

薄肉断面を有する直線桁橋の固有振動解析にともなうモード連成に関する一考察

MODAL COUPLING ON NATURAL VIBRATION ANALYSIS OF STRAIGHT GIRDER
BRIDGES WITH THIN-WALLED CROSS SECTION

松井義孝* 林川俊郎** 北島 勉*** 佐藤浩一****

Yoshitaka MATSUI, Toshiro HAYASHIKAWA, Tsutomu KITAJIMA and Koichi SATO

- * 工学士 北海道大学大学院博士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
- ** 工博 北海道大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
- *** 工学士 北海道大学大学院修士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
- **** 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

A study of the coupled flexural-torsional vibration of asymmetric thin-walled beams is presented. The effects of warping and Saint-Venant torsional rigidities are taken into account in the formulations based on the finite element method. A thin-walled beam element with seven degrees of freedom at each node is adopted, and three different mass matrices of order fourteen are shown in this study. Three-dimensional vibration analysis of straight girder bridges having an asymmetric cross section is characterized by the coupling of flexural and torsional modes. The generalized stiffness and mass matrices which take into account a distance of eccentricity of the centroidal axis with respect to the shear center axis are derived by applying the transformation of coordinate system. A numerical example is shown to illustrate the applicability of the lumped, consistent and continuous mass methods, and the calculated results are given in tabular form. The convergence and accuracy of natural frequencies by using these mass matrix methods are investigated, and the coupling effect due to non-coinciding centers of geometry and shear is discussed.

Key Words : triple coupling vibration, thin-walled beams, warping, shear center

1. まえがき

近年、建設費のコスト縮減への取り組みとして、PC床版を有する少数主桁橋の架設が進められている^{1,3)}。2主桁橋で代表されるこれらの橋梁形式は、PC床版を用いることにより主桁間隔を広くし、主桁の少数化と断面の大型化により部材数の低減を可能としている。さらに、製作工数を減少させ経済性を高めるため、鋼主桁断面の腹板補剛材の省略、対傾構や横構などの二次部材を省略する傾向にある。

このような橋梁形式の適用支間が長大化し、PC床版と鋼2主桁との複合化が進むにつれて、その動的応答性状も複雑になることが予想される。構造物の動的応答はその構造物に作用する走行車両、風、地震などの動的外力の性質と、構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく左右される。したがって、構造物の動的応答を正しく評価するためには、固有振動数ならびに固有振動モードを低次から高次振動モードまで精度よく計算することが重要な課題であるといえる。

一般的に、二軸対称断面を有する部材要素より構成される構造物の固有振動解析においては、部材断面の図心とせん断中心が同じ位置にあることから、面内および面外の主軸回りの曲げ振動とねじり振動との連成振動は生じない。しかし、実際の直線桁橋では横断勾配を有し、薄肉断面の鋼主桁が用いられることが多く、必ずしも二軸対称断面とは限らない。このような二軸非対称断面の直線桁橋では、図心とせん断中心の位置が異なることにともない、直交二方向の主軸回りの曲げ振動とねじり振動とが連成する、いわゆる三重連成振動問題となる⁴⁾。

薄肉断面部材より成る構造物の固有振動解析では、そりねじり変形の影響を無視することはできない。薄肉断面部材の基礎的なそりねじり理論はVlasovの著書⁵⁾に詳しく述べられている。そりねじり変形を考慮した直線桁の固有振動解析に関する研究は、従来より数多くの論文が発表されている。その中で、Krajcinovic⁶⁾は図心とせん断中心が異なる薄肉直線桁の剛性マトリックスをGalerkin法を用いて誘導し、さらに、初期応力マトリックスと質量マトリックスを求めている。これらのマトリッ

クスの各要素は、同次微分方程式の解を用いているため双曲線関数を含む形で与えられている。これに対して、直線部材要素の変位関数を多項式で仮定する有限要素法に基づいて、静的な剛性マトリックスと集中質量マトリックスを導いた論文として、結城・前田⁷⁾の研究がある。同じく薄肉断面を有する直線桁を対象として、Wekezer⁸⁾は静的な剛性マトリックスと整合質量マトリックスを与えている。

さらに、直線桁の三重連成振動問題に関する基礎微分方程式を誘導し、その動的解析を示した論文として、Friberg⁹⁾の研究がある。ただし、彼の論文では St. Venant のねじり剛性のみ考慮し、そりねじり剛性を無視している。二軸非対称断面を有する建築構造物を対象として、Danay ら¹⁰⁾は Hamilton 原理を適用して三重連成振動の支配方程式と境界条件を明確に求めている。さらに、Leung^{11,12)}は一定軸圧縮力を受ける直線桁の振動解析における変位関数の選択とその動特性について検討している。

構造物の固有振動解析は、構造物の質量を多質点系に離散化する離散座標系による解法と、自由振動の基礎微分方程式の一般解から動的な剛性マトリックスを誘導する分布座標系による解法に大別することができる。筆者ら¹³⁻¹⁶⁾はすでに連続桁橋、アーチ橋、ラーメン橋などの固有振動数を異なる質量マトリックス法により数値計算し、その固有振動特性と精度について検討してきた。しかし、薄肉断面を有する直線桁の三重連成振動における要素分割数とその固有振動数の精度について数値解析的に検討した論文は意外と少ないように思われる。また、三重連成振動問題の各固有振動モードにおける連成の度合いを表すパラメータについて言及した論文は数少ない。さらに、今後、架設事例が増加するであろう少数主桁橋の固有振動解析の妥当性と実橋振動試験によるデータの蓄積が重要になるものと考えられる¹⁷⁾。

そこで、本研究は二軸非対称薄肉断面を有する直線桁の三重連成振動解析を行い、モード連成の割合について検討する。三重連成振動解析では図心とせん断中心との偏心量を考慮した断面内の座標変換を行うことにより、数値解析的に処理する方法を試みる。また、後述する集中質量法、整合質量法および連続質量法による実在橋の断面諸元を用いた数値計算を実施し、その固有振動特性と得られた固有振動数の精度について比較検討する。さらに、複雑な三重連成振動モードの中で、支配的なモードを判別する一つの指標として、モード連成比の算定式を新たに提示し、その三重連成振動モードの連成度について考察するものである。

2. 薄肉直線桁の運動方程式

図-1に示すような薄肉断面部材要素について考える。部材要素の長さ方向（部材軸方向）に x 軸をとり、直交右手座標系を用いる。はり部材の変形は、軸方向変位 $u(x)$ 、

2 主軸方向変位 $v(x)$ および $w(x)$ 、さらに断面の回転角 $\theta(x)$ の変位関数によって表すことができる。すなわち、断面内の任意の点 x における変位 U, V, W は、断面形状不変の仮定から、次式で与えられる。

$$U(x, y, z) = u(x) - yv'(x) - zw'(x) + \omega_n(y, z)\theta'(x) \quad (1a)$$

$$V(x, y, z) = v(x) - (z - z_s)\theta(x) \quad (1b)$$

$$W(x, y, z) = w(x) + (y - y_s)\theta(x) \quad (1c)$$

ここに、 $(\cdot)$ は x に関する微分、 (y_s, z_s) はせん断中心の座標、 $\omega_n(y, z)$ は基準化されたそり関数である。上式(1)より、ひずみを求めると次のようになる。

$$\varepsilon_x = u' - yv'' - zw'' + \omega_n\theta'' \quad (2a)$$

$$\gamma_{xy} = \{\partial\omega_n/\partial y - (z - z_s)\}\theta' \quad (2b)$$

$$\gamma_{zx} = \{\partial\omega_n/\partial z + (y - y_s)\}\theta' \quad (2c)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad (2d)$$

