

固有値解析を必要としない 大規模非線形構造系の分岐座屈モードの求め方

Eigenanalysis NOT Required to Compute the Buckling Mode for Large-Scale Nonlinear Structures

藤井文夫*, 野口裕久**
Fumio Fujii and Hirohisa Noguchi

*Dr.-Ing., 岐阜大学工学部 (〒501-1193 岐阜市柳戸, fmfj@cc.gifu-u.ac.jp)

**工博, 慶應義塾大学理工学部 (〒223-8522 横浜市北区日吉, noguchi@sd.keio.ac.jp)

In practice of large-scale buckling analysis involving more than 10,000 dofs, it is hardly possible to carry out the eigenanalysis due to slow convergence or unstable iteration of subspace method to compute the buckling mode, which is an indispensable information for branch-switching at bifurcation points. The present study proposes an alternative procedure to abstract the critical eigenvector from the LDL^T -decomposed stiffness matrix without eigenanalysis. The computational cost for the eigenvector is practically negligible, because the LDL^T -decomposition of the stiffness matrix will be frequently repeated during tracing the equilibrium path and the buckling mode may be computed from the LDL^T -decomposed stiffness matrix without extra computational costs in nonlinear analysis. Numerical examples are computed to show that the proposed idea works well.

Key Words: Buckling Mode, LDL^T -decomposition, Stiffness Matrix, 2D Frame, Cylindrical Shell

1. はじめに

非線形座屈解析においては座屈モードを求めるために、一般に固有値解析が必要とされるが、この座屈モードの計算は数万自由度以上の大規模系においては、ひとつのボトルネックとされてきた。大規模系の場合でも剛性方程式の解法のみを必要とする平衡路の追跡は、たとえ計算負荷は増大しても、計算機機能が向上した今日ではハードウェア的にも十分に実行可能の状況にある。しかし平衡路の途中で出現する分岐点での座屈モードの評価にあたっては、剛性方程式の解法に加えて剛性行列の固有ベクトルの計算を必要とする。このため例えばサブスペース法で良好な収束、または実用計算の範囲内で信頼性ある結果を期待できるのは高々数千自由度が限界であると考えられている。

一方、大規模系の固有値解析の手段として、Jacobi-Davidson 法^[1,2]、共役こう配法と関連づけた手法^[3,4]、不完全ランチョス法^[5]、同時逆べき乗法 (Rutishauser 法)^[6]などが可能であるが、これらはいずれも大規模系の固有値解析をただ単一回実行するだけですべて終わりとする状況のなかでは確かに有用である。しかし大規模系の非線形座屈解析では剛性方程式の解法を繰り返しながら、非

線形応答を弧長制御法で追跡すること自体すでに相当の計算負荷を伴うため、それ以上の余力のない状況のなかにある。このような状況のなかで、固有値解析を必要に応じて繰り返し行う操作は実質不可能となる。

したがって大規模系の非線形座屈解析においては、座屈モードを固有値解析に頼らずに、弧長法との関連から精度良く求めることのできる計算手法が望まれている。

荷重極限点での飛び移り座屈モードは、平衡路の接線変位予測子に一致し、これは弧長制御法の手続きのなかで得られる情報なので、特に固有値解析を必要としないことは明白である。しかし分岐点については分岐経路への切り替え手続きのためにも不可欠となる座屈モードは、固有値解析なしでは取り出せないとこれまで信じられてきた。

野口・久田^[7]は、弧長制御法のつり合い反復過程のなかで、特異点近傍における非平衡力に対する変位修正子が、収束点直前で分岐座屈モードに近似することに注目し、これを scaled corrector として発表している。その後 scaled corrector は経路切り替え手続きにはもちろんのこと、数千自由度の座屈問題の単純分岐点・多重分岐点のピンポイントの際の固有ベクトルの良質な初期値としても活用され

てきている^[8,14]. scaled corrector は言わば、それまで見捨てられてきた情報（つり合い反復計算の収束直前の微小な変位修正子）の中から、工学的に貴重な座屈モードを付加的な計算を全く必要とせずに抽出できることを示したものである。

