分布推定

Conditional Estimation of Stochastic Field Formed by Mixtures of Gaussian and Lognormal Variables

野田　茂*，伊藤秀一**，星谷　勝***
Shigeru Noda, Shuuichi Itoh, Masaru Hoshiya

*工博，鳥取大学助教授，工学部社会開発システム工学科 (〒680-0945　鳥取市湖山町南4-101)
**中央コンサルタンツ (〒451-0042　名古屋市西区那古野町2-11-23)
***Ph. D.，武蔵工業大学教授，工学部土木工学科 (〒158-0087　東京都世田谷区玉堤1-28-1)

The processes formed by mixtures of Gaussian and lognormal variables are considered, whose mean field and covariance matrix are known a priori. When a sample observation at some finite points is obtained, the best estimators of Gaussian or lognormal variable are evaluated at observation points as well as at interpolation points, based on an unbiased least error covariance procedure. Numerical examples are demonstrated to show the usefulness of Cokriging proposed herein compared with Kriging's results evaluated for each variable of the observed data.

Key Words: *geostatistics, combined cokriging, Gaussian field, lognormal field, conditional estimation, optimal estimator, error variance*

1.　序論

空間的に分布するデータを確率統計学的に取り扱う分野であるGeostatisticsはMatheron[1]によって作られた造語であるが，今日では空間統計学なる一つの学問分野を確立しつつある[2)~5)]．Matheron以前は，空間的に変動するデータを確定論的立場によって取り扱い，観測値を観測位置や時間の関数として統計学的に処理することがなかった．

Geostatisticsでは，1) 観測値の空間的な特徴を記述すること，2) 観測領域全体における物理量の確率分布を推定すること，3) 観測値が得られた領域全体における平均値，分散，共分散を推定すること，4) 観測値が得られていない特定地点での値を推定すること，5) 同一地点で複数の物理量を考えるとき，ある一つの物理量を他の物理量を用いて推定すること，6) このようにして得られた各種の推定量の不確実性を推定誤差分散によって定量的に評価することが行われる．

上記4) と5) は補間問題としてこれまで多用されてきており，空間的に変動する確率過程に対する内外挿技術として知られている．この考え方を最初に示したKrigeに敬意を表して，Matheronはこの解析手法をKrigingと称した．現在この概念を拡張した各種のKrigingが考案されている (例えば文献4)，5) 参照)．

Krigingは，観測値が有限地点で与えられたとき，未観測点での物理量を推定する手法であるが，今日では条件付確率場の理論として注目されている．これまで，正規分布ならびに対数正規分布を含む一般的な非正規分布に従う条件付確率場のシミュレーション理論および推定理論が，星谷[6]，野田・星谷[7]，星谷・野田・稲田[8]，Shinozuka and Zhang[9]ほかによって提案されてきた．しかしながら，得られた観測値を検討して見ると，異なる確率分布によって支配された確率場の存在が明らかになった．既往の研究ではこのような混合確率場の推定問題を取り扱っていない．

これまでは確率場の補間問題に対して正規確率場の推定理論をそのまま踏襲した研究がほとんどである．これは対象とする物理量が正規性を有すること，理論的な取り扱いが容易になることが原因している．しかし，地盤などの物理量に関する観測値の統計解析から，対数正規分布などの非正規性を有すること，複数の異なる確率分布を要因としていることが指摘されている．このようなときには混合確率場の推定理論が必要になる．

そこで本研究では，相関関係を有する正規分布と対数正規分布に従う混合確率場を対象として，未観測点における条件付確率場を推定する理論 (Combined Cokriging) を提案する．また，正規確率場ならびに対数正規確率場が独立に生起する場合における単一確率場の推定理論式 (Kriging式) とも比較検討する．さらにはシミュレーションによって得られた観測値を用いて数値分析を行い，最適推定値，推定誤差分散の計算値を検討した上で混合確率場の特性を明らかにする．なおCokrigingはこれまで知られてきたが，異なる確率分布に対するCokrigingの提案は本論が始めてである．

最大加速度，最大速度，最大変位，SI値は対数正規分布に，計測震度は正規分布に従う．従って例えば最大加速度，計測震度の観測値を用いてこれら空間分布を求めるときには本論で提案する条件付混合確率場における推定理論が大いに役立つであろう．

2. 混合確率場における考え方

空間位置$\boldsymbol{X}$において，正規分布に従う物理量を$V(\boldsymbol{X})$，対数正規分布に従う物理量を$W(\boldsymbol{X})$，$W(\boldsymbol{X})$を正規変換したものを$\ln W(\boldsymbol{X})$とする．このとき，$V(\boldsymbol{X}), W(\boldsymbol{X}), \ln W(\boldsymbol{X})$の平均値をおのおの$m_V(\boldsymbol{X})$, $m_W(\boldsymbol{X}), m_e(\boldsymbol{X})$，またそれぞれの分散を$\sigma_V^2(\boldsymbol{X})$, $\sigma_W^2(\boldsymbol{X})$，$\sigma_e^2(\boldsymbol{X})$として表す．なお添字の$e$は対数正規確率変量$W(\boldsymbol{X})$から変換された正規確率変量$\ln W(\boldsymbol{X})$を意味する．

対数正規確率変量$W(\boldsymbol{X})$，正規確率変量$\ln W(\boldsymbol{X})$の平均値，分散は次式によって関連づけられる．

$$m_W(\boldsymbol{X}) = \exp\left(m_e(\boldsymbol{X}) + \frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X})\right) \quad (1)$$

$$\sigma_W^2(\boldsymbol{X}) = m_W^2(\boldsymbol{X})\left(e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X})} - 1\right) \quad (2)$$

一方，空間位置$\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$における対数正規確率変量の共分散については次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} &C(W(\boldsymbol{X}_i), W(\boldsymbol{X}_j)) \\ &= m_W(\boldsymbol{X}_i) m_W(\boldsymbol{X}_j) \\ &\cdot\left(e^{C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_j))} - 1\right) \end{aligned} \quad (3)$$

式(2)，式(3)から，対数正規確率変量$W(\boldsymbol{X}_i)$, $W(\boldsymbol{X}_j)$の相関係数をρ_Wとすると，正規確率変量$\ln W(\boldsymbol{X}_i)$,$\ln W(\boldsymbol{X}_j)$の共分散は

$$\begin{aligned} &C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_j)) \\ &= \ln\left[1 + \rho_W\left\{(e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_i)} - 1)(e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)} - 1)\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \quad (4)$$

となり，また正規確率変量$\ln W(\boldsymbol{X}_i)$,$\ln W(\boldsymbol{X}_j)$の相関係数をρ_eとすると，式(1)，式(3)から対数正規確率変量$W(\boldsymbol{X}_i), W(\boldsymbol{X}_j)$の共分散は次式で表せる．

$$\begin{aligned} &C(W(\boldsymbol{X}_i), W(\boldsymbol{X}_j)) \\ &= \exp\left(m_e(\boldsymbol{X}_i) + m_e(\boldsymbol{X}_j) + \frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_i) + \frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right) \\ &\cdot\left(e^{\rho_e \sigma_e(\boldsymbol{X}_i)\sigma_e(\boldsymbol{X}_j)} - 1\right) \end{aligned} \quad (5)$$