式(2a)の右辺第1項は軸方向の垂直ひずみ、第2項と第3項は2軸(y 軸および z 軸)回りの曲げ変形によるひずみ、第4項はねじり変形によるひずみを表している。式(2b)と(2c)はねじり変形にともなうせん断ひずみである。

また、はりのヤング係数を E 、せん断弾性係数を G とすると、応力-ひずみ関係は次式で表される。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (3a-c)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad (3d-f)$$

したがって、式(2)、(3)より、ひずみエネルギー V は次のように与えられる。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dA dx \quad (4)$$

ここに、 l は部材長、 A は断面積である。一方、運動エネルギー T は次式で求められる。

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dA dx \quad (5)$$

ここに、 $(\cdot)$ は時間 t の微分を表わす。 ρ は部材の密度である。ゆえに、次式で表される Hamilton 原理を適用することにより、はり部材の支配方程式とそれとともなう境界条件が得られる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (V - T) dt = 0 \quad (6)$$

ここに、 δ は変分記号、 t_1 と t_2 は任意の時間である。

図-1に示す部材断面上のせん断中心 S の変位 (v, w) とその軸回りの回転角 θ を変位関数にとれば、はり部材の曲げ変形とねじり変形を完全に分離することができる¹⁸⁾。

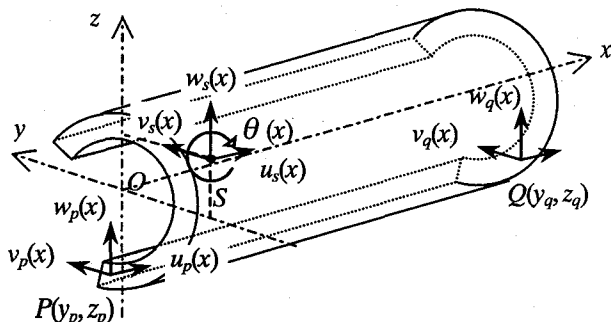


図-1 薄肉断面部材要素

つまり、曲げとねじり変形にともなう連成項は消去され、次式のように互いに独立した4つの運動方程式が求められる。ただし、回転慣性の影響は小さいものとして無視するものとする。

$$-EAu'' + m\ddot{u} = 0 \quad (7a)$$

$$EI_z v'''' + m\ddot{v} - mz_s \ddot{\theta} = 0 \quad (7b)$$

$$EI_y w'''' + m\ddot{w} + my_s \ddot{\theta} = 0 \quad (7c)$$

$$EI_w \theta'''' - GJ\theta'' + m(r^2 + y_s \ddot{w} - z_s \ddot{v}) = 0 \quad (7d)$$

ここに、 $m = \rho A$ は単位長さあたりののりの質量、 I_y と I_z は主軸 y と z に関する断面二次モーメント、 I_w はそり定数、 J は純ねじり定数、 $r^2 = I_p/A$ 、 I_p は極慣性モーメントである。

式(7)より、軸方向変位 u に関する縦振動は v 、 w 、 θ の変位関数と完全に独立しているが、一般に、変位 v と w に関する曲げ振動は、ねじり変形と連成する。すなわち、図-1に示すような二軸非対称断面を有するはり部材の場合、せん断中心軸 S と図心軸 O とは一致しないため、 $y_s \neq 0$ 、 $z_s \neq 0$ となり、2主軸回りの曲げ振動とねじり振動とは連成することになる。二軸対称断面の場合には、せん断中心 S と図心 O とは一致し、 $y_s = 0$ 、 $z_s = 0$ となり、式(7)で表される4つの運動方程式は完全に独立した振動系として取り扱うことが可能となる。

3. 二軸対称断面部材の固有振動解析

薄肉直線桁の3次元固有振動解析は、部材要素の質量のモデル化により、分布座標系と離散座標系による解に大別することができる^{19,20)}。前者には薄肉直線桁の質量および剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法 (continuous mass method) がある。この解法は式(7)で示した運動方程式の一般解を必要とするが、正確な固有振動数 (厳密解) を求めることができる。さらに、後者には部材要素の等分布質量を両端の節点に等しく置換する集中質量法 (lumped mass method) と、変位関数として3次多項式を用いて部材要素の質量を両端の節点に配分する整合質量法 (consistent mass method) が代表的な方法である。一般的に、離散座標系による解は標準的な固有値問題に、分布座標系による解は超越方程式を解く問題に帰着される。

3.1 分布座標系による解

ここでは、一定断面を有する薄肉直線桁について考える。また、断面は二軸対称断面とし、図心とせん断中心

は一致するものとする。1部材要素の両端における節点番号を i, j とし、1節点は7自由度とする。したがって、部材要素の動的な剛性方程式は図-2に示す断面力と変位の記号を用いて次のように与えられる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{U} \quad (8)$$

ここに、

$$\mathbf{F} = \{X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, M_{wi}, X_j, Y_j, Z_j, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T \quad (9a)$$

$$\mathbf{U} = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \theta_{wi}, u_j, v_j, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}, \theta_{wj}\}^T \quad (9b)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ は節点力ベクトル、 $\mathbf{U}$ は節点変位ベクトルである。また $\mathbf{K}(\omega)$ は動的剛性マトリックス (14×14 の正方マトリックス) である。動的剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ の成分は、式(7)に示した4つの基礎微分方程式の一般解を用いることにより得られる。具体的な算定方法については文献^{16,20)}を参照することとし、本研究ではその結果のみを以下にまとめて示す。

(1) 縦振動 (x 軸方向) :

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} = EA\alpha \begin{bmatrix} \cot \alpha l & -\operatorname{cosec} \alpha l \\ -\operatorname{cosec} \alpha l & \cot \alpha l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 $\alpha = \sqrt{m\omega^2/EA}$ 、 ω は固有円振動数、 l は部材長である。

(2) 水平曲げ振動 (x - y 平面) :

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ M_{zi} \\ Y_j \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z \beta_z}{1 - cC} \mathbf{K}_z \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここに、

$$\beta_z = \sqrt[4]{m\omega^2/EI_z} \quad (12a)$$

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} \beta_z^2(cS+sC) & \beta_z sS & -\beta_z^2(s+S) & \beta_z(C-c) \\ sC-cS & \beta_z(c-C) & S-s & \\ \text{Sym.} & & \beta_z^2(cS+sC) & -\beta_z sS \\ & & & sC-cS \end{bmatrix} \quad (12b)$$

ただし、 $c = \cos \beta_z l$ 、 $s = \sin \beta_z l$ 、 $C = \cosh \beta_z l$ 、 $S = \sinh \beta_z l$ である。

