

ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析

The discrete limit analysis by using the hybrid model with the penalty

竹内 則雄*, 草深 守人*, 武田 洋**, 佐藤 一雄***, 川井 忠彦****
Norio Takeuchi, Morito Kusabuka, Hiroshi Takeda, Kazuo Sato and Tadahiko Kawai

*工博 法政大学教授 工学部土木工学科 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町3-7-2)

**工博 法政大学教授 工学部システム制御工学科 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町3-7-2)

***核燃サイクル開発機構 技術展開部 (〒107-0052 東京都港区赤坂1-9-13)

****工博 東京理科大学教授 工学部電気工学科 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1-3)

In this paper, discrete limit analysis considering elastic deformation was developed from the viewpoint of hybrid displacement model. In this model, the concept of the spring of RBSM was introduced in Lagrangian multiplier. In addition, compatibility of the displacement on the element boundary edge was approximately introduced using the penalty as a spring constant. First, the equivalent solution with the analytical solution when it examined the accuracy of elasticity solution using this model was obtained. Next, material nonlinear analysis which used surface force using load incremental method was developed. The collapsing load calculated by this method was equivalent to RBSM.

Key Words : non-linear analysis, hybrid displacement model, penalty method, RBSM

キーワード: 非線形解析, ハイブリッド型変位モデル, ペナルティ法, RBSM

1. はじめに

川井[1]によって開発された剛体一ばねモデル(RBSM)は, 要素境界辺上に設けられたばねを用いて表面力等の物理量を扱うため, 構造物や地盤などの進行型破壊解析を容易に行うことができる. また, 表面力の連続性と崩壊機構条件を満たすことから, 崩壊荷重は上界値を与えることが知られている[2]. RBSMは, 離散化極限解析を効率的に行えるという利点を有しているが, 要素を剛体と仮定し, 要素境界辺に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを基に剛性行列を誘導するため, 弾性解の精度は有限要素法(FEM)と比較して劣る.

一方, 変位型のFEMでは, 変位の連続性が保証されており, 弾性解の精度は高い. しかし, 変位の適合性を持たせたことにより, 表面力の連続性は失われる. また, 節点において力の釣り合いを考えるため, 要素境界辺で物理量を取り扱うRBSMより, 進行型破壊の解析は複雑になる. 著者ら[3]は有限体積法(FVM)を用いて, 進行型破壊の解析を試みている. FVMでは, 境界辺上の表面力を直接取り扱うため, 力の伝達を遮断することで引張り破壊による進行型の破壊解析を容易に行える. また, 表面力を基にした弾塑性解析も行えるが[4], 現在のところ, 仮定した変位場によって要素形状が決定されるため, なめらかなすべり線は得られていない.

以上のように, それぞれの解析法は利点, 欠点を有し

ているが, 進行型破壊の解析を行う場合は, 2重節点の処理などが不要な境界辺の物理量を取り扱う方が簡単である. FEMでは, 要素境界辺の物理量を取り扱う方法として, ハイブリッド型の変分原理がある[5]. この方法では, 変位の連続性を若干緩め, 付帯条件としてLagrangeの未定乗数を用いて変分表示に導入している[6]. この未定乗数は要素境界面上の表面力という物理的な意味を有しているが, この表面力に対して材料非線形の概念を導入することは行われていない.

このような現状に鑑み, 本論文では, 弾性変形を考慮した離散化極限解析法を開発することを目的に, 要素境界面上の表面力を扱うことができるハイブリッド型変位モデルの考え方に着目し, Lagrangeの未定乗数にRBSMのばねの考え方を導入する. さらに, ばね定数として, ペナルティを用い, 要素境界辺上での変位の連続性を近似的に導入した新しい離散化モデルを開発する. はじめに本モデルの定式化を示し, 弾性解の精度を検討する. さらに, 荷重増分法[7]を用いて, 表面力に対する材料非線形解析法を展開し[8], 本手法によって得られる崩壊荷重の精度や破壊の進展についても検討を加える.

2. 基礎方程式とハイブリッド型変分原理

(1) 基礎方程式

弾性問題の基礎方程式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
& \text{(釣合い方程式)} & L^t \sigma + f &= 0 & \text{in } \Omega & (1) \\
& \text{(応力-ひずみ関係)} & \sigma &= D \varepsilon & \text{in } \Omega & (2) \\
& \text{(ひずみ-変位関係)} & \varepsilon &= L u & \text{in } \Omega & (3)
\end{aligned}$$

ここで、 u, ε, σ は、それぞれ、変位、ひずみ、応力ベクトルであり、 D は構成行列、 f は物体力を表している。 Ω は境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ で囲まれた領域、もしくは体積である。ただし、 Γ_u は変位が与えられる境界、 Γ_σ は表面力が与えられる境界で以下の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
& \text{(力学的境界条件)} & T &= \bar{T} & \text{on } \Gamma_\sigma & (4) \\
& \text{(幾何学的境界条件)} & u &= \bar{u} & \text{on } \Gamma_u & (5)
\end{aligned}$$