正規確率変量$V(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_j)$の共分散は，それらの間の相関係数を$\rho'_e$とすると，次のようである．

$$C(V(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_j)) = \rho'_e \sigma_V(\boldsymbol{X}_i)\sigma_e(\boldsymbol{X}_j) \quad (6)$$

今，**図-1**に示すように，正規確率変量の観測値$\underline{V}(\boldsymbol{X}_i)(i = 1 \sim n)$が$n$地点で，対数正規確率変量の観測値$\underline{W}(\boldsymbol{X}_j)(j = 1 \sim m)$が$m$地点で与えられている問題を考える．なお，$\underline{V}$と$\underline{W}$の観測点は同一になるとは限らない．また，$n, m$個の観測値は独立に生じるのではなく，上述したように正規確率変量と対数正規確率変量の相関関係を満たすように得られる．

ここでは，正規確率変量，対数正規確率変量の平均値ベクトル，共分散行列，正規確率変量と対数正規確率変量間の共分散行列が事前情報として与えられたとき，文献5) に示されたコレスキー分解法を用いて無条件混合確率場の観測値を$(n+m)$地点でシミュレートする．この観測値を基にして**3.**，**4.**で述べる推定理論を用いて，未観測点での最適推定値，推定誤差分散を評価する．

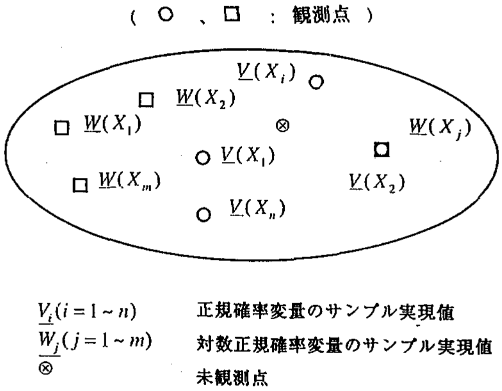

図-1 観測点と推定点

3. 条件付混合確率場における正規確率変量の推定

本章では正規確率変量と対数正規確率変量の相互相関性を満足するようにシミュレートされた観測値を用いて，正規確率変量の空間分布を推定する方法を示す．

3.1 基本式

未観測点$\boldsymbol{X}_{n+1}$における正規確率変量$V(\boldsymbol{X}_{n+1})$は，n地点の確率変量$V(\boldsymbol{X}_1)\cdots V(\boldsymbol{X}_n)$と，$m$地点の対数正規確率変量$W(\boldsymbol{X}_1)\cdots W(\boldsymbol{X}_m)$に基づいて推定する．このとき，推定量$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$は次式を満足するように求められると仮定する．

$$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i V(\boldsymbol{X}_i) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j \ln W(\boldsymbol{X}_j) + k \quad (7)$$

ただし，k, $\alpha_i(i = 1 \sim n), \beta_j(j = 1 \sim m)$は未知定数であり，これらは後述するように不偏推定・最小誤差分散の条件から得られる．

上式の両辺の期待値をとり，**2.**で述べた記号を用いると，

$$\begin{aligned} &E\left[\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_V(\boldsymbol{X}_i) \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j) - \frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right) + k \end{aligned} \quad (8)$$

となる.

一方, $\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$ の分散は次式で表せる.

$$\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_i\beta_j C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j)) \quad (9)$$

3.2 不偏推定の条件

不偏推定の条件は次のようである.

$$E\left[\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-V(\boldsymbol{X}_{n+1})\right]=0 \quad (10)$$

従って, 上式左辺に式(8)を代入すると,

$$E\left[\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})\right]-E\left[V(\boldsymbol{X}_{n+1})\right]=k-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_V(\boldsymbol{X}_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right) \quad (11)$$

となる. これより, 不偏推定が成り立つためには

$$k=m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_V(\boldsymbol{X}_i)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right) \quad (12)$$

とならなければならない. このとき, 当然次の不偏性が成立する.

$$E[\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})]=m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}) \quad (13)$$

以上により, 正規確率変量の平均値 $m_V(\boldsymbol{X})$, 対数正規確率変量の平均値$m_W(\boldsymbol{X})$ ならびに分散$\sigma_W^2(\boldsymbol{X})$ が既知のとき, 未観測点$\boldsymbol{X}_{n+1}$における最適推定量$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$は

$$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})=m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(V(\boldsymbol{X}_i)-m_V(\boldsymbol{X}_i))+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left\{\ln W(\boldsymbol{X}_j)-\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right)\right\} \quad (14)$$

で表せる. なお, 重み係数α_i,β_j を求める必要があるが, これは最小誤差分散の条件から得られる.

3.3 誤差分散と重み係数

推定誤差分散$\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-V(\boldsymbol{X}_{n+1}))$ は次式で表せる.

$$\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-V(\boldsymbol{X}_{n+1}))=\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}))+\sigma^2(V(\boldsymbol{X}_{n+1}))-2E\Big[(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\Big] \quad (15)$$

ただし,

$$\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-V(\boldsymbol{X}_{n+1}))=E\Big[\Big\{\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})-(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\Big\}^2\Big] \quad (16.a)$$

$$\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}))=E\Big[(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))^2\Big] \quad (16.b)$$

$$\sigma^2(V(\boldsymbol{X}_{n+1}))=E\Big[(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))^2\Big] \quad (16.c)$$

式(15)の右辺第3項に示す項(式(17))は$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$と$V(\boldsymbol{X}_{n+1})$の共分散である.

$$E\Big[(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\Big] \quad (17)$$

この共分散をまず評価するため, $\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$-$m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})$を次のように求める. すなわち, $\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$の平均値は$m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})$であるので, $\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$-$m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})$は式(14)より

$$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(V(\boldsymbol{X}_i)-m_V(\boldsymbol{X}_i))+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left\{\ln W(\boldsymbol{X}_j)-\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right)\right\} \quad (18)$$

で表せる. 従って, $\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$と$V(\boldsymbol{X}_{n+1})$の共分散は次式のようになる.

$$\begin{aligned}E\Big[\Big(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})\Big)\Big(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})\Big)\Big]&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E\Big[(V(\boldsymbol{X}_i)-m_V(\boldsymbol{X}_i))\cdot(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\Big]\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta_j E\Big[(\ln W(\boldsymbol{X}_j)-m_e(\boldsymbol{X}_j))\cdot(V(\boldsymbol{X}_{n+1})-m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\Big]\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_{n+1}))+\sum_{j=1}^{m}\beta_j C(\ln W(\boldsymbol{X}_j),V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\end{aligned} \quad (19)$$

$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})$, $V(\boldsymbol{X}_{n+1})$ の平均値は$m_V(\boldsymbol{X}_{n+1})$で, 共分散は式(19)で表せる. よって, 式(9), 式(19)を式(15)に代入すれば, 推定誤差分散は次式で求められる.

$$\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1})-V(\boldsymbol{X}_{n+1}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_V^2(\boldsymbol{X}_{n+1}) - 2\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\\
&\quad + \sum_{j=1}^{m}\beta_j C(\ln W(\boldsymbol{X}_j), V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\Bigg)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_i\beta_j C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j C(V(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_j)) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