(3) 鉛直曲げ振動 (x - z 平面) :

$$\begin{Bmatrix} Z_i \\ M_{yi} \\ Z_j \\ M_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_y \beta_y}{1 - cC} \mathbf{K}_y \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここに、

$$\beta_y = \sqrt[4]{m\omega^2/EI_y} \quad (14a)$$

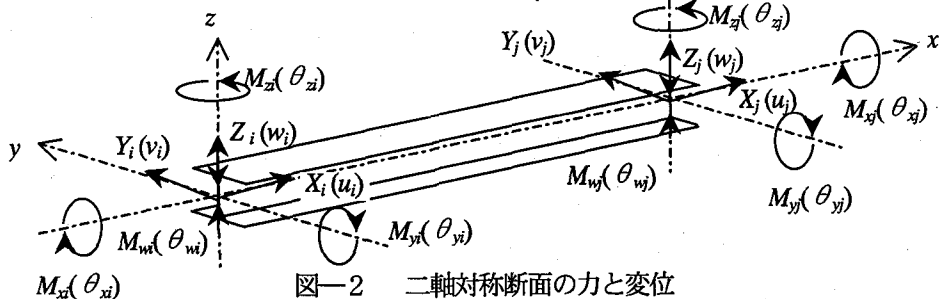


図-2 二軸対称断面の力と変位

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} \beta_y^2(cS+sC) & -\beta_y sS & -\beta_y^2(s+S) & -\beta_y(C-c) \\ sC-cS & -\beta_y(c-C) & S-s & \\ & \beta_y^2(cS+sC) & \beta_y sS & \\ \text{Sym.} & & sC-cS & \end{bmatrix} \quad (14b)$$

ただし、 $c = \cos \beta_y l$, $s = \sin \beta_y l$, $C = \cosh \beta_y l$, $S = \sinh \beta_y l$ である。

(4) ねじり振動 (そりねじりを考慮) :

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{wi} \\ M_{xj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_w \mu \nu}{2\mu \nu (1-cC) + (\nu^2 - \mu^2) sS} \mathbf{K}_\theta \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{wi} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{wj} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここに、

$$\mu = \sqrt{\frac{GJ}{2EI_w}}(\lambda-1), \nu = \sqrt{\frac{GJ}{2EI_w}}(\lambda+1), \lambda = \sqrt{1 + \frac{4mr^2 EI_w}{(GJ)^2} \omega^2} \quad (16a-c)$$

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Sym.} & & & k_{44} \end{bmatrix} \quad (16d)$$

また、 $k_{11} = (\mu^2 + \nu^2)(\nu cS + \mu sC)$

$$k_{12} = (\mu^2 - \nu^2)(1 - cC) + 2\mu \nu sS$$

$$k_{13} = -(\mu^2 + \nu^2)(\mu s + \nu S)$$

$$k_{14} = (\mu^2 + \nu^2)(C - c)$$

$$k_{22} = (\mu^2 + \nu^2)(sC/\mu - cS/\nu)$$

$$k_{24} = (\mu^2 + \nu^2)(S/\nu - s/\mu)$$

$$k_{23} = -k_{14}, k_{33} = k_{11}, k_{34} = -k_{12}, k_{44} = k_{22} \quad (17a-j)$$

ただし、 $c = \cos \mu l$, $s = \sin \mu l$, $C = \cosh \nu l$, $S = \sinh \nu l$ である。

これらの、動的剛性マトリックスは、通常の静的剛性マトリックスと同様にして、振動系が線形であれば重ね合わせることができる。構造物の境界条件による拘束節点変位の処理を施すと、固有円振動数を求めるための振動数方程式は次のようになる。

$$\det[\mathbf{K}_c(\omega)] = 0 \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{K}_c(\omega)$ は縮約された動的剛性マトリックスである。上式(18)は固有円振動数 ω を含む三角関数および双曲線関数から構成される超越方程式となる。このような超越方程式を解く方法としては、二分法、セカント法、Newton-Raphson 法、Regula-Falsi 法などがある²⁰⁾。本研究では、安定して解を求めることができる Regula-Falsi 法を採用することとする。

3. 2 離散座標系による解

離散座標系における薄肉直線桁の復元力と慣性力はそれぞれ剛性マトリックス $\mathbf{K}$ と質量マトリックス $\mathbf{M}$ によって表される。軸方向変位 $u(x)$ には 1 次式、曲げ変位 $v(x)$ 、 $w(x)$ とねじり角 $\theta(x)$ には 3 次式の形状関数を用い、仮想仕事の原理を適用することにより、次のように剛性マト

リックスと質量マトリックスが得られる²¹⁾。

(1) 縦振動 (x 軸方向) :

$$\mathbf{K}_u = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{uc} = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{ul} = \frac{ml}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19a-c)$$

ここに、 $\mathbf{K}_u$ は軸方向変形に関する要素剛性マトリックス、 $\mathbf{M}_{uc}$ と $\mathbf{M}_{ul}$ はそれぞれ縦振動に関する部材要素の整合質量マトリックスと集中質量マトリックスである。

(2) 水平曲げ振動 (x - y 平面) :

$$\mathbf{K}_v = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$\mathbf{M}_{vc} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{Sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (20b)$$

$$\mathbf{M}_{vl} = \frac{ml}{24} \text{Diag} \begin{bmatrix} 12 & l^2 & 12 & l^2 \end{bmatrix} \quad (20c)$$

ここに、 $\mathbf{K}_v$ は z 軸回りの曲げ変形に関する要素剛性マトリックス、 $\mathbf{M}_{vc}$ と $\mathbf{M}_{vl}$ はそれぞれ z 軸回りの曲げ振動に関する部材要素の整合質量マトリックスと集中質量マトリックスである。ただし、 $\text{Diag}[\]$ は対角マトリックスを意味する。

(3) 鉛直曲げ振動 (x - z 平面) :

$$\mathbf{K}_w = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & 6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (21a)$$

$$\mathbf{M}_{wc} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ \text{Sym.} & & 156 & 22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (21b)$$

$$\mathbf{M}_{wl} = \frac{ml}{24} \text{Diag} \begin{bmatrix} 12 & l^2 & 12 & l^2 \end{bmatrix} \quad (21c)$$

ここに、 $\mathbf{K}_w$ は y 軸回りの曲げ変形に関する要素剛性マトリックス、 $\mathbf{M}_{wc}$ と $\mathbf{M}_{wl}$ はそれぞれ y 軸回りの曲げ振動に関する部材要素の整合質量マトリックスと集中質量マトリックスである。

(4) ねじり振動 (そりねじり変形を考慮) :

$$\mathbf{K}_\theta = \frac{EI_w}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{GJ}{3Ql} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ \text{Sym.} & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\theta c} = \frac{mlr^2}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{Sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\theta} = \frac{mlr^2}{24} \text{Diag} \begin{bmatrix} 12 & l^2 & 12 & l^2 \end{bmatrix} \quad (22a-c)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{\theta}$ は部材のそりねじり変形を考慮した部材要素の剛性マトリックス、 $\mathbf{M}_{\theta c}$ と $\mathbf{M}_{\theta l}$ はねじり振動に関する部材要素の整合質量マトリックスと集中質量マトリックスである。

したがって、各部材要素の静的剛性マトリックス $\mathbf{K}_u$ 、 $\mathbf{K}_v$ 、 $\mathbf{K}_w$ 、 $\mathbf{K}_{\theta}$ 、整合質量マトリックス $\mathbf{M}_{uc}$ 、 $\mathbf{M}_{vc}$ 、 $\mathbf{M}_{wc}$ 、 $\mathbf{M}_{\theta c}$ および集中質量マトリックス $\mathbf{M}_{ul}$ 、 $\mathbf{M}_{vl}$ 、 $\mathbf{M}_{wl}$ 、 $\mathbf{M}_{\theta l}$ を用いて重ね合わせるにより、最終的に離散座標系における構造物の振動数方程式は次のようになる。

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ はそれぞれ境界条件より拘束節点処理された剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 ω は構造物の固有円振動数である。上式(23)の固有値問題は、数学的に非常に重要な問題であり、種々の解析方法がある^{20,21)}。本研究では固有値が近接する場合にも、比較的容易に解を求めることができる Householder 法を用いる。