ここで、 T は表面力で、 $T = n \sigma$ であり、 n は法線方向の余弦である。また、上付の $\bar{}$ は既知量を表している。

いま、2次元平面応力状態の場合、それぞれの係数は次の通りである。

$$\begin{aligned}
L^t &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\
\sigma &= \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \\
n &= \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad T = \begin{Bmatrix} T_n \\ T_t \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比であり、 f_x, f_y は、それぞれ x および y 軸方向の物体力を表している。また、 u, v は、それぞれ x および y 軸方向の変位である。 n_x, n_y は境界における方向余弦であり、 T_n, T_t は境界における法線および接線方向の表面力である。

(2) 仮想仕事の原理

式(1)に幾何学的境界条件を満たす仮想変位 δu (2次元平面問題の場合、 $\delta u^t = [\delta u, \delta v]$)を乗じて領域 Ω について積分すると以下関係が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta u^t (L^t \sigma + f) d\Omega = 0 \quad (6)$$

ただし、 $\delta u = 0$ on Γ_u

これに、ガウスの発散定理を用いると、次のような領域 Ω に関する仮想仕事式が得られる。

$$\int_{\Omega} [L \delta u]^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^t f d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma = 0 \quad (7)$$

いま、図1に示すように、領域 Ω は閉境界 $\Gamma^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)}$ から構成されているものとする。すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (8)$$

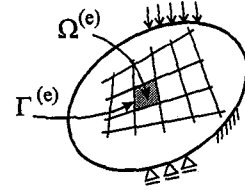


図1 部分領域 $\Omega^{(e)}$

このとき、式(7)の仮想仕事式は離散領域に対して以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [L \delta u]^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega \right) \\
& - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

(3) ハイブリッド型仮想仕事の原理

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、図2に示すように、隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 、すなわち、

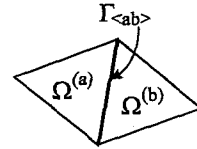


図2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

$$\Gamma_{<ab>} = \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (10)$$

において、付帯条件

$$\hat{u}^{(a)} = \hat{u}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (11)$$

をLagrangeの未定乗数 λ を用いて、

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda^t (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma \quad (12)$$

と表し、仮想仕事式(9)に導入する[6]。ただし、 $\hat{u}^{(a)}$ ならびに $\hat{u}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の変位を表している。

いま、隣接する2つの要素境界辺の数を N とすると、ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [L \delta u]^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega \right) \\
& - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda^t (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma = 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

なお、Lagrangeの未定乗数 λ は、次式のように、 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を意味している[6]。

$$\lambda = T^{(a)}(\hat{u}^{(a)}) = -T^{(b)}(\hat{u}^{(b)}) \quad (14)$$

ここで、 $T^{(a)}$ と $T^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を表している。

3. 変位場とLagrangeの未定乗数

(1) 要素毎に独立な線形変位場

本論文では、変位場として、線形変位場を各要素毎に独立に設定する。いま、部分領域 $\Omega^{(e)}$ について、変位を

$$u^{(e)} = N_d^{(e)} d^{(e)} + N_\varepsilon^{(e)} \varepsilon^{(e)} \quad (15)$$

と表す。ここで、上付きの (e) は部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関するものであること意味する。式(15)におけるそれぞれの係数は、2次元平面問題の場合、以下のとおりである。

$$d^{(e)} = [u_p, v_p]^t, \quad \varepsilon^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^t$$

$$N_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} x - x_p & 0 & (y - y_p)/2 \\ 0 & y - y_p & (x - x_p)/2 \end{bmatrix}$$

ここで、 u_p, v_p は、要素内の任意点 $P = (x_p, y_p)$ における x および y 方向変位を表している。3次元の場合は、これに z 方向の変位を加える。また、 $\varepsilon^{(e)}$ は、要素内で一定な値を持つひずみを表している。

このように、本論文で用いる変位場は、要素内における任意点の変位に加え、直接、ひずみを自由度として扱う。また、各要素内の任意点におけるパラメータを用いて要素内変位場を表しているため、従来の変位型FEMとは異なり、節点において変位を共有しない。すなわち、本論文における節点は領域形状を認識するために用いるのであって、従来の変位型FEMのように自由度を設けるための節点ではない。したがって、要素形状は、特に限定されず、任意の多角形、多面体、曲面体を部分領域として用いることができる。

(2) Lagrangeの未定乗数とペナルティ

2章の終わりで述べたように、Lagrangeの未定乗数は、物理的には表面力を意味している。従来のハイブリッド型変分原理を用いる手法では、この未定乗数を要素境界边上の点における値と補間関数を用いて表し、その値を未知数として重ね合わせを行い、全体係数行列を作成する。したがって、要素内変位場を独立に設定しても、この時点で要素形状は補間関数に依存し、何らかの拘束が生ずる。

川井[9]は、式(16)に示す表面力と相対変位の間にばねの概念を導入し、要素内のひずみエネルギーとばねによる表面力の仕事を用いて全体のエネルギーを評価する方法を提案している。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & k_{nt} \\ k_{nt} & k_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 σ_n, τ は、要素境界面上の表面力を、 δ_n, δ_t は

相対変位を、 k_{nn}, k_{tt}, k_{nt} はばね定数を表している。しかし、この方法は、具体的に計算されておらず、また、要素内ひずみが一定、すなわち、要素内応力が一定という条件と表面力が1次分布になるという矛盾が生じ、収束計算などで近似的に解を求めなければうまく解析することはできない。