式(20)を重み係数$\alpha_k(k=1\sim n), \beta_l(l=1\sim m)$で偏微分して0とおけば，最小誤差分散の条件式が式(22)のように得られる．すなわち，

$$\frac{\partial\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}) - V(\boldsymbol{X}_{n+1}))}{\partial\alpha_k} = 0 \quad (k=1\sim n) \tag{21.a}$$

$$\frac{\partial\sigma^2(\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}) - V(\boldsymbol{X}_{n+1}))}{\partial\beta_l} = 0 \quad (l=1\sim m) \tag{21.b}$$

より，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_k))\\
&\quad + \sum_{j=1}^{m}\beta_j C(V(\boldsymbol{X}_k), \ln W(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad = C(V(\boldsymbol{X}_k), V(\boldsymbol{X}_{n+1})) \quad (k=1\sim n) \qquad (22.a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C(V(\boldsymbol{X}_i), \ln W(\boldsymbol{X}_l))\\
&\quad + \sum_{j=1}^{m}\beta_j C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l), \ln W(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad = C(\ln W(\boldsymbol{X}_l), V(\boldsymbol{X}_{n+1})) \quad (l=1\sim m) \qquad (22.b)
\end{aligned}
$$

なる$(n+m)$次元の連立方程式が求められる．

3.4 最適推定値と最小誤差分散

観測値$\underline{V}(\boldsymbol{X}_i)(i=1\sim n), \underline{W}(\boldsymbol{X}_j)(j=1\sim m)$が具体的に与えられた場合，$\boldsymbol{X}_{n+1}$地点における正規確率変量の最適推定値$\widehat{\underline{V}}_K(\boldsymbol{X}_{n+1})$は，式(14)より，

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\underline{V}}_K(\boldsymbol{X}_{n+1})\\
&= m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\underline{V}(\boldsymbol{X}_i) - m_V(\boldsymbol{X}_i)\Big)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left\{\ln\underline{W}(\boldsymbol{X}_j) - \left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j) - \frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right)\right\} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となる．

最小誤差分散$\sigma_K^2(\boldsymbol{X}_{n+1})$は，式(20)に式(22)を代入すると，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\sigma_K^2(\boldsymbol{X}_{n+1}) &= \sigma_V^2(\boldsymbol{X}_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_{n+1}))\\
&\quad - \sum_{j=1}^{m}\beta_j C(\ln W(\boldsymbol{X}_j), V(\boldsymbol{X}_{n+1})) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

なお，式(23)，式(24)における重み係数α_i, β_jは式(22)の解で与えられる．

3.5 単一確率場との対比

式(23)は正規確率変量と対数正規確率変量の混合確率場において得られる正規確率変量の最適推定値，式(24)はそのときの推定誤差分散である．

一方，正規確率変量のみで構成された単一確率場の線形補間式は式(7)に比し次式で表せる．

$$\widehat{V}(\boldsymbol{X}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i V(\boldsymbol{X}_i) + k \tag{25}$$

このとき，文献6)によれば，最適推定値は式(26)，誤差分散値は式(27)で表せる．

$$\widehat{\underline{V}}_K(\boldsymbol{X}_{n+1}) = m_V(\boldsymbol{X}_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\underline{V}(\boldsymbol{X}_i) - m_V(\boldsymbol{X}_i)) \tag{26}$$

$$\sigma_K^2(\boldsymbol{X}_{n+1}) = \sigma_V^2(\boldsymbol{X}_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_{n+1})) \tag{27}$$

式(26)，式(27)における重み係数$\lambda_i(i=1\sim n)$は次式を解くことにより求められる．

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_j)) = C(V(\boldsymbol{X}_i), V(\boldsymbol{X}_{n+1})) \quad (i=1\sim n) \tag{28}$$

式(22)において$V(\boldsymbol{X})$と$\ln W(Y)$，$\ln W(\boldsymbol{X})$と$\ln W(Y)$の共分散を0として求めた重み係数α_jは式(28)の重み係数λ_jと同一の値となる．また，式(23)，式(24)の右辺第3項を0とすれば，それらは式(26)，式(27)になる．

以上のことから，混合確率場における正規確率変量の推定結果は対数正規確率変量の影響を受けるので，単一確率場の推定結果とかなり異なることが予想される．特に混合確率場の最適推定値は対数正規確率変量の観測値が陽に現れるようになるため，空間場の条件設定に依存し，単一確率場に比べて顕著な相違を示すと考えられる．

4. 条件付混合確率場における対数正規確率変量の推定

4.1 基本式

未観測点$\boldsymbol{X}_{m+1}$の対数正規確率変量$W(\boldsymbol{X}_{m+1})$は，m地点の確率変量$W(\boldsymbol{X}_1)\cdots W(\boldsymbol{X}_m)$と$n$地点の正規確率変量$V(\boldsymbol{X}_1)\cdots V(\boldsymbol{X}_n)$に基づいて推定されると考

える．このとき，推定量$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$を次式のように表す．

$$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_iV(\boldsymbol{X}_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta'_j\ln W(\boldsymbol{X}_j)+k' \tag{29}$$

ただし，k'，$\alpha'_i(i=1\sim n)$，$\beta'_j(j=1\sim m)$は未知定数である．

式(1)で示した正規確率変量と対数正規確率変量の関係より，次式が成り立つ．

$$E\left[\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right]=\exp\left(E[\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})]+\frac{1}{2}\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1}))\right) \tag{30}$$

上式を評価するため，まず式(29)の両辺の期待値をとって$E[\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})]$を次のように求める．

$$E\left[\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right]=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_im_V(\boldsymbol{X}_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta'_j\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right)+k' \tag{31}$$

一方で，分散$\sigma^2\left(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)$は式(29)，式(31)より次式で表せる．

$$\begin{aligned}\sigma^2\left(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)&=E\left[\left(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-E\left[\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right]\right)^2\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_i\alpha'_jC(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta'_i\beta'_jC_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\&\quad+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha'_i\beta'_jC(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\end{aligned} \tag{32}$$

上式において，式(31)は式(8)に，式(32)は式(9)に対応する．

4.2 不偏推定の条件

不偏推定の条件は次のようであるが，

$$E\left[\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right]=0 \tag{33}$$

上式は次式と同じである．

$$\begin{aligned}&E\left[\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right]-E\left[W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right]\\&=\exp\left(E[\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})]+\frac{1}{2}\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1}))\right)\\&\quad-e^{\ln m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})}\end{aligned} \tag{34}$$

これより，式(31)，式(32)を上式に代入した後，不偏性を考えると，未知定数k'は

$$\begin{aligned}k'&=\ln m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})-\sum_{i=1}^{n}\alpha'_im_V(\boldsymbol{X}_i)\\&\quad-\sum_{j=1}^{m}\beta'_j\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_i\alpha'_jC(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))\right.\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta'_i\beta'_jC_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\&\quad\left.+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha'_i\beta'_jC(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\right)\end{aligned} \tag{35}$$

とならなければならない．このとき，次式が成立する．

$$E[\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})]=m_W(\boldsymbol{X}_{m+1}) \tag{36}$$