4. 二軸非対称断面部材の固有振動解析

前章までは、一様な等断面でかつ二軸対称断面を有する直線部材を対象として、固有振動解析の方法について述べた。ここでは、二軸非対称断面を有し、かつ変断面直線桁橋への適用を可能とする固有振動解析について考える。

当然のことながら、非対称断面部材では図心とせん断中心が一致せず、曲げ振動とねじり振動とが連成する。つまり、二軸非対称断面の場合、 y 軸と z 軸回りの曲げ振動と、せん断中心回りのねじり振動とが連成し、いわゆる三重連成振動問題となる。そこで、本研究では図心軸とせん断中心軸とが一致しない場合、これらの偏心距離を考慮した断面内の座標変換により数値計算で処理することを検討する。

4. 1 断面上の任意点における変位関数

3次元固有振動解析を行うために変断面直線桁を、一様断面の部材要素の集合体として理想化することを考える。つまり、変断面桁を要素細分割し、個々の部材要素は一様断面と見なし、重ね合わせの原理を適用して固有振動解析を行う。この場合、各部材要素の断面特性は不連続に変化し、相隣り合う要素境界面で図心やせん断中心が必ずしも一致しないことに注意しなければならない。また、このような場合には各部材要素の剛性マトリックスや質量マトリックスを機械的に重ね合わせることができない。

この問題を解決する一つの方法として、図-1に示す薄肉断面部材要素の両端断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ 、 $Q(y_q, z_q)$ を新しい節点とする剛性マトリックスと質量マトリックスを作成する。

図-1に示すように、断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ における変位は、断面不変の仮定から、せん断中心 $S(y_s, z_s)$ の変位を用いて次のように表される。

$$u_p(x) = u_s(x) - y_p v'_s(x) - z_p w'_s(x) + \left\{ \omega_n(y_p, z_p) - y_p \cdot z_s + y_s \cdot z_p \right\} \theta'(x) \quad (24a)$$

$$v_p(x) = v_s(x) - (z_p - z_s) \theta(x) \quad (24b)$$

$$w_p(x) = w_s(x) + (y_p - y_s) \theta(x) \quad (24c)$$

ここで、 $u_p(x)$ 、 $v_p(x)$ 、 $w_p(x)$ は点 P での x 、 y 、 z 軸方向変位、 $u_s(x)$ 、 $v_s(x)$ 、 $w_s(x)$ はせん断中心 S での x 、 y 、 z 軸方向変位、 $\theta(x)$ は x 軸回りの回転角である。さらに、式(24b)の $v_s(x)$ と式(24c)の $w_s(x)$ を式(24a)に代入すると、次式を得る。

$$u_p(x) = u_s(x) - y_p v'_p(x) - z_p w'_p(x) + \omega_n(y_p, z_p) \theta'(x) \quad (25)$$

したがって、せん断中心 S における変位は断面上の任意の点 P における変位を用いて、次のように表すことができる。

$$u_s(x) = u_p(x) + y_p v'_p(x) + z_p w'_p(x) - \omega_n(y_p, z_p) \theta'(x) \quad (26a)$$

$$v_s(x) = v_p(x) + (z_p - z_s) \theta(x) \quad (26b)$$

$$w_s(x) = w_p(x) - (y_p - y_s) \theta(x) \quad (26c)$$

さらに、部材要素右端上の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とすると、点 Q に対しても式(26)と同様の関係式を導くことが可能である。したがって、部材要素両端面上のせん断中心における変位 $\{\mathbf{d}_{SL}, \mathbf{d}_{SR}\}^T$ は、断面上の任意点 P および Q における変位 $\{\mathbf{d}_p, \mathbf{d}_q\}^T$ で以下のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{SL} \\ \mathbf{d}_{SR} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_q \end{Bmatrix} \quad (27)$$

ここに、

$$\mathbf{d}_{SL} = \{u_{SL}, v_{SL}, w_{SL}, \theta_{xSL}, \theta_{ySL}, \theta_{zSL}, \theta_{wSL}\}^T \quad (28a)$$

$$\mathbf{d}_{SR} = \{u_{SR}, v_{SR}, w_{SR}, \theta_{xSR}, \theta_{ySR}, \theta_{zSR}, \theta_{wSR}\}^T \quad (28b)$$

$$\mathbf{d}_p = \{u_p, v_p, w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}, \theta_{wp}\}^T \quad (28c)$$

$$\mathbf{d}_q = \{u_q, v_q, w_q, \theta_{xq}, \theta_{yq}, \theta_{zq}, \theta_{wq}\}^T \quad (28d)$$

また、

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_p & y_p & -\omega_n(y_p, z_p) \\ 0 & 1 & 0 & z_p - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(y_p - y_s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_p - y_s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_p - z_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29a)$$

$$T_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_q & y_q & -\omega_n(y_q, z_q) \\ 1 & 0 & z_q - z_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(y_q - y_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -(y_q - y_s) & 0 & 0 \\ 0 & & & 1 & z_q - z_s & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (29b)$$

ここで、 θ_x 、 θ_y 、 θ_z はそれぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸回りの回転角であり、 θ_ω はねじり率を表している。

4. 2 一般化された剛性および質量マトリックス

式(27)を便宜上、簡単に $d_s = T d_{pq}$ と表せば、座標変換マトリックス T を用いてせん断中心位置における要素剛性マトリックス K_s を、部材要素両端面上の任意点における要素剛性マトリックス K_{pq} へ次式により変換することができる。

$$K_{pq} = T^T K_s T \quad (30)$$

また、部材要素に関する要素質量マトリックス M_s についても同様の方法により、断面上の任意点における要素質量マトリックス M_{pq} を導くことができる。

$$M_{pq} = T^T M_s T \quad (31)$$

したがって、部材要素の両端面上の任意点における剛性マトリックスと質量マトリックスがそれぞれ式(30)、式(31)により求めることができる。隣り合う部材要素の境界面で共通の節点を設けることにより、各部材要素の剛性マトリックスと質量マトリックスの重ね合わせが可能となり、構造物全体の動的な剛性方程式が求められる。最終的に、分布座標系における振動数方程式は式(18)で、離散座標系における振動数方程式は式(23)で表示される固有値問題となる。

5. 数値計算結果

5. 1 数値計算例

実在するプレートガーダー橋を参考にして、数値計算に用いる薄肉直線桁の断面形状を図-3と図-4に示す。図-3は閉断面であり、図-4は開断面である。両者とも6%の横断片勾配を有し、二軸非対称断面であることから、図心 O とせん断中心 S の位置が異なる。数値計算

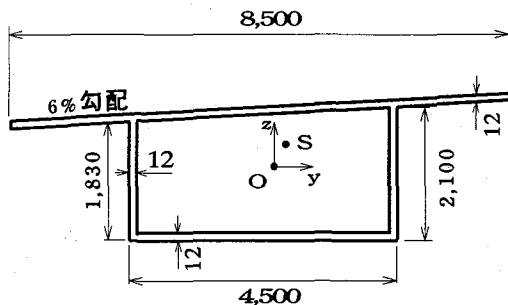


図-3 閉断面直線桁

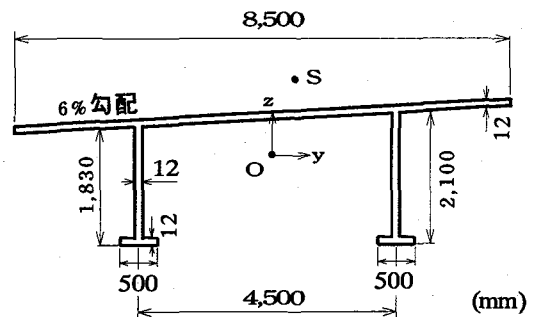


図-4 開断面直線桁

に必要な断面諸元を表-1にまとめて示す。表中の $w(tf/m)$ は直線桁の単位長さあたりの重量、 S は図心 O を原点とした座標である。開断面直線桁のせん断中心と図心との偏心距離は閉断面のものに比較してかなり大きいことがわかる。