一方、本論文では、式(14)に示すLagrangeの未定乗数 λ が表面力に対応するという物理的意味を考慮して、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を式(17)のように表すことにする。

$$\lambda_{<ab>} = k \cdot \delta_{<ab>} \quad (17)$$

ここで、 $\delta_{<ab>}$ は要素境界面 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対変位を表しており、次の関係がある。

$$\delta_{<ab>} = R_{<ab>}^{(a)} \hat{u}^{(a)} + R_{<ab>}^{(b)} \hat{u}^{(b)} = \sum_{l=1}^2 R_{<ab>}^{(l)} \hat{u}^{(l)} \quad (18)$$

式(18)において、 $R_{<ab>}^{(a)}, R_{<ab>}^{(b)}$ は、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ に対するそれぞれの要素から見た座標変換行列であり、

$$R_{<ab>}^{(a)} = -R_{<ab>}^{(b)} \quad (19)$$

なる関係にある。2次元問題の場合、部分領域 $\Omega^{(l)}$ の境界 $\Gamma_{<s>}$ に関して、これは以下のように表される。

$$R_{<s>}^{(l)} = \begin{bmatrix} l_{<s>}^{(l)} & m_{<s>}^{(l)} \\ -m_{<s>}^{(l)} & l_{<s>}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし、 $l_{<s>}^{(l)}, m_{<s>}^{(l)}$ は、着目した境界に対する方向余弦を表している。

また、 k は、表面力と相対変位を関係づける行列である。2次元問題の場合、式(17)は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{n<ab>} \\ \lambda_{t<ab>} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{n<ab>} \\ \delta_{t<ab>} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

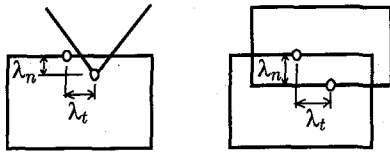
ここで、 $\delta_{n<ab>}, \delta_{t<ab>}$ は要素境界面 $\Gamma_{<ab>}$ に対する法線および接線方向の相対変位で、同様に、 $\lambda_{n<ab>}, \lambda_{t<ab>}$ は、法線および接線方向に対するLagrangeの未定乗数、すなわち表面力である。

さて、RBSMでは、式(17)の k をばね定数とし、その値を近似的に1軸状態の応力-ひずみ関係から求めている[12]。これは、要素を剛体と仮定しているため、要素の変形をばね定数に代表させる必要があるためである。しかし、式(13)で示されたハイブリッド型の仮想仕事式には、要素内応力、すなわち、内力による仕事が考慮されているため、RBSMのような、要素の変形を考慮するためのばね定数を用いる必要はない。

ところで、Shiら[10]は、剛体変位と要素内のひずみをパラメータとする不連続変形法(DDA)を提案している。佐々木ら[11]は、DDAにおいて、近似的に変位の連続性

を確保するため、独自のペナルティを提案している。この方法では多角形の頂点と相対する要素境界辺に関する点接触を原則としており、動解析を基本とする DDA においては合理的な方法であると考えられる。しかし、静的な解析の場合、点接触は一点に集中荷重が作用するような状態となり、応力一ひずみ関係において、局所的な応力集中のように、不自然な応力状態が生ずるものと思われる。

ここでは、DDA の考え方を応用し、要素境界面上の相対変位と表面力の関係式(17)において、 k をペナルティとして取り扱うことにする。この考え方が DDA のペナルティと異なるのは、図 3 に示すように、点と面ではなく面と面との間にペナルティを導入していることである。



(a) 点と面 (b) 面と面
図 3 ペナルティの導入方法

RBSM 的に考えれば、要素境界面上に極めて硬いばねを設けたことになり、この場合、DDA と同様、近似的に要素境界面上で変位の連続性を導入したことになる。2次元平面問題の場合、ペナルティを p とすれば、式(21)の関係において、

$$k_n = k_t = p \quad (22)$$

である。

4. 離散化方程式の誘導

離散化方程式を誘導するにあたり、式(11)で示した付帯条件を要素境界面に沿った局所座標系の成分に変換する。

$$R_{<ab>} \hat{u}^{(a)} = R_{<ab>} \hat{u}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (23)$$

ここで、 $R_{<ab>}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列で、式(19)との間に次の関係がある。

$$R_{<ab>} = -R_{<ab>}^{(a)} = R_{<ab>}^{(b)} \quad (24)$$

このとき、式(12)は、式(23)(24)の関係を用いて次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>}^t R_{<ab>} (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma \\ &= - \sum_{l=1}^2 \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>}^t R_{<ab>}^{(l)} \hat{u}^{(l)} d\Gamma \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)において、式(18)の関係を用いるなら

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>}^t \delta_{<ab>} d\Gamma \quad (26)$$

さらに、式(17)の関係を代入すると以下のようになる。

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta_{<ab>}^t \cdot k \cdot \delta_{<ab>} d\Gamma \quad (27)$$

したがって、式(13)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma \right) \\ + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \delta^t k \delta d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、領域や境界を示す上付や下付の(e)や<s>は省略して示している。また、左辺第3項は文献[6]の書き方にしたがって、便宜上、領域の和の() 内に入れておく。これに、式(2)(3)の関係を代入すれば、最終的に以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t D L u d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t T d\Gamma \right) \\ + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \delta^t k \delta d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