最適推定量は式(29)，式(35)より

$$\begin{aligned}&\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\\&=\exp\left(k'+\sum_{i=1}^{n}\alpha'_iV(\boldsymbol{X}_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta'_j\ln W(\boldsymbol{X}_j)\right)\\&=\exp\left[\ln m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})+\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\left(V(\boldsymbol{X}_i)-m_V(\boldsymbol{X}_i)\right)\right.\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta'_j\left\{\ln W(\boldsymbol{X}_j)-\left(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\right)\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_i\alpha'_jC(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))\right.\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta'_i\beta'_jC_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\&\quad\left.\left.+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha'_i\beta'_jC(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\right\}\right]\end{aligned} \tag{37}$$

で表せる．

式(37)の計算においては重み係数$\alpha'_i(i=1\sim n)$，$\beta'_j(j=1\sim m)$が必要となるが，これは最小誤差分散の条件から得られる．

4.3 誤差分散と重み係数

$\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$の推定誤差分散は次式で表せる．

$$\begin{aligned}&\sigma^2\left(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)\\&=\sigma^2\left(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)+\sigma^2\left(W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)\\&\quad-2E\left[\left(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)\right.\\&\quad\left.\cdot\left(W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right)\right]\end{aligned} \tag{38}$$

ただし，次の分散を定義しなければならない．

$$\sigma^2(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1}))=E\left[\left\{\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})\right.\right.$$

$$-(W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Big\}^2\Big] \quad (39.a)$$

$$\sigma^2(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})) = E\Big[(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1}))^2\Big] \quad (39.b)$$

$$\sigma^2(W(\boldsymbol{X}_{m+1})) = E\Big[(W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1}))^2\Big] \quad (39.c)$$

式(38)の右辺第3項を評価するためには，$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$ と $\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})$ の共分散すなわち次式をまず評価する必要がある．

$$E\Big[(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))\cdot(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Big] \quad (40)$$

式(29)，式(31)を用いると，

$$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\Big(V(\boldsymbol{X}_i)-E[V(\boldsymbol{X}_i)]\Big) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j'\Big(\ln W(\boldsymbol{X}_j)-E[\ln W(\boldsymbol{X}_j)]\Big) \quad (41)$$

が成り立つので，$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$，$\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})$ の共分散は式(40)，式(41)より次式で表せる．

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big)\cdot\Big(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1})]\Big)\Big]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'E\Big[\Big(V(\boldsymbol{X}_i)-m_V(\boldsymbol{X}_i)\Big)\cdot\Big(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big)\Big]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'E\Big[\Big(\ln W(\boldsymbol{X}_j)-m_e(\boldsymbol{X}_j)\Big)\cdot\Big(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big)\Big]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))
\end{aligned} \quad (42)$$

$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$，$\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})$ の平均値はともに $m_e(\boldsymbol{X}_{m+1})$ で，それらの共分散は上式で表される．また，$\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1}), W(\boldsymbol{X}_{m+1})$ の平均値は $m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})$ であるから，式(3)を用いると，$\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$ と $W(\boldsymbol{X}_{m+1})$ の共分散は

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big)\cdot\Big(W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big)\Big]\\
&=m_W^2(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big\{\exp\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Big)-1\Big\}
\end{aligned} \quad (43)$$

となる．

よって，式(2)，式(32)の関係を考慮しながら，式(39.b)，式(39.c)，式(43)を式(38)に代入すれば，推定誤差分散は次式で表せる．

$$\begin{aligned}
&\sigma^2(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&=m_W^2(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i'\alpha_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i'\beta_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_i'\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\Big\}\\
&+e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})}-2\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Big\}\Big]
\end{aligned} \quad (44)$$

一方，正規確率場における推定誤差分散 $\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))$ は次式のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&=E\Big[(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))^2\Big]\\
&\quad+E\Big[(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))^2\Big]\\
&\quad-2E\Big[(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))\cdot(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Big]\\
&=\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1}))+\sigma^2(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&\quad-2E\Big[(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))\cdot(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})-m_e(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Big]
\end{aligned} \quad (45)$$

上式右辺に示す3つの項は式(46)～式(48)で示されるので，

$$\begin{aligned}
\text{右辺第1項} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i'\alpha_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i'\beta_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_i'\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))
\end{aligned} \quad (46)$$

$$\text{右辺第2項} = \sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1}) \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺第3項} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))
\end{aligned} \quad (48)$$

これより式(45)は次式で表せる．

$$\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))$$
$$=\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})-2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i'\alpha_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))$$
$$+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i'\beta_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_i'\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j)) \qquad (49)$$

最小誤差分散条件は，式(44)を重み係数$\alpha_k'(k=1\sim n),\beta_l'(l=1\sim m)$で偏微分して0とおけばよい．すなわち，

$$\frac{\partial\sigma^2(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1}))}{\partial\alpha_k'}=0\ \ (k=1\sim n) \qquad (50.a)$$

$$\frac{\partial\sigma^2(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1}))}{\partial\beta_l'}=0\ \ (l=1\sim m) \qquad (50.b)$$

より，次式が求められる．

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_k))\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\beta_j'(C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\right)e^{B}$$
$$=C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))e^{A} \qquad (51.a)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_l))\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_l))\right)e^{B}$$
$$=C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))e^{A} \qquad (51.b)$$

ただし，A，Bは次の通りである．

$$A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})) \qquad (52.a)$$

$$B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i'\alpha_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))$$
$$+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i'\beta_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\beta_i'\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j)) \qquad (52.b)$$

式(52)は次式と等価である．

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_k))$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\beta_j'(C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_j))$$
$$=C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))e^{A-B} \qquad (53.a)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_l))$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_l))$$
$$=C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))e^{A-B} \qquad (53.b)$$

ここで，指数部の$A-B$を式(52)を用いて検討すると，

$$A-B$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\left(C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\right.$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'\left(C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\right.$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\beta_i'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\right) \qquad (54)$$

となるので，この式を式(53)と組み合わせると，結局重み係数α',β'は次式を満たす必要のあることが証明される．

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_k))$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_j))$$
$$=C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\qquad(k=1\sim n)(55.a)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i'C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_l))$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j'C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l),\ln W(\boldsymbol{X}_j))$$
$$=C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\ \ (l=1\sim m) \qquad (55.b)$$

混合確率場における対数正規確率変量の誤差分散は，重み係数α',β'が式(55)の連立方程式を満たすとき，最小化される．このとき，対数正規確率変量の推定誤差分散を最小にする重み係数は正規確率変量の誤差分散を最小にすることが証明できる．すなわち，式(44)に示す対数正規確率変量の推定誤差分散を最小にするような $\alpha'_k(k=1\sim n),\beta'_l(l=1\sim m)$ は式(49)に示す正規確率変量の推定誤差分散を最小にする．つまり両式から得られる重み係数$\alpha'_k(k=1\sim n),\beta'_l(l=1\sim m)$は同一の値を与えるのである．

今，式(50)の代わりに，式(49)の最小解を得るため

$$\frac{\partial\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))}{\partial\alpha'_k}=0 \quad (56.a)$$

$$\frac{\partial\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))}{\partial\beta'_l}=0 \quad (56.b)$$