薄肉直線桁の支間長 $l=31.465m$ とする。境界条件は鉛直曲げ変形および水平曲げ変形には単純支持、ねじり変形と軸方向変形には固定支持、そりねじり変形に対しては自由とする。数値計算には、集中質量法、整合質量法および連続質量法の3通りの方法により固有振動解析を実施し、二軸非対称断面を有する薄肉直線桁の三重連成振動特性とそのモード連成の割合について以下に考察する。

5. 2 固有振動性状

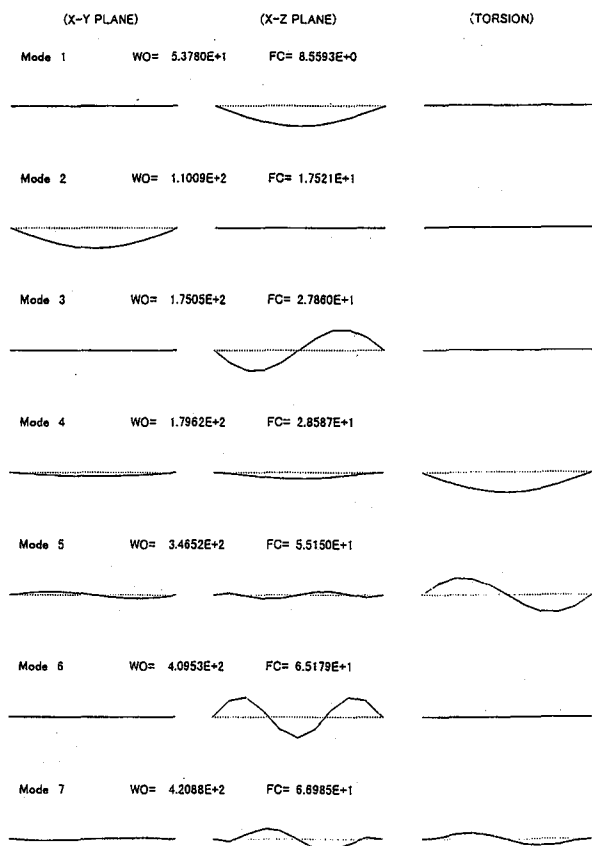
整合質量法により計算された1次から10次までの固有振動モードを開断面について図-5、閉断面について図-6に示す。なお、隣り合う部材要素の節点は図心の位置とする。要素分割数はいずれも10分割である。図中の左側は $x-y$ 平面上の水平曲げ振動振幅、中央は $x-z$ 平面上の鉛直曲げ振動振幅、右側はねじり振動によるねじり角の振幅を表す。

図-5より、1次、3次、6次は鉛直曲げ固有振動モードであり、2次は水平曲げ固有振動モードである。いずれも、独立した形で固有振動モードが現れている。一方、4次と5次はねじり固有振動モードであり、いずれも他の二軸曲げ振動モードと連成していることがわかる。同様の固有振動特性は図-6に示す閉断面直線桁の固有振動モードに見られ、特に、高次モードになるにつれて複雑な連成振動モードが形成される傾向にある。

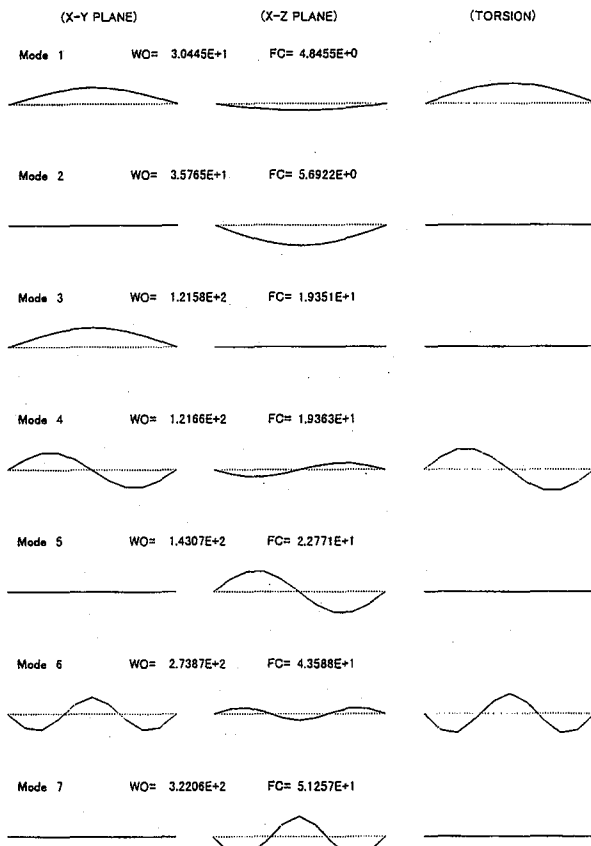
集中質量法、整合質量法および連続質量法により計算

表-1 断面諸元

断面積	閉断面	開断面
$A(m^2)$	2.033×10^{-1}	1.613×10^{-1}
$I_y(m^4)$	1.575×10^{-1}	7.914×10^{-2}
$I_z(m^4)$	9.448×10^{-1}	9.146×10^{-1}
$J(m^4)$	3.513×10^{-1}	7.744×10^{-6}
$I_w(m^6)$	6.491×10^{-2}	3.986×10^{-1}
$w(tf/m)$	1.598×10^0	1.268×10^0
$S(y_s, z_s)(m)$	(0.047, 0.195)	(0.329, 0.835)



図－５ 閉断面直線桁の固有振動モード



図－６ 開断面直線桁の固有振動モード

表－２ 閉断面直線桁の固有振動数 (Hz)