離散化方程式は、式(29)に対して、式(15)で示す線形変位場の関係を代入することによって得られる。ただし、仮想変位 δu は、次のように表されるものとする。

$$\delta u = N_d \delta d + N_\varepsilon \delta \varepsilon \quad (30)$$

離散化方程式の誘導に先立ち、式(15)(30)を次のように整理する。

$$U^{(e)} = [d^{(e)}, \varepsilon^{(e)}]^t, \quad \delta U^{(e)} = [\delta d^{(e)}, \delta \varepsilon^{(e)}]^t \quad (31)$$

$$N^{(e)} = [N_d^{(e)}, N_\varepsilon^{(e)}] \quad (32)$$

このとき、部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する変位ならびに仮想変位は次のように書くことができる。

$$u^{(e)} = N^{(e)} U^{(e)}, \quad \delta u^{(e)} = N^{(e)} \delta U^{(e)} \quad (33)$$

これより、以下の関係が得られる。

$$L u^{(e)} = L N^{(e)} U^{(e)} = B^{(e)} U^{(e)} \quad (34)$$

ここで、 $B^{(e)}$ は、以下の通りである。

$$B^{(e)} = L N^{(e)} = [0, I] \quad (35)$$

ただし、 0 はすべての成分が 0 の行列、 I は単位行列を表している。同様に、

$$L \delta u^{(e)} = B^{(e)} \delta U^{(e)} \quad (36)$$

以上の関係を用いると、式(29)における左辺第1項は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t D L u d\Omega \\ & = (\delta U^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t D^{(e)} B^{(e)} d\Omega U^{(e)} \end{aligned} \quad (37)$$

いま、全要素における自由度を並べた1次元配列を U とすると、部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $U^{(e)}$ は、以下のように関係付けられる。

$$U^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} U \quad (38)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(e)}$ は、全要素における自由度と着目要素における自由度を関係付ける行列である。同様に、仮想変位についても、

$$\delta U^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta U \quad (39)$$

とすると、式(37)は次のように整理することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t D L u d\Omega = \delta U^t K^{(e)} U \quad (40)$$

ここで、 $K^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$K^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t D^{(e)} B^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \quad (41)$$

また、式(29)の左辺第2項および第3項は、以下のよう表すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega + \int_{\Gamma_e} \delta u^t T d\Gamma \\ & = (\delta U^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t f d\Omega + \int_{\Gamma_e} (N^{(e)})^t T d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (42)$$

式(42)は、式(39)の関係を用いると、次のように整理することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega + \int_{\Gamma_e} \delta u^t T d\Gamma = \delta U^t P^{(e)} \quad (43)$$

ここで、 $P^{(e)}$ は以下の関係にある。

$$P^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t f d\Omega + \int_{\Gamma_e} (N^{(e)})^t T d\Gamma \right) \quad (44)$$

一方、要素境界面に関する項を整理するにあたり、相対変位 $\delta_{<ab>}$ を次のように表す。

$$\delta_{<ab>} = B_{<ab>} U_{<ab>} \quad (45)$$

ここで、 $B_{<ab>}$ 、 $U_{<ab>}$ は、以下の通りである。

$$B_{<ab>} = [R_{<ab>}^{(a)} N^{(a)}, R_{<ab>}^{(b)} N^{(b)}] \quad (46)$$

$$U_{<ab>} = [U^{(a)}, U^{(b)}]^t \quad (47)$$

ただし、上付の (a) 、 (b) は、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ に関する量を表している。これらの関係を用いると、式(29)の左辺第4項は変分を考慮して次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta^t k \delta d\Gamma \\ & = \delta U_{<ab>}^t \int_{\Gamma_{<ab>}} B_{<ab>}^t k B_{<ab>} d\Gamma U_{<ab>} \end{aligned} \quad (48)$$

いま、式(38)と同様に、全要素における自由度を並べた1次元配列を U とすると、要素境界面 $\Gamma_{<ab>}$ に関する自由度 $U_{<ab>}$ は、以下のように関係付けられる。

$$U_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} U \quad (49)$$

ここで、 $\mathcal{M}_{<ab>}$ は、全要素における自由度と着目要素境界面に関する自由度を関係付ける行列である。同様に、仮想変位についても、

$$\delta U_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} \delta U \quad (50)$$

とする。これらの関係を用いると、式(48)は次のように書くことができる。

$$\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \delta^t k \delta d\Gamma = \delta U^t K_{<s>} U \quad (51)$$

ここで、 $K_{<s>}$ は以下のとおりである。

$$K_{<s>} = \mathcal{M}_{<s>}^t \int_{\Gamma_{<s>}} B_{<s>}^t k B_{<s>} d\Gamma \mathcal{M}_{<s>} \quad (52)$$

以上のようにして求めた式(40)(43)(51)より、式(29)は以下のよう表すことができる。

$$\delta U^t \left(\sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \right) U - \delta U^t \left(\sum_{e=1}^M P^{(e)} \right) = 0 \quad (53)$$

ここで、仮想変位 δU は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$K U = P \quad (54)$$

ただし、 K および P は以下のとおりである。

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \quad (55)$$

$$P = \sum_{e=1}^M P^{(e)} \quad (56)$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(54)に示す連立1次方程式に帰着し、左辺の係数行列 K は、各要素の剛性と要素境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。