を満たす$\alpha'_k(k=1\sim n),\beta'_l(l=1\sim m)$を具体的に求めて見る．実際に式(56)の偏微分を行えば，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\alpha'_iC(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_k))\\&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\beta'_jC(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\&\quad=C(V(\boldsymbol{X}_k),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\quad(k=1\sim n)\quad(57.a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\alpha'_iC(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_l))\\&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\beta'_jC_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l),\ln W(\boldsymbol{X}_j))\\&\quad=C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_l),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\quad(l=1\sim m)\\&\qquad\qquad(57.b)\end{aligned}$$

が得られる．上式は式(55)と同一である．

これより重み係数の$\alpha'_k(k=1\sim n),\beta'_l(l=\sim m)$は$(n+m)$次元の連立方程式を解けば求められることになる．これらの式は式(22)において，$V(\boldsymbol{X}_{n+1})$の代わりに$\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})$と置いた式と等価であることがわかる．つまりこのことは，正規確率変量と対数正規確率変量が相互に相関している場合，正規確率上あるいは対数正規確率上のどちらで考えても，同種の連立方程式から混合確率場の重み係数が得られることを意味する．

4.4 最適推定値と最小誤差分散

今，観測値 $\underline{V}(\boldsymbol{X}_i)(i=1\sim n)$，$\underline{W}(\boldsymbol{X}_j)(j=1\sim m)$が与えられた条件下において，未観測点$\boldsymbol{X}_{m+1}$における最適推定値$\widehat{\underline{W}}_K(\boldsymbol{X}_{m+1})$は，式(37)に式(55)を代入して式(52.a)のAを用いると，

$$\begin{aligned}&\widehat{\underline{W}}_K(\boldsymbol{X}_{m+1})\\&=\exp\Bigg[\ln m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})+\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\Big(\underline{V}(\boldsymbol{X}_i)-m_V(\boldsymbol{X}_i)\Big)\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}\beta'_j\Bigg\{\ln\underline{W}(\boldsymbol{X}_j)-\Bigg(\ln m_W(\boldsymbol{X}_j)\\&\quad-\frac{1}{2}\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_j)\Bigg)\Bigg\}-\frac{1}{2}A\Bigg]\qquad(58)\end{aligned}$$

で表される．

一方，推定誤差分散は式(44)，式(46)，式(52)，式(55)より次のようになる．

$$\begin{aligned}&\sigma_K^2(\boldsymbol{X}_{m+1})\\&=\sigma^2(\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})-W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\&=m_W^2(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big(e^{\sigma^2(\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1}))}\\&\quad+e^{\sigma^2(\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))}-2e^{A}\Big)\\&=m_W^2(\boldsymbol{X}_{m+1})\Big(e^{B}+e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})}-2e^{A}\Big)\\&=m_W^2(\boldsymbol{X}_{m+1})e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})}\Big(1-e^{-\sigma_{K_e}^2(\boldsymbol{X}_{m+1})}\Big)\\&\qquad(59)\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}&\sigma_{Ke}^2(\boldsymbol{X}_{m+1})\\&=\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})-A\\&=\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})-\sum_{i=1}^{n}\alpha'_iC(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\\&\quad-\sum_{j=1}^{m}\beta'_jC_e(\ln W(\boldsymbol{X}_j),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\qquad(60)\end{aligned}$$

式(60)は式(24)に対応する式であり，正規確率変量の推定誤差分散を意味する．ただし，式(24)において$V(\boldsymbol{X}_{n+1})$の代わりに$\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})$を用いる点が異なる．

4.5 単一確率場との対比

未観測点$\boldsymbol{X}_{m+1}$における推定量$\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})$は正規確率場に変換した確率変量$\ln W(\boldsymbol{X}_i)(i=1\sim m)$を用いると，次式のように表される．

$$\ln\widehat{W}(\boldsymbol{X}_{m+1})=\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i\ln W(\boldsymbol{X}_i)+k'\qquad(61)$$

文献7)によると，実際に観測値 $\underline{W}(\boldsymbol{X}_i)(i=1\sim m)$が与えられた場合，最適推定値$\widehat{\underline{W}}_K(\boldsymbol{X}_{m+1})$は式(62)で，推定誤差分散$\sigma_K^2(\boldsymbol{X}_{m+1})$は式(63)で求められる．

$$\begin{aligned}&\widehat{\underline{W}}_K(\boldsymbol{X}_{m+1})\\&=\exp\Bigg[\ln m_W(\boldsymbol{X}_{m+1})\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i\left(\ln\underline{W}(\boldsymbol{X}_i)-\ln m_W(\boldsymbol{X}_i)\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i\Bigg(\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_i) -C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))\Bigg)\Bigg] \tag{62}$$

$$\sigma_K^2(\boldsymbol{X}_{m+1}) = m_W^2(\boldsymbol{X}_{m+1})e^{\sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1})}\left(1-e^{-\sigma_{Ke}^2(\boldsymbol{X}_{m+1})}\right) \tag{63}$$

ただし，

$$\sigma_{Ke}^2(\boldsymbol{X}_{m+1}) = \sigma_e^2(\boldsymbol{X}_{m+1}) -\sum_{i=1}^{n}\lambda'_i C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1})) \tag{64}$$

式(62)～式(64)における重み係数$\lambda'_i(i=1\sim m)$は次式を解くことにより与えられる．

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda'_j C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j)) = C_e(\ln W(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_{m+1}))(i=1\sim m) \tag{65}$$

単一確率場における推定式のうち，式(62)は混合確率場の式(58)に，式(63)は式(59)に，重み係数の算定式(65)は式(55)に対応している．式(55)において，$V(\boldsymbol{X}_i)$と$V(\boldsymbol{X}_j)$, $V(\boldsymbol{X}_i)$と$\ln W(\boldsymbol{X}_j)$の共分散が0であると，式(55)は式(65)になることが理解できる．このとき$V(\boldsymbol{X}_i)$の観測値は存在しないので，式(58)は式(62)に，式(59)は式(63)と完全に一致する．従って混合確率場の理論式は一般に単一確率場のそれを内包していると言える．

5. 数値計算例および考察

図-2の観測点で与えられた観測値を基に，本論で提案した確率論的補間を行う．同図中，×は正規確率変量よりなる物理量1の$V(\boldsymbol{X})$における観測地点(16地点)，○は対数正規確率変量の物理量2の$W(\boldsymbol{X})$における地点(19地点)である．9地点では2つの物理量が観測されている．

観測値を作成するため，まず2つの物理量の確率論的特性値を設定した．物理量1の$V(\boldsymbol{X})$の平均値$m_V(\boldsymbol{X})$は1，分散$\sigma_V^2(\boldsymbol{X})$は4，共分散$C(V(\boldsymbol{X}_i),V(\boldsymbol{X}_j))$は$4\exp(-\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|/3)$，物理量2の$W(\boldsymbol{X})$の平均値$m_W(\boldsymbol{X})$は5，分散$\sigma_W^2(\boldsymbol{X})$は9，共分散$C(W(\boldsymbol{X}_i),W(\boldsymbol{X}_j))$は$9\exp(-\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|/4)$とした．また，$V(\boldsymbol{X})$と$W(\boldsymbol{X})$の共分散を想定するため，ここでは正規確率変量上において$V(\boldsymbol{X}_i)$と$\ln W(\boldsymbol{X}_j)$の共分散を与え，それらの相関係数ρ'_eを0.6に設定した．すなわち$C(V(\boldsymbol{X}_i),\ln W(\boldsymbol{X}_j))=\rho'_e\sigma_V(\boldsymbol{X}_i)\sigma(\ln W(\boldsymbol{X}_j))\exp\left(-\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|/\sqrt{20}\right)$とし，$V(\boldsymbol{X}_i)$と$W(\boldsymbol{X}_j)$の共