そして最近、同様な発想から分岐座屈モードに関する情報が剛性行列 K の LDL^T 分解のなかからも抽出できることが判明したので^[9]本論文で詳細に報告する。

2. つり合い方程式と剛性方程式

非線形つり合い方程式を、

$$E = 0 \quad (2.1)$$

とする。ただしここで、

$$E = R - pe \quad (2.2)$$

であり、 R : 変形に依存した内力、 p : 荷重変数、そして e : 荷重モードである。式 (2.1) で定義される平衡路を、弧長制御法で追跡する手続きの予測子計算では、 K を対称な（接線）剛性行列として、式 (2.1) を線形化した剛性方程式

$$Kdu - dpe = 0 \quad (2.3)$$

を解き、変位予測子を

$$du = dp u_0 \quad (2.4)$$

とする。ここに

$$u_0 = +K^{-1}e \quad (\text{平衡点にて}) \quad (2.5)$$

であり、ここからは剛性行列の正則性を仮定する。荷重予測子 dp は、別途導入される弧長制御式により決められる。また修正子計算では、さらにつぎのような剛性方程式の解法を必要とし、

$$K\delta u - \delta pe = -E \quad (2.6)$$

変位修正子を

$$\delta u = \delta u_E + \delta p u_0 \quad (2.7)$$

とする。ここに $(u_0, \delta u_E)$ は変位ベクトルの増分であり、

$$u_0 = +K^{-1}e \quad (\text{非平衡点にて}) \quad (2.8)$$

$$\delta u_E = -K^{-1}E \quad (2.9)$$

である。荷重修正子 δp は、別途導入される反復制御式により決められる。式 (2.5) と式 (2.8) はそれぞれ平衡点と非平衡点（反復点）で評価する。

以上が平衡路を追跡する際の手続きであるが、本論文では、以上の手続きだけで計算機能力のほぼ限界に達する計算負荷を「大規模」と呼ぶことにする。

3. 剛性行列の LDL^T 分解^[10,11]

剛性行列の LDL^T 分解は、剛性方程式 (2.5), (2.8) および (2.9) の解法手段の前処理として、つぎの式 (3.1) のように K を、単位下三角行列 L 、対角行列 D 、それに単位上三角行列 L^T の積に分解する操作である：

$$K = LDL^T \quad (3.1)$$

単位下三角行列 L の第 j 列を t_j とし、その列ベクトル成分のうち、ゼロ成分と非ゼロ成分の分布をそれぞれ、 と  とで示すとつぎのようになる。

$$t_j = \begin{pmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & 1 & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{pmatrix}^T \quad (3.2)$$

また K は、

$$K = [t_1, \dots, t_j, \dots, t_N] D [t_1, \dots, t_j, \dots, t_N]^T \quad (3.3)$$

とも書ける。さらに対角行列の成分を

$$D = \text{diag}[d_1, \dots, d_j, \dots, d_N] \quad (3.4)$$

として、剛性行列の行列式；

$$\det K = \det L \det D \det L^T \quad (3.5)$$

は、

$$\det L (= \det L^T) = 1.0 \quad (3.6)$$

および

$$\det D = \prod_{j=1}^N d_j \quad (3.7)$$

より

$$\det K = \prod_{j=1}^N d_j \quad (3.8)$$

となる。また

$$K^{-1} = (L^T)^{-1} D^{-1} L^{-1} \quad (3.9)$$

であり、 L^T の逆行列である単位上三角行列 $(L^T)^{-1}$ の第 j 列を s_j として

$$(L^T)^{-1} = [s_1, \dots, s_j, \dots, s_N] \quad (3.10)$$

とすれば、

$$K^{-1} = [s_1, \dots, s_j, \dots, s_N] D^{-1} [s_1, \dots, s_j, \dots, s_N]^T \quad (3.11)$$