なお、係数行列 K において、要素境界面に関する積分が含まれるが、本論文では、積分点を境界面の1点（平面問題の場合、中点）にとり解析する。このようにした理由は、要素内ひずみが一定でかつ、表面力の連続性を保持しながら境界面のいたるところ変位の連続性を要求すると拘束が強くなりすぎることが懸念されたためである。

5. 離散化極限解析のための材料非線形解析法

(1) 破壊規準と構成則

本論文では、式(17)に導入したペナルティにすべりなどの条件を考慮して要素境界面でのすべりを表現し、離散化極限解析を行う。この場合、表面力を取り扱うことになるため、構成則や非線形解析法の考え方は、RBSM の場合とほとんど変わらない[8]。ここでは、2次元状態の Mohr-Coulomb の条件を例に、これらの関係を述べる。

Mohr-Coulomb の条件を用いた場合の降伏関数 f は以下のように表すことができる。

$$f = \tau^2 - (c - \sigma_n \tan \phi)^2 \quad (57)$$

ここで、 c は粘着力、 ϕ は内部摩擦角で、トレスカの場合の場合は $\phi = 0$ とすればよい。また、 σ_n 、 τ は、それぞれ、法線方向、接線方向の表面力を表している。本論文では、表面力を式(21)のように、 σ_n 、 τ のかわりに λ_n 、 λ_t で表している。これを簡単に、 $\lambda = [\lambda_n, \lambda_t]^T$ とすると降伏関数は次のように表すことができる。

$$f(\lambda) = 0 \quad (58)$$

一方、塑性ポテンシャル Q についても同様に

$$Q(\lambda) = 0 \quad (59)$$

とする。一般的な塑性流れ則は応力とひずみの関係で表されているが、本論文では、式(17)のように、ひずみの代わりに相対変位 δ を用いている。そこで、塑性化後の相対変位の増分 $\Delta\delta^p$ を以下のように考える。

$$\Delta\delta^p = \mu \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \quad (60)$$

ここで、 Δ は増分量であることを、また、上付の p は塑性状態の量を示している。塑性化する前の量を上付の e で表せば、全相対変位は以下ようになる。

$$\Delta\delta^e = \Delta\delta - \Delta\delta^p \quad (61)$$

一方、塑性化前の表面力と相対変位の関係は、式(17)で表されており、これを改めて以下のように書いておく。

$$\lambda = k^e \cdot \delta^e \quad (62)$$

式(62)は、式(60)(61)の関係を用いて次のように表せる。

$$\Delta\lambda = k^e \left(\Delta\delta - \mu \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right) \quad (63)$$

さらに、塑性条件

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta\lambda = 0 \quad (64)$$

に代入し、 μ について解いた後、式(63)を整理すれば、塑性化後の増分表面力と増分相対変位の関係が以下のようを得られる。

$$\Delta\lambda = \left(k^e - \frac{k^e \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} k^e}{\frac{\partial f}{\partial \lambda} k^e \frac{\partial Q}{\partial \lambda}} \right) \Delta\delta \quad (65)$$

上式において、 $f \equiv Q$ であれば、関連流れ則に従うことになる。式(65)の () 内を k^p とし、関連流れ則を仮定して、式(57)で示した Mohr-Coulomb の条件に対する行列を求めると以下ようになる。

$$k^p = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_n^2 \{ (c - \lambda_n \tan \phi) \tan \phi \}^2 & k_n k_t \lambda_t (c - \lambda_n \tan \phi) \tan \phi \\ \text{sym.} & k_t^2 \lambda_t^2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

ここで、 k_n 、 k_t は式(22)で示したペナルティであり、要素境界面の表面力が降伏曲面上の値になった後、式(66)の関係を用いると、表面力は降伏曲面上を移動する。

(2) 材料非線形解析法

要素境界面のすべりや降伏を追跡する非線形解析法として、山田ら[7]による荷重増分法における $r_{\min}$ 法がある。この方法は、最も降伏しやすい境界辺を見つけ、そこが降伏するために必要な荷重増分率を自動的に計算から求め、順次その境界辺を降伏させながら解析する手法で、破壊の進展を追跡できる利点を有している。詳細は文献[7][8]にゆずり、ここでは、本モデルにこの方法を適用する場合の考え方を中心に説明を行う。

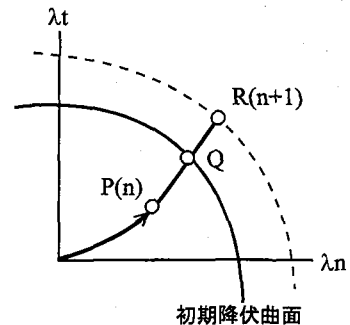


図4 $r_{\min}$ 法における荷重増分率の関係

図4に示すように、 $r_{\min}$ 法では、現在の点 P と増分後の仮の点 R の区間において、表面力は線形的に変化するものと考え、表面力が降伏曲面上の点 Q になるために必要な荷重増分率 r を

$$r = \frac{PQ}{PR} \quad (67)$$

として求める。これをすべての降伏していない境界辺の表面力に対して計算し、それらの増分率のうち、最小のものを今回の荷重増分率とする。現在の値と増分後の値を、それぞれ、 n と $n+1$ を付けて表すと、

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + r \cdot \Delta \lambda \quad (68)$$