Mode order		Lumped Mass Method			Consistent Mass Method			Continuous Mass Method
		N=6	N=8	N=10	N=6	N=8	N=10	
1	V1	8.493 (-0.561)	8.515 (-0.301)	8.524 (-0.203)	8.592 (0.589)	8.571 (0.346)	8.559 (0.212)	8.541
2	H1	17.323 (-1.128)	17.409 (-0.638)	17.449 (-0.409)	17.522 (0.006)	17.521 (0.002)	17.521 (0.001)	17.521
3	V2	26.717 (-4.071)	27.204 (-2.326)	27.433 (-1.500)	27.887 (0.127)	27.867 (0.056)	27.860 (0.030)	27.851
4	T1	28.269 (-1.828)	28.406 (-1.352)	28.470 (-1.131)	28.592 (-0.708)	28.588 (-0.719)	28.587 (-0.725)	28.795
5	T2	52.950 (-4.296)	53.911 (-2.559)	54.328 (-1.805)	55.340 (0.024)	55.223 (-0.187)	55.150 (-0.319)	55.327
6	V3	59.238 (-9.052)	61.681 (-5.302)	62.879 (-3.462)	65.417 (0.434)	65.233 (0.152)	65.179 (0.069)	65.134
7	L1	64.953 (-2.094)	65.783 (-0.843)	65.992 (-0.527)	68.378 (3.069)	67.468 (1.697)	66.985 (0.969)	66.342
8	H2	67.053 (-4.343)	68.352 (-2.490)	68.969 (-1.610)	70.181 (0.118)	70.126 (0.040)	70.110 (0.018)	70.098
9	T3	78.347 (-10.197)	81.882 (-6.145)	83.560 (-4.222)	86.676 (-0.650)	86.646 (-0.684)	86.636 (-0.696)	87.243
10	V4	97.346 (-16.291)	105.018 (-9.694)	108.803 (-6.439)	116.875 (0.502)	116.333 (0.036)	116.160 (-0.013)	116.291
11	T4	101.959 (-15.978)	109.908 (-9.428)	113.647 (-6.347)	122.165 (0.672)	121.332 (-0.014)	121.055 (-0.243)	121.349
12	L2	107.289 (-16.642)	118.986 (-7.555)	123.329 (-4.181)	133.029 (3.356)	131.247 (1.971)	130.293 (1.230)	128.710
13	T5	116.491 (-25.193)	134.569 (-13.584)	141.513 (-9.125)	157.906 (1.402)	156.158 (0.280)	155.492 (-0.148)	155.722
14	H3	119.326 (-24.330)	147.325 (-6.575)	152.067 (-3.568)	158.429 (0.467)	157.905 (0.134)	157.779 (0.054)	157.693

された固有振動数(Hz)を閉断面に対して表－２、開断面に対して表－３に示す。なお、()内の数値は連続質量法により求められた固有振動数に対して、集中質量法および

整合質量法により求められた固有振動数との誤差を百分率で表示したものである。また、表中の記号 V は鉛直曲げ振動、H は水平曲げ振動、T はねじり振動、L は縦振動

表-3 開断面直線桁の固有振動数 (Hz)

Mode order		Lumped Mass Method			Consistent Mass Method			Continuous Mass Method
		N=6	N=8	N=10	N=6	N=8	N=10	
1	T1	4.791 -(7.020)	4.815 -(6.559)	4.826 -(6.344)	4.846 -(5.954)	4.846 -(5.957)	4.846 -(5.958)	5.153
2	V1	5.628 -(1.128)	5.656 -(0.638)	5.669 -(0.409)	5.692 (0.005)	5.692 (0.002)	5.692 (0.001)	5.692
3	H1	18.518 -(4.303)	18.877 -(2.446)	19.048 -(1.561)	19.352 (0.005)	19.351 (0.002)	19.351 (0.001)	19.351
4	T2	19.132 -(7.071)	19.227 -(6.610)	19.271 -(6.395)	19.377 -(5.882)	19.366 -(5.934)	19.363 -(5.948)	20.588
5	V2	21.777 -(4.357)	22.199 -(2.501)	22.401 -(1.616)	22.787 (0.081)	22.774 (0.026)	22.771 (0.011)	22.769
6	T3	39.516 -(14.698)	41.191 -(11.083)	42.014 -(9.306)	43.737 -(5.587)	43.621 -(5.837)	43.588 -(5.908)	46.325
7	V3	46.468 -(9.293)	48.438 -(5.449)	49.406 -(3.560)	51.432 (0.395)	51.295 (0.129)	51.257 (0.053)	51.229
8	H2	65.454 -(15.437)	70.224 -(9.274)	72.648 -(6.143)	77.465 (0.081)	77.422 (0.026)	77.411 (0.011)	77.402
9	T4	74.030 -(8.720)	75.467 -(6.949)	76.151 -(6.104)	78.282 -(3.477)	77.678 -(4.222)	77.502 -(4.439)	81.102
10	L1	76.991 -(6.797)	80.858 -(2.117)	81.054 -(1.880)	82.367 -(0.290)	81.952 -(0.792)	81.763 -(1.021)	82.607
11	V4	80.444 -(11.672)	82.611 -(9.293)	85.471 -(6.153)	92.151 (1.182)	91.434 (0.395)	91.225 (0.166)	91.074
12	T5	93.868 -(27.040)	104.264 -(18.960)	109.753 -(14.693)	124.205 -(3.460)	122.116 -(5.084)	121.472 -(5.585)	128.656
13	V5	110.395 -(22.423)	122.623 -(13.830)	129.079 -(9.293)	146.081 (2.655)	143.623 (0.927)	142.865 (0.395)	142.304
14	L2	122.319 -(24.834)	141.367 -(13.129)	151.807 -(6.714)	170.220 (4.601)	166.933 (2.582)	165.414 (1.648)	162.732

が支配的と考えられるモード形状を表し、これらの記号に続く数字は各振動モード次数を意味する。さらに、Nは要素分割数である。

従来の平面骨組構造および立体骨組構造の固有振動解析結果から、一般に集中質量法により計算された固有振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与えることが知られている^{14,20)}。しかし、表-2と表-3の計算結果より、整合質量法により求められた固有振動数の値は必ずしも上界値を与えるとは限らないことがわかる。特に、ねじり振動に対する固有振動数の値は連続質量法による解よりも常に小さい値となっている。この理由として、固有振動モードについて先に述べたように、図心とせん断中心との偏心距離による影響を受けて、複雑な連成振動効果がねじり振動モードに現れたものと考えられる。

集中質量法により得られた固有振動数は、すべて連続質量法による固有振動数の値よりも小さく、要素分割数が増加するにつれて、収束する傾向が見られる。一方、整合質量法により計算された鉛直曲げ振動(V)および水平曲げ振動(H)の固有振動数は、連続質量法よりもやや大きめの値を与え、同じ要素分割に対して、集中質量法よりもよい精度で計算されることが理解できる。しかし、ねじり振動に関する収束性はあまりよいとは言えないことがわかる。

5.3 モード連成比

二軸非対称断面を有する直線桁の図心とせん断中心との偏心量を考慮に入れた固有振動解析を行うと、曲げ振

動とねじり振動とが連成した複雑な固有振動モードが現れる。図-5および図-6に示す固有振動モードからもわかるように、三重連成振動問題では支配的な固有振動モードを判定することが困難な場合がある。そこで、モード連成状態を判定する指標として、新たにモード連成比という算定式を提示する。モード連成比とは、1節点7自由度を有する各固有振動モードの中で、それぞれの変位振幅が全体の変位振幅の総和に対して占める割合を数値的に表すパラメータであり、次式によって定義される。たとえば、第*i*次固有振動モードの*x*軸方向変位のモード連成比は次のように表される。

$$\phi_{xi} = \frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{u_{ij}^2}}{\Phi} \quad (32a)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^N (\sqrt{u_{ij}^2} + \sqrt{v_{ij}^2} + \sqrt{w_{ij}^2} + \sqrt{\theta_{xij}^2} + \sqrt{\theta_{yij}^2} + \sqrt{\theta_{zij}^2} + \sqrt{\theta_{w_{ij}}^2}) \quad (32b)$$

ここに、*N*は全節点数である。また、*u_{ij}*、*v_{ij}*、*w_{ij}*、*θ_{xij}*、*θ_{yij}*、*θ_{zij}*、*θ_{w_{ij}}*は第*i*次固有振動モードの節点*j*における*x*、*y*、*z*軸方向の変位振幅、*x*、*y*、*z*軸回りの回転角の振幅およびねじり率の振幅である。