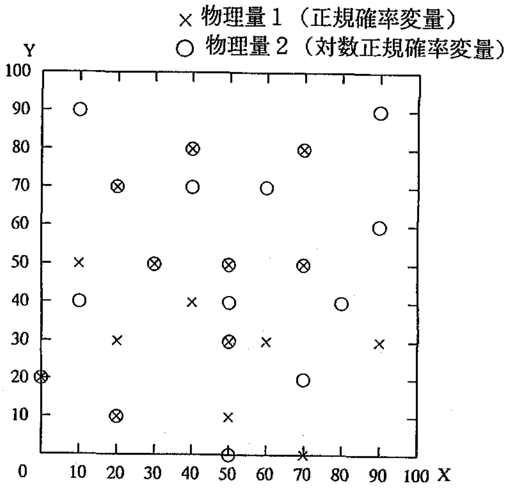

図-2 観測点配置

分散$C(V(\boldsymbol{X}_i),W(\boldsymbol{X}_j))$，分散$\sigma^2(\ln W(\boldsymbol{X}_j))$は対数正規確率変量と正規確率変量の関係式(**2.** 参照，式(1)～(3)の応用)から求めた．

上記確率特性の条件下で，文献5)に示されたコレスキー分解法によって観測値をシミュレートした．このため，$V(\boldsymbol{X}_i)$と$\ln W(\boldsymbol{X}_j)$よりなる正規確率変量VW ($(n+m)$次元)の共分散をコレスキー分解して三角行列を求め，それに独立な標準正規乱数ベクトルを掛け合わせて，正規確率場におけるVWの平均値ベクトルに加える．このようにすると，正規確率変量のサンプル値$\underline{V}(\boldsymbol{X}_i)$ $(i=1\sim n)$が得られる．また，対数正規確率変量の観測値$\underline{W}(\boldsymbol{X}_j)$はこのようにして得られた$\ln W(\boldsymbol{X}_j)$のサンプル値の指数をとれば求められる．

観測値に基づいて求められた混合確率場と単一確率場における正規確率変量の最適推定値を**図-3**，**図-4**に，またそれらの推定誤差分散を**図-5**，**図-6**に示す．同様に対数正規確率変量に関して，混合確率場の最適推定値を**図-7**に，単一確率場のそれを**図-8**に，混合確率場の推定誤差分散を**図-9**に，単一確率場のそれを**図-10**に示す．

図よりわかるように，**図-2**に示した2つの物理量の観測点配置，観測値の影響を受け，単一確率場の結果に比べ混合確率場の最適推定値の様相が異なっている．例えば**図-7**における対数正規確率変量の物理量2の最適推定値を見ると，物理量2の観測値に左右されていると同時に，正規確率変量の物理量1の観測点では物理量1の観測値の影響を受けていることがわかる．推定点が観測点に一致すると，最適推定値は推定の対象とした物理量の観測値に完全に一致している．このとき推定誤差分散は0になる．推定誤差分散は他の確率変量の影響を受けているが，最適推定値のように観測値に依存することはない．