として増分後の値を求めることができる。変位や要素内応力についても式(68)と同様にして求める。この結果、増分後の表面力は、降伏曲面を越えることはなく、降伏曲面上もしくはその内側に必ずあることになる。

収束判定は、現在の計算ステップを n として

$$r_{total} = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=0}^{k-1} (1 - r_i) \right) r_k \quad (r_0 = 0) \quad (69)$$

を用いて、 $r_{total} = 1$ となったとき、すべての荷重を使い果たしたもの判断する。

なお、式(57)に示した Mohr-Coulomb の条件における荷重増分率は

$$(\lambda_t + r \cdot \Delta \lambda_t)^2 \leq \{c - (\lambda_n + r \cdot \Delta \lambda_n) \tan \phi\}^2 \quad (70)$$

より、次の2次方程式を解くことによって求めることができる。

$$A \cdot r^2 + B \cdot r + C = 0 \quad (71)$$

$$A = \Delta \lambda_t^2 - (\Delta \lambda_n \tan \phi)^2$$

$$B = 2\{\lambda_t \Delta \lambda_t - (c - \lambda_n \tan \phi) \Delta \lambda_n \tan \phi\}$$

$$C = \lambda_t^2 - (c - \lambda_n \tan \phi)^2$$

6. 数値計算例

(1) 弾性解析

はじめに、弾性解の精度を検証するため、図5に示す内圧を受ける中空厚肉円筒の問題を解析する。

本モデルでは、要素形状として任意の形状を用いることができる。ここでは、図5に示すように、円筒の1/4を取り出し、円周方向に20分割、半径方向に16分割した四角形要素を用いた。内径 r_1 及び外径 r_2 、ならびに内圧 p_0 、弾性係数 E 、ポアソン比 ν は図中に示すとおりである。また境界条件としては、図のように、両端をスライドとした。

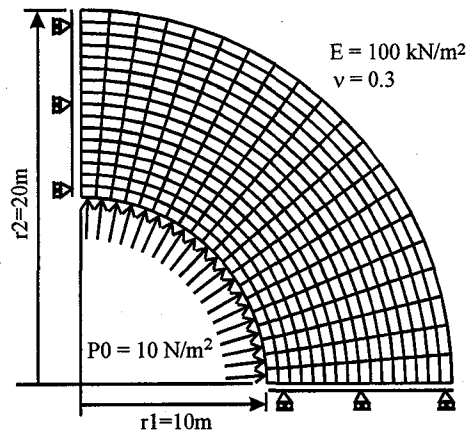


図5 内圧を受ける厚肉円筒

はじめに、ペナルティが弾性解析結果、特に変位に与える影響を検討するため、弾性係数 E の 10^n 倍のペナルティを与えて、本手法による解と解析解とを比較した。

図6は、横軸にペナルティの大きさを示す n を、縦軸に内側表面における半径方向の変位を解析解で除した値をとった図である。弾性係数の 10^3 倍以上のペナルティを用いると、本手法による解は解析解とほぼ一致し、その誤差は0.1%以下であった。以降の計算は、弾性係数の 10^8 倍のペナルティを用いた。

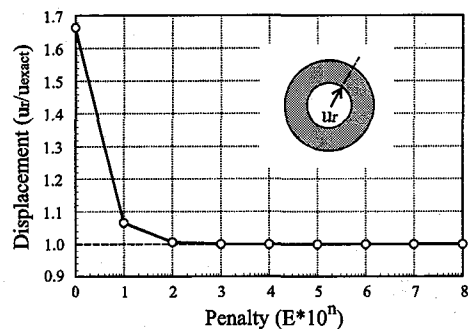


図6 ペナルティの相異による半径方向変位

図7は、半径方向の変位分布を示した図である。横軸は半径方向の距離を、また、縦軸は半径方向変位を、それぞれ、内径 r_1 で除して無次元化した値を示している。図中、実線が解析解を、白抜きの○が本解析による半径方向の変位を表している。すべての点において、誤差は0.1%以下であり、良好な結果が得られた。

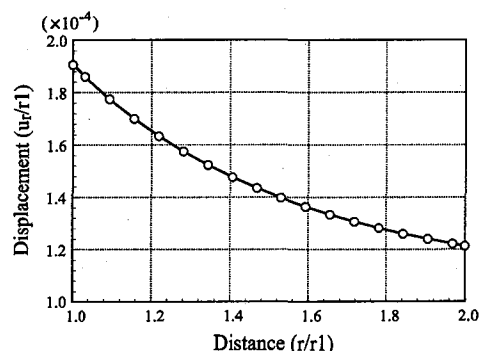


図7 半径方向変位分布

図 8 は、半径方向の要素内応力 σ_r と円周方向の要素内応力 σ_θ を解析解と比較した図である。横軸は半径方向の距離を内径 r_1 で除して無次元化した値を、また、縦軸は、それぞれの要素内応力を内圧で無次元化した値を示している。実線が解析解を、白抜きのが、円周方向の応力と半径方向の応力を示している。すべての点において、どちらの応力も、正解と 0.1%以下の誤差であった。