表-4は、閉断面直線桁を10要素分割で整合質量法により求められた固有振動モードに対して、式(32)によって計算されたモード連成比の百分率の値を示す。表中の影線部は、モード連成比の数値が最大となることを示している。図心とせん断中心との偏心量により、いずれの振動モードにおいても、その連成効果は複雑に影響し合っていることがわかる。その中で、鉛直曲げ振動は*z*方向変位 ϕ_z と*y*軸回りの回転角 $\phi_{\theta y}$ が大きく、水平曲げ振動

は y 方向変位 ϕ_y と z 軸回りの回転角 $\phi_{\theta z}$ との成分が支配的であることが理解できる。一方、ねじり振動は x 軸回りの回転角 $\phi_{\theta x}$ およびねじり率 $\phi_{\theta w}$ のみならず、各ねじり振動モードごとに他の変位成分と複雑に連成振動していることがわかる。いずれの固有振動モードにおいても、高次モードになるにつれて、モード連成比の値が複雑に変動する傾向が見られる。

二軸非対称断面の場合、図心とせん断中心の位置が異なることから、解析上の節点の取る位置により、その固有振動特性が異なることが予想される。そこで、図心とせん断中心の偏心距離がもっとも大きい閉断面直線桁を対象として、図心およびせん断中心を解析上の節点とした場合の固有振動解析と、モード連成比の計算結果について考察する。ただし、そり座標 $\omega_n(y,z)$ は解析上の節

点とせん断中心を囲む面積を用いるものとする。また、要素分割数は 10 とする。

表－5 と表－6 にそれぞれ解析上の節点を図心およびせん断中心とした場合の固有振動数の値を示す。表－5 の計算結果は、表－3 と比較するとそり座標の取り扱い方による若干の差異はあるものの、ほぼ同様の固有振動数の値が得られている。一方、せん断中心を解析上の節点とした場合の固有振動数について見ると、連続質量法により得られた固有振動数に対して、集中質量法による解は下界値を与え、整合質量法による解は上界値を与えることがわかる。また、同じ要素分割数に対して、整合質量法による解は集中質量法による解に比較して、かなりよい精度で固有振動数を計算しているものと考えられる。

表－4 閉断面直線桁のモード連成比 (%)

Mode	order	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi_{\theta x}$	$\phi_{\theta y}$	$\phi_{\theta z}$	$\phi_{\theta w}$	Total
1	V1	2.6	0.5	86.7	0.9	8.7	0.1	0.5	100.0
2	H1	0.1	89.5	0.4	0.1	0.0	9.8	0.0	100.0
3	V2	20.1	0.1	65.8	0.4	13.1	0.1	0.4	100.0
4	T1	3.1	10.9	16.5	60.7	1.2	1.2	6.4	100.0
5	T2	39.9	6.4	6.2	32.8	4.1	1.7	8.9	100.0
6	V3	17.5	0.1	62.3	0.6	18.7	0.1	0.6	100.0
7	L1	52.3	3.3	19.9	12.9	5.1	1.5	5.1	100.0
8	H2	5.4	74.1	2.1	1.1	0.6	16.2	0.6	100.0
9	T3	23.5	7.4	8.3	41.6	3.0	2.4	13.8	100.0
10	V4	7.4	2.9	44.2	16.1	20.5	1.3	7.6	100.0
11	T4	22.9	3.2	36.2	18.3	11.1	1.2	7.1	100.0
12	L2	51.0	1.8	17.2	10.8	5.9	2.1	11.2	100.0
13	T5	25.3	7.2	12.8	26.9	12.1	3.0	12.8	100.0
14	H3	2.4	68.9	1.7	2.1	1.3	22.6	1.0	100.0

表－5 図心に関する固有振動数 (Hz)

Mode	order	Lumped Mass Method	Consistent Mass Method	Continuous Mass Method
1	T1	4.881 -(6.343)	4.901 -(5.958)	5.211
2	V1	5.669 -(0.409)	5.692 (0.001)	5.692
3	H1	19.271 -(0.409)	19.351 (0.001)	19.351
4	T2	19.041 -(7.471)	19.355 -(5.943)	20.578
5	V2	22.401 -(1.616)	22.771 (0.011)	22.769
6	T3	42.055 -(9.300)	43.630 -(5.904)	46.368
7	V3	49.406 -(3.560)	51.257 (0.053)	51.229
8	T4	72.216 -(9.080)	76.619 -(3.536)	79.428
9	H2	76.151 -(1.616)	77.411 (0.011)	77.402
10	L1	81.332 -(3.339)	82.498 -(1.952)	84.141
11	V4	85.471 -(6.153)	91.225 (0.166)	91.074
12	T5	109.684 -(14.619)	121.347 -(5.540)	128.464
13	V5	129.079 -(9.293)	142.865 (0.395)	142.304
14	L2	151.831 -(6.650)	165.223 (1.584)	162.647

表－6 せん断中心に関する固有振動数 (Hz)

Mode	order	Lumped Mass Method	Consistent Mass Method	Continuous Mass Method
1	T1	5.128 -(0.409)	5.149 (0.001)	5.149
2	V1	7.782 -(0.414)	7.814 (0.001)	7.814
3	H1	19.391 -(0.411)	19.471 (0.001)	19.471
4	T2	20.256 -(1.616)	20.591 (0.011)	20.589
5	V2	21.763 -(1.516)	22.100 (0.011)	22.098
6	T3	44.673 -(3.560)	46.347 (0.053)	46.322
7	V3	51.248 -(3.445)	53.109 (0.062)	53.076
8	L1	64.662 -(1.612)	65.864 (0.216)	65.722
9	H2	76.515 -(1.740)	77.887 (0.021)	77.871
10	T4	77.282 -(6.153)	82.485 (0.166)	82.349
11	V4	96.037 -(4.940)	101.326 (0.295)	101.027
12	V5	116.712 -(8.772)	128.768 (0.652)	127.934
13	T5	120.487 -(6.359)	129.177 (0.395)	128.669
14	L2	156.705 -(5.251)	166.909 (0.918)	165.390

表-7 図心に関するモード連成比 (%)

Mode	order	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi_{\theta x}$	$\phi_{\theta y}$	$\phi_{\theta z}$	$\phi_{\theta w}$	Total
1	T1	0.2	34.7	13.7	41.6	1.4	3.8	4.5	100.0
2	V1	0.0	0.0	90.9	0.0	9.1	0.0	0.0	100.0
3	H1	0.0	90.1	0.0	0.0	0.0	9.9	0.0	100.0
4	T2	3.6	30.6	12.0	36.6	2.4	6.7	8.0	100.0
5	V2	0.0	0.0	83.4	0.0	16.6	0.0	0.0	100.0
6	T3	3.5	28.1	11.1	33.7	3.3	9.2	11.1	100.0
7	V3	0.0	0.0	76.9	0.0	23.1	0.0	0.0	100.0
8	T4	28.3	19.3	7.6	23.1	3.0	8.5	10.2	100.0
9	H2	0.0	82.0	0.0	0.0	0.0	18.0	0.0	100.0
10	L1	65.3	9.5	3.7	11.3	1.5	4.0	4.7	100.0
11	V4	0.0	0.0	71.5	0.0	28.5	0.0	0.0	100.0
12	T5	7.1	23.3	9.2	27.9	4.6	12.7	15.3	100.0
13	V5	0.0	0.0	66.7	0.0	33.3	0.0	0.0	100.0
14	L2	89.7	2.4	1.0	2.9	0.6	1.5	1.8	100.0

表-8 セン断中心に関するモード連成比 (%)