2次元平面上のX軸，Y軸の任意線上で最適推定値，推定誤差分散を検討したのが**図-11** ～ **図-14**である．

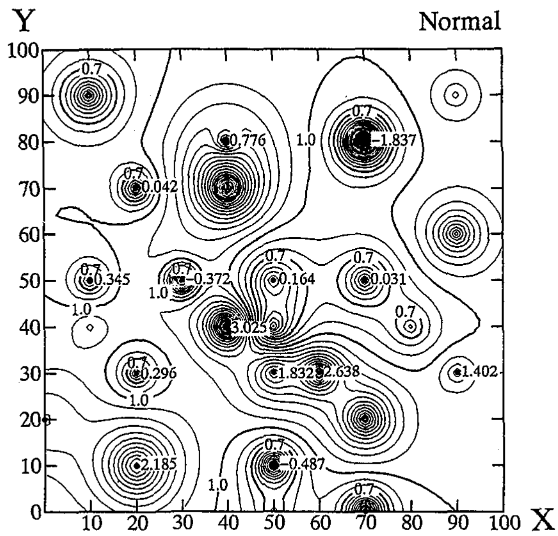

図-3 混合確率場における正規確率変量の最適推定値

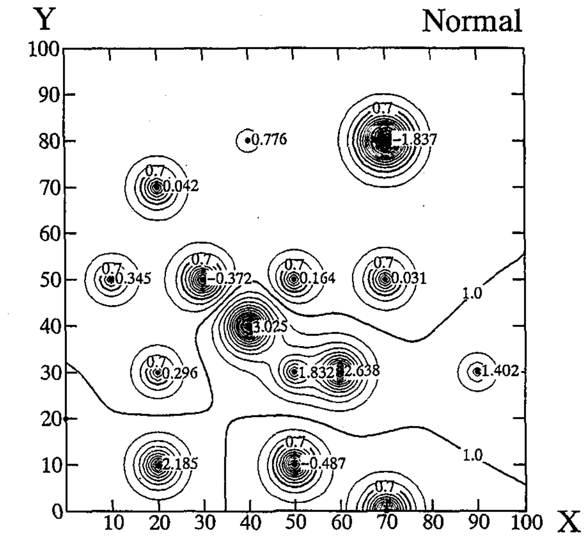

図-4 単一確率場における正規確率変量の最適推定値

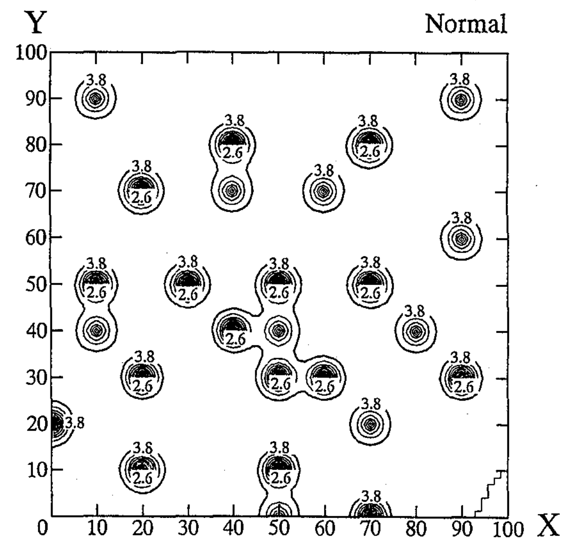

図-5 混合確率場における正規確率変量の推定誤差分散

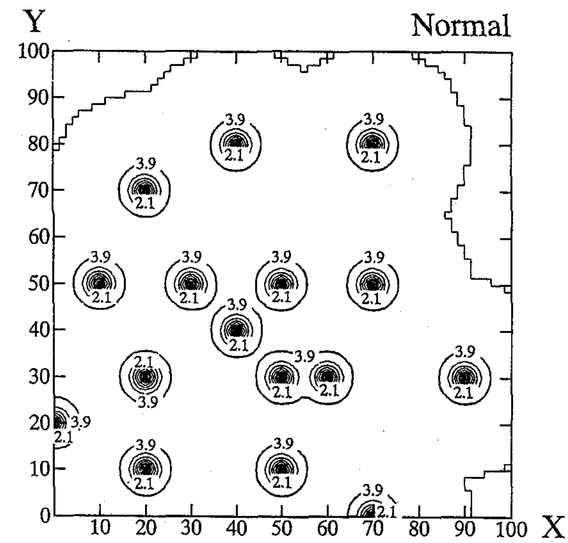

図-6 単一確率場における正規確率変量の推定誤差分散

図-11は $X = 60$ の線上，**図-12**は $Y = 30$ の線上における正規確率変量の推定結果である．また**図-13**は $X = 60$ の，**図-14**は$Y = 30$ の線上における対数正規確率変量の最適推定値，推定誤差分散である．

図-2に見られるように，$X = 60$ の線上では物理量1が$Y = 30$で，物理量2が$Y = 70$で観測されている．その結果，**図-11**，**図-13**を見ると，最適推定値は推定の対象とした物理量の観測点において観測値に一致し，推定誤差分散が0になっている．一方，推定の対象とはしていない物理量の観測点ではその物理量の観測値の影響を受けている．その結果，同地点の推定誤差分散は無条件分散よりも小さくなり，推定精度が高まっていることがわかる．$Y = 30$ の線上においても同様な特徴を示している．なお，観測点より離れた遠方場で推定を行うと，最適推定値が無条件平均値に，推定誤差分散が無条件分散に近づくことは混合確率場，単一確率場にともに見られる特徴である．

6. 結論

Geostatisticsは地質学や統計学のように長い歴史と伝統に根ざした分野ではない．しかしながら，最近ではMatheronらのグループならびにMatheronの理論を工学技術に発展させたJournelらのグループの功績により，大きく貢献してきた．このGeostatisticsはGeology, GeophysicsとStatisticsを結びつけた新しい数理的学問体系を築いてきた．その意味で境界領域で発展してきた分野ではあるが，今日では観測値に基づく経験的な手法を単に踏襲するのではなく，得られた観測値に対する確率統計的解析のための新らしい手法の提案とし

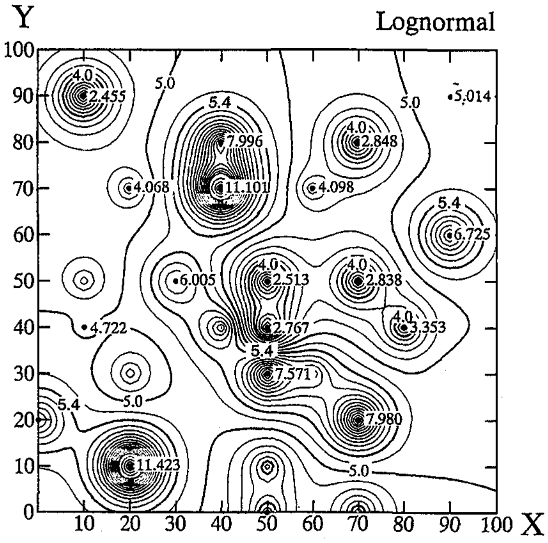

図-7 混合確率場における対数正規確率変量の最適推定値

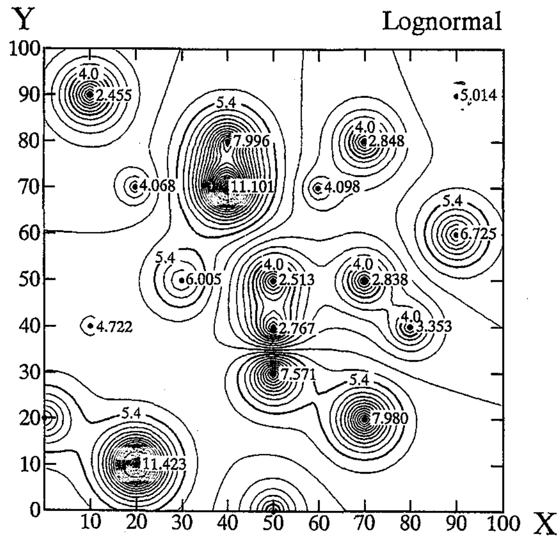

図-8 単一確率場における対数正規確率変量の最適推定値

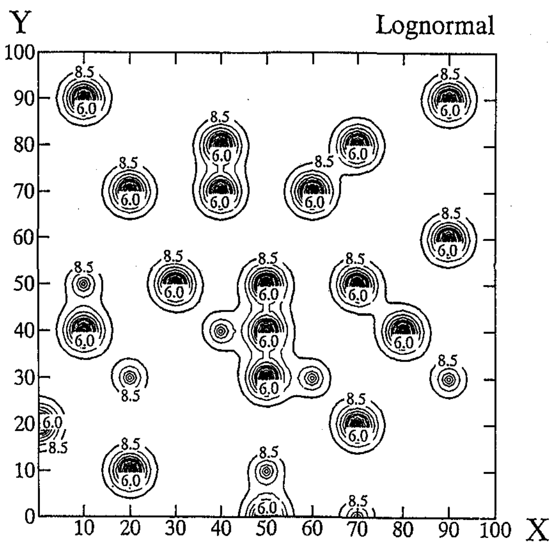

図-9 混合確率場における対数正規確率変量の推定誤差分散

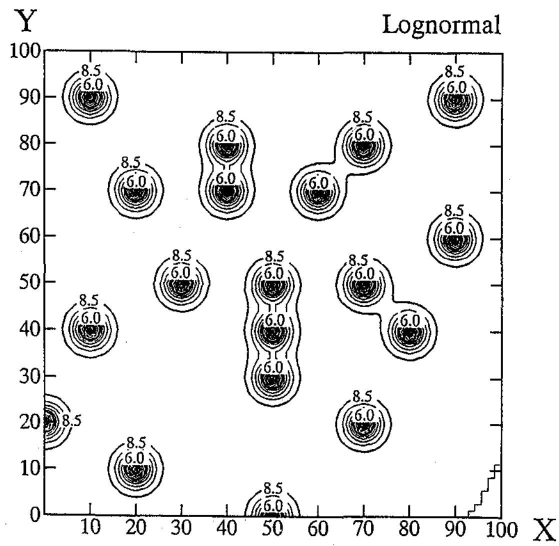

図-10 単一確率場における対数正規確率変量の推定誤差分散

て，この技術は様々な応用範囲で威力を発揮している．

非常に多くの技術者・研究者はGeostatisticsに注目し，色々な試みを行ってきた．しかしながら既往の研究では観測値の内外挿あるいはモンテカルロシミュレーションに基づくサンプル値の空間分布を知ることに重点があった．また，正規確率分布や対数正規確率分布よりなる単一物理量のデータが取得されたとき，特定地点での推定値や推定誤差を定量的に評価する研究が実施されてきた．