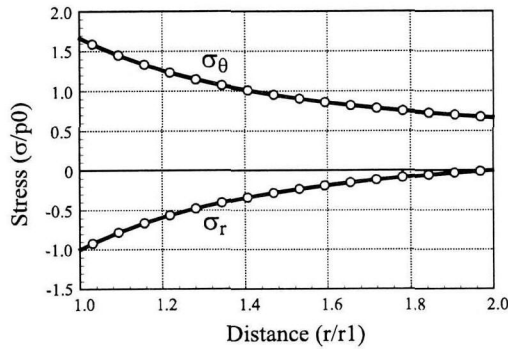


図 8 半径方向および円周方向応力分布

図 9 は VonMises の応力を示したものである。本モデルでは要素内応力が求められているため、図のような、FEMで行われているカラーコンターによる表現も可能である。ただし、本論文では、紙面の関係上、モノクロでこれを表している。図 8 に示したように、各要素の応力は、弾性解に対して 0.1%以下の誤差である。

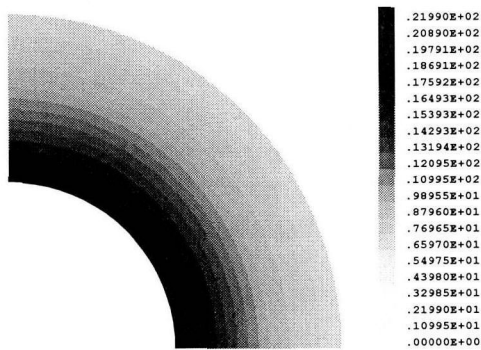


図 9 VonMises の応力コンター

(2) 材料非線形解析

本モデルによる離散化極限解析例として、図 10 に示すポンチの押し込み問題を取り上げる[12]。要素分割は図に示すとおりで、この例題では三角形要素を用い、主に極限荷重を効率よく求めることを主眼として、比較的粗い要素で分割した。

寸法は $2h=0.05\text{m}$ 、 $2b=0.025\text{m}$ であり、このときの極限荷重は解析的に

$$\frac{p_m}{2c} = 1.22$$

である。ここで、 p_m は、載荷面上の単位面積あたりの極限荷重で、 c はせん断強さである。材料定数は表 1 に示

すとおりである。ただし、自重は無視している。

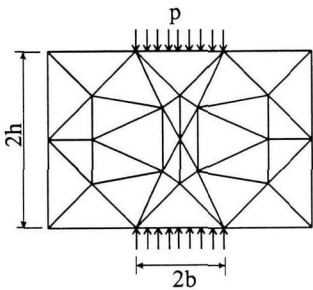


図 10 離散化極限解析に用いたポンチの押し込み問題

表 1 材料定数

弾性係数(E)	210 GN/m ²
ポアソン比(v)	0.3
せん断強さ(c)	3 MN/m ²
内部摩擦角(φ)	0°

図 11 は、本手法と RBSM による離散化極限解析の荷重—変位曲線を示した図である。横軸は、載荷板の変位 δ を載荷幅で除した値、縦軸は、単位面積あたりの載荷重をせん断強さで除した値である。白抜きのが本手法による結果、白抜きのが RBSM による結果で、1 点破線は解析解を示している。本手法と RBSM の極限荷重は、1.23 で全く同じ値となっている。ただし、RBSM の要素分割は図 10 と全く同じ分割を行っている。しかし、要素のひずみを考慮している本手法と、要素境界辺のばねに剛性を持たせた RBSM とでは、極限荷重に至る変位量は異なっている。

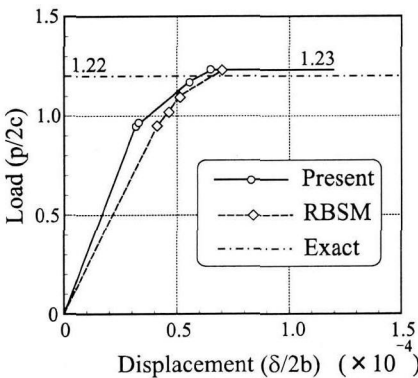


図 11 荷重—変位曲線

図 11 において、白抜きのが○や◇の位置は、1つの要素境界辺が降伏したときの荷重と変位の位置を示しているが、それぞれの荷重値も本手法と RBSM とでは異なる。そこで、それぞれの荷重状態における破壊の進展状況を比較した図を図 12 と図 13 に示す。

両者を比較すると、明らかに破壊の進展に相異が見られる。本手法が載荷板端部から破壊が発生し、次第に内部へと進展するのにに対し、RBSM では内部に破壊が発生

し、それが境界へと進展している。弾性状態の解析解では、載荷板端部に高い応力集中が発生することを考えると、本手法による破壊の進展の方がより自然な進展であると思われる。ただし、崩壊時のすべり線は同一であり、したがって、崩壊機構を形成した段階では、破壊境界辺で消散されるエネルギーが同一となるため、極限荷重については、両者の解が一致したものと考えられる。