Mode	order	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	$\phi_{\theta x}$	$\phi_{\theta y}$	$\phi_{\theta z}$	$\phi_{\theta w}$	Total
1	T1	0.0	0.0	0.0	90.1	0.0	0.0	9.9	100.0
2	V1	2.9	3.1	85.2	0.0	8.5	0.4	0.0	100.0
3	H1	1.3	85.6	3.2	0.0	0.5	9.4	0.0	100.0
4	T2	0.0	0.0	0.0	82.0	0.0	0.0	18.0	100.0
5	V2	20.7	0.1	65.9	0.0	13.2	0.0	0.0	100.0
6	T3	0.0	0.0	0.0	75.3	0.0	0.0	24.7	100.0
7	V3	19.1	0.7	61.7	0.0	18.4	0.1	0.0	100.0
8	L1	48.7	11.1	26.7	0.0	10.9	2.5	0.0	100.0
9	H2	9.3	62.1	10.6	0.0	4.4	13.6	0.0	100.0
10	T4	0.0	0.0	0.0	69.6	0.0	0.0	30.4	100.0
11	V4	28.2	4.2	48.0	0.0	18.8	0.9	0.0	100.0
12	V5	39.7	2.5	37.3	0.0	19.6	0.9	0.0	100.0
13	T5	0.0	0.0	0.0	64.6	0.0	0.0	35.4	100.0
14	L2	30.5	19.4	29.3	0.0	14.3	6.5	0.0	100.0

次に、図心とせん断中心を解析上の節点とした場合のモード連成比の計算結果をそれぞれ表-7および表-8に示す。表-7より、図心を解析上の節点とした場合には、主軸回りの曲げ振動、つまり y 軸回りの鉛直曲げ振動(ϕ_z と $\phi_{\theta y}$)および z 軸回りの水平曲げ振動(ϕ_y と $\phi_{\theta z}$)が独立したモード形状で現れていることがわかる。しかし、ねじり振動と縦振動は偏心距離の影響を受けて複雑な固有振動モードであることが理解できる。

一方、解析上の節点をせん断中心とした場合には、表-8の計算結果より、ねじり振動($\phi_{\theta x}$ と $\phi_{\theta w}$)は他の変位成分と連成することなく、完全に独立した固有振動モードを形成していることがわかる。逆に、曲げ振動と縦振動には他の変位成分との連成振動モードが生じていることが理解できる。このことは、ねじり振動はせん断中心軸を、曲げ振動は図心軸を選択することにより、その連成効果を分離することができるものと考えられる。また、式(27)、式(30)および式(31)による断面内の座標変換が数値解析的に正しく実行されていることを確認することができる。

6. あとがき

本研究は、二軸非対称薄肉断面を有する直線桁の固有振動解析を行うために、図心とせん断中心との偏心量を考慮した部材要素断面内の座標変換によって処理する方法について検討し、計算された固有振動数と固有振動モードの連成度について考察したものである。ここで得られた結論および今後の研究課題についてまとめると以下のようなになる。

薄肉断面部材要素の両端断面上の任意点を新しい節点とする一般化された剛性マトリックスと質量マトリックスを提示した。隣り合う部材要素の境界面で共通の節点を設けることにより、重ね合わせの原理を用いることができ、薄肉変断面桁の固有振動解析に適用することが可能であると考えられる。

集中質量法により計算された薄肉直線桁の固有振動数は連続質量法により求められた解に比較して、常に小さい値を与える。一方、整合質量法により得られた固有振動数は連続質量法による解に比較して、常に上界値を与えるとは限らないことがわかった。この理由としては、

解析上の節点を図心の位置に取ることにより、曲げ振動とねじり振動との複雑な連成効果によるものと考えられている。

さらに、解析上の節点をせん断中心とした場合には、ねじり振動は他の曲げ振動および縦振動とも連成することなく、完全に独立した形で固有振動モードが形成される。しかも、この場合には集中質量法による解は連続質量法により計算された固有振動数に対して下界値を与え、整合質量法による解は上界値を与えることがわかった。また、同じ要素分割数においては、整合質量法による解は集中質量法による解に比較して、かなりよい精度で固有振動数を計算できるものと考えられる。

複雑な三重連成固有振動モードの中で、支配的な固有振動モードを判定する一つの指標として、モード連成比の算定式を提示した。このモード連成比を用いることにより、固有振動モードの中から連成の割合をある程度、簡易的に判別することができるようになったものと考えられる。

今後の研究課題として、二軸非対称薄肉断面を有する曲線桁および変断面桁における固有振動特性とその解の精度について検討する必要がある。さらに、走行荷重による連続桁橋の動的応答における連成振動の影響については今後の重要な検討課題となるであろう。最後に、本研究の数値計算には武村信也氏（清水建設）の協力を得たことを付記し、ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 高橋昭一・志村勉・橘吉宏・小西哲司：PC床版2主桁橋「ホロナイ川橋」の設計および解析・試験検討，橋梁と基礎，Vol.30, No.2, pp.23-30, 1996.
- 高橋昭一・志村勉・木村宏・小西哲司：PC床版2主桁橋「ホロナイ川橋」の現場施工，橋梁と基礎，Vol.30, No.3, pp.2-7, 1996.
- 大垣賀津雄・川口喜史・磯江暁・高橋昭一・川尻克利・長井正嗣：合成2主桁橋の鋼主桁補剛設計に関する実験的研究，構造工学論文集，Vol.44A, pp.1229-1239, 1998.
- 川井忠彦・藤谷義信：振動および応答解析入門，培風館，1991.
- Vlasov, V.Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation Idt., 1961.
- Krajcinovic, D. : A consistent discrete elements technique for thinwalled assemblages, International Journal of Solids and Structures, Vol.5, pp.639-662, 1969.
- 結城皓曠・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，第224号，pp.67-78, 1974.
- Wekezer, J.W. : Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.115, No.12, pp.2965-2978, 1989.
- Friberg, P.O. : Coupled vibrations of beams-an exact dynamic element stiffness matrix, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp.479-493, 1983.
- Danay, A., Gluck, J. and Gellert, M. : A generalized continuum method for dynamic analysis of asymmetric tall buildings, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, pp.179-203, 1975.
- Leung, A.Y. : Natural shape functions of a compressed Vlasov element, Thin-Walled Structures, Vol.11, pp.431-438, 1991.
- Leung, A.Y. : Dynamic stiffness analysis of thin-walled structures, Thin-Walled Structures, Vol.14, pp.209-222, 1992.
- Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free vibration analysis of continuous beams, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.111, No.5, pp.639-652, 1985.
- 林川俊郎・佐藤康治・角田史雄：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度，北海道大学工学部研究報告，第148号，pp.1-15, 1989.
- 林川俊郎：Vレグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について，構造工学論文集，Vol.35A, 1989.
- 林川俊郎・松井義孝・北島勉・佐藤浩一：薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究，応用力学論文集，Vol.1, pp.303-310, 1998.
- 大垣賀津雄・西尾研二・山本晃久・石井立也・中村元・川尻克利・長井正嗣：千鳥の沢川橋—PC床版連続合成2主桁橋—の実験振動試験，土木学会第54回年次学術講演会講演概要集，第1部(B), I-B253, pp.504-505, 1999.
- 藤谷義信：薄肉はり構造解析，培風館，1990.
- Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F. : Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., 1964.
- 橋梁振動研究会編：橋梁振動の計測と解析，技報堂出版，1993.
- 鷺津久一郎・宮本博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦：有限要素法ハンドブック，I基礎編，培風館，1981.

(1999年9月17日受付)