各種データを検討して見ると，同一地点で異なる確率分布に従う複数の物理量が地震工学上得られることがわかった．そこで本研究では，最も重要と考えられる正規確率変量と対数正規確率変量よりなる2つの物理量の混合確率場において，観測値が与えられた条件下で未観測点における物理量の推定式を理論的に誘導し，単一確率場の結果と比較検討した．

数値分析の結果，混合確率場において推定の対象とした物理量の最適推定値および推定誤差分散は他の確率変量の影響を強く受けることが明らかになった．さらに，単一確率場の場合と同じように，混合確率場においても最適推定値は観測値に依存し，推定誤差分散は観測値に左右されずに事前情報のみに従属することがわかった．

以上から，複数の物理量に支配された混合確率場では，支配要因のみを抽出して単一確率場として推定を

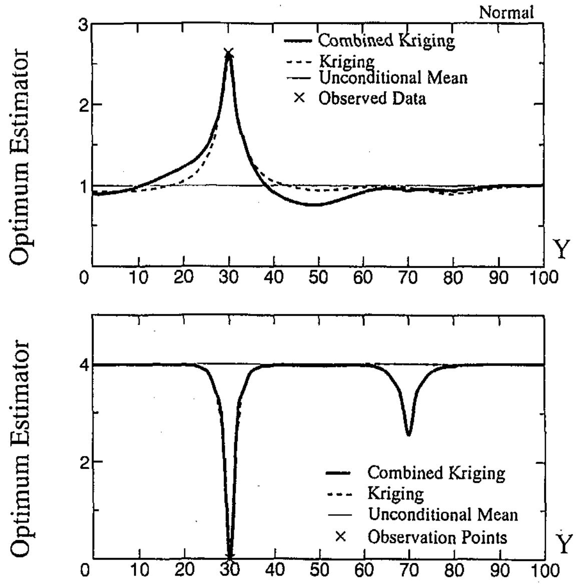

図-11 X=60の線上における正規確率変量の最適推定値と推定誤差分散

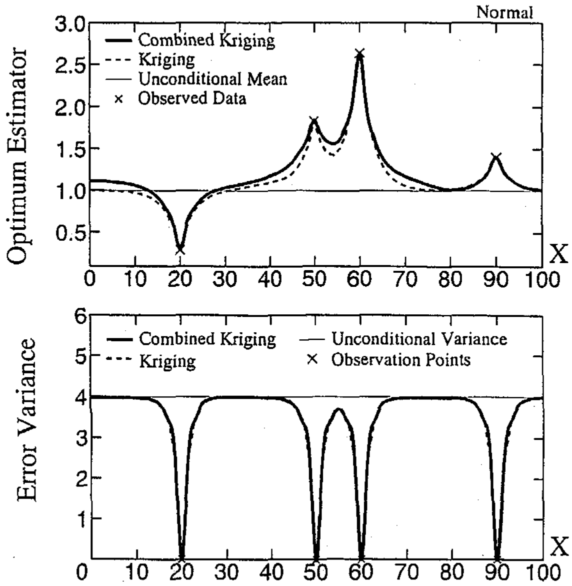

図-12 Y=30の線上における正規確率変量の最適推定値と推定誤差分散

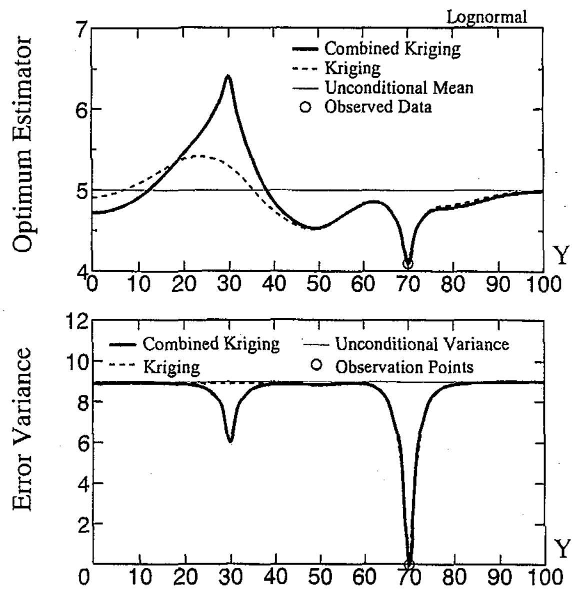

図-13 X=60の線上における対数正規確率変量の最適推定値と推定誤差分散

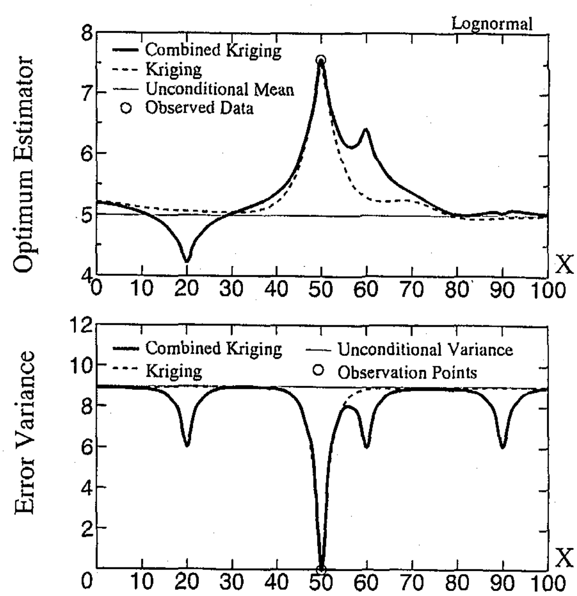

図-14 Y=30の線上における対数正規確率変量の最適推定値と推定誤差分散

行うと，誤った解釈を与えることが理解できる．このような場合には本論文で提案した展開式(Cokriging式)を用いる必要があろう．

参考文献

1) Matheron, G.: Principles of geostatistics, *Economic Geology*, Vol. 58, pp. 1246~1266, 1963.
2) Journel, A. G. and C. J. Huijbregts: *Mining Geostatistics*, Academic Press, New York, 1978.
3) Isaaks, E. R. and R. M. Srivastava: *Applied Geostatistics*, Oxford University Press, New York, 1989.
4) Deutsch, C. and A. G. Journel: *GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide*, Oxford University Press, New York, 1992.
5) Cressie, N. A. C.: *Statistics for Spatial Data*, John Wiley & Sons, Revised Edition, New York, 1993.
6) 星谷　勝：条件付確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集，No. 459/I-22, pp. 113~118, 1993年1月．
7) 野田　茂，星谷　勝：条件付対数正規確率場の同定，第9回日本地震工学シンポジウム論文集，Vol. 1, pp. 247~252, 1994年12月．
8) 星谷　勝，野田　茂，稲田　裕：観測情報に基づく条件付非正規確率場の推定理論の誘導，土木学会論文集，No. 570/I-40, pp. 83~95, 1997年7月．
9) Shinozuka, M. and R. Zhang: Equivalence between kriging and CPDF methods for conditional simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 122, No. 6, pp. 530~538, June 1996.

(1999年9月17日受付)