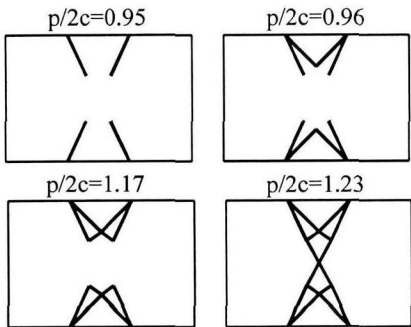


図 12 破壊の進展状況（本手法）

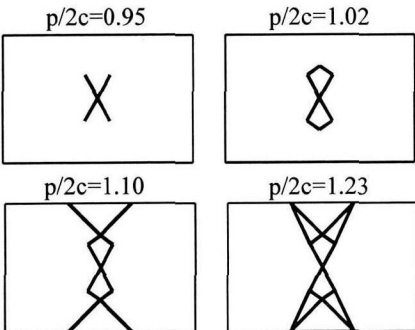


図 13 破壊の進展状況（RBSM）

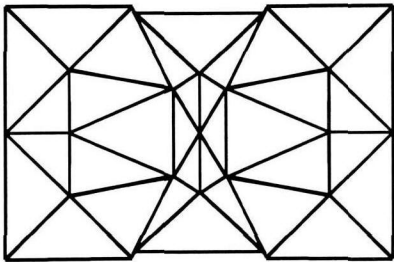


図 14 本手法による崩壊時の変位モード

図 14 は、本手法による、崩壊時の変位モードを示した図である。RBSM のような要素の重なり合いは見られず、また、すべり面上で変位の不連続性も表現されている。

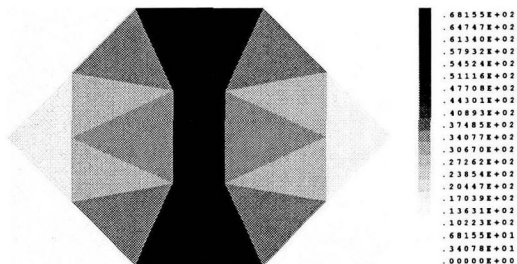


図 15 崩壊時の要素内応力（VonMises の応力）

図 15 は、崩壊時の各要素における VonMises の応力を表わした図である。本解析では、崩壊荷重を効率よく求めることに主眼をおいているため、要素分割が粗く、詳細な応力分布は分からないが、領域中央の破壊近傍において、高い応力が発生している様子が伺える。

7. まとめ

本論文では、要素境界面上の表面力を扱うとができるハイブリッド型変位モデルの考え方に着目して、Lagrange の未定乗数に RBSM のばの考え方を導入し、ばね定数としてペナルティを用いて要素境界辺上での変位の連続性を近似的に導入した新しい離散化モデルを開発した。

本モデルでは、要素内の変位場を任意点の変位とひずみにより表しているため、要素内ひずみや応力を扱うことができる。はじめに、弾性解の精度を検証するため、解析解と比較検討したところ、ペナルティを弾性係数の 10^3 倍以上すると、変位、応力ともに、解析解との誤差は 0.1% 以内に収まった。本手法の開発目的は、弾性解析ではないが、本モデルは十分な精度を有しており、この種の問題に対しても適用可能であると考ええる。

また、本モデルでは、要素境界面で表面力の連続性が保たれており、ペナルティに RBSM による離散化極限解析の概念を適用することで、要素変形を考慮した離散化極限解析を行うことができる。簡単なボンチの押し込み問題で極限荷重を求めてみたところ、RBSM と同じ荷重が得られ、理論解とは 1% 以下の誤差であった。一方、破壊の進展は応力の高いところから発生し、RBSM と比較してより現実的な進展となった。以上のことから、本手法は、RBSM と同程度の精度で崩壊荷重を求めることができ、また、進行型破壊に対する離散化解析が可能であると考ええる。

本モデルでは、要素内変位場を各要素独立に仮定しており、任意形状の要素を用いることができる。また、3次元化も容易に行うことができる。今後、この利点を生かすことで、ボクセル解析への適用や、ポロノイ分割を用いた進行型破壊解析への応用などが可能になるものと考ええる。また、本手法は表面力の連続性と崩壊機構条件を満たしているため、RBSM と同様に、極限解析でいうところの上界値を与える。一方、要素内応力を用いて塑性条件を満たすようにすると下界値の検討が可能になるものと思う。

謝辞

本研究の概念は佐々木猛氏（鹿島建設）との議論から生まれたものです。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

1) T. Kawai : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.141,

- pp187-193, 1977
- 2)竹内則雄, 川井忠彦: 新離散化極限解析の誤差評価について, 日本鋼構造境界第15回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, pp89-94, 1981
 - 3)竹内則雄, 武田洋, 佐藤一雄: 有限体積法を基にした引張破壊に対する非線形解析法, 土木学会構造工学論文集, Vol.45A, pp255-262, 1999
 - 4)新津貴男, 佐藤一雄, 武田洋: 有限体積法による進行型破壊現象の解析, 日本計算工学会計算工学講演会論文集, Vol.3, No.3, pp875-878, 1998
 - 5)K.Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975
 - 6)鷺津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972
 - 7)Y.Yamada, N.Yoshimura and T.Sakurai: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol.10, pp323-354, 1968
 - 8)竹内則雄: 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991
 - 9)川井忠彦編: 物理モデルによる連続体力学諸問題の解析, 「生研セミナーテキスト」生産技術研究奨励会, 1979
 - 10)G.H.Shi and R.E.Goodman: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, Int. J. Numerical and Analytical Method in Geomechanics, Vol.13, pp359-380, 1989
 - 11)佐々木猛, 大西有三, 吉中龍之進: 不連続変形法(DDA)とその岩盤工学への適用に関する研究, 土木学会論文集, No.493/III-27, pp.11~20, 1994
 - 12)川井忠彦, 竹内則雄: 離散化極限解析プログラミング, 培風館, 1990

(1999年9月17日受付)