とも表現できる。

ここで K がバンド構造であっても K^{-1} ではこのバンド構造が失われることに注意すべきである。またこのバンド構造により、単位下三角行列 L の左下半分もバンド構造を持つため、実際の非ゼロ成分の分布は式 (3.2) のようにはならないが、ここでの議論ではバンド構造を無視しても理論展開の一般性は損なわれない。また L のバンド構造の有無に関わらず単位上三角行列 $(L^T)^{-1}$ の右上半分には、非ゼロ成分が一般に密に分布する：

$$s_j = \begin{pmatrix} 1 & & j & & N \\ & & 1 & & \end{pmatrix}^T \quad (3.12)$$

4. 剛性行列の固有ペアの数理^[12]

固有ペア (λ, θ) は対称剛性行列 $\mathbf{K}$ (N 行 N 列) の標準固有値問題

$$\mathbf{K}\theta = \lambda\theta \quad (4.1)$$

または、

$$\theta^T \mathbf{K} = \lambda \theta^T \quad (4.2)$$

の解であり、固有ベクトル θ は常に正規化されているものとする。以下必要な場合のみ index j を付けて個々の固有ペアを区別する。例えば、

$$\theta^T \mathbf{K} \theta = \lambda \quad (4.3)$$

$$\mathbf{K}^{-1} \theta = \frac{1}{\lambda} \theta \quad (4.4)$$

$$\theta^T \mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \theta^T \quad (4.5)$$

あるいは、

$$\theta^T \mathbf{K}^{-1} \theta = \frac{1}{\lambda} \quad (4.6)$$

などはすべての固有ペア ($j=1-N$) について成立するため index j は付けない。逆に付ける場合はつぎのような場合である：

$$\theta_j^T \theta_k = \delta_{jk} \quad (4.7)$$

$$\theta_j^T \mathbf{K} \theta_k = \lambda_k \delta_{jk} \quad (4.8)$$

あるいは任意の非ゼロベクトル $\mathbf{x}$ を θ_j で表現する場合；

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N (\theta_j^T \mathbf{x}) \theta_j \quad (4.9)$$

である。 $\mathbf{K}$ のスペクトル分解を誘導するには、 $\mathbf{K}$ を列ごとにまとめて

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_k, \dots, \mathbf{k}_N] \quad (4.10)$$

として、代表的な第 k 列である $\mathbf{k}_k$ を式(4.9)を考慮して固有ベクトルで表現した

$$\mathbf{k}_k = \sum_{j=1}^N (\theta_j^T \mathbf{k}_k) \theta_j \quad (4.11)$$

を式(4.10)に代入して、総和記号を行列の外に出すと

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N [(\theta_j^T \mathbf{k}_k) \theta_j, \dots] \quad (4.12)$$

となる。さらに式(4.2)より

$$(\theta_j^T \mathbf{k}_k) = \lambda_j (\theta_j)_k \quad (4.13)$$

であるから

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N [\dots, \lambda_j (\theta_j)_k \theta_j, \dots] \quad (4.14)$$

となる。ここで $(\theta_j)_k$ は θ_j の第 k 番目のベクトル成分である。式(4.14)より最終的に

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (4.15)$$

となる。全く同様の手順で $\mathbf{K}^{-1}$ をその固有ペア $(1/\lambda, \theta)$ で展開した

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \theta_j \theta_j^T \quad (4.16)$$

も容易に誘導できる。

5. 剛性行列の合同変換と相似変換^[10, 11, 14]

剛性行列 $\mathbf{K}$ は単位上三角行列 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$ を用いた合同変換により、つぎのように対角化できる：

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{L}^T)^{-1} \quad (5.1)$$

このとき $\mathbf{D}$ と $\mathbf{K}$ は合同であると言われる。合同変換は、後述の式(5.9)の相似変換よりも条件の緩い自由な変換であり、変換行列 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$ の評価は単純な四則演算のみで可能であるため、計算負荷が比較的少なくて済む。しかし合同変換による対角化の結果、対角成分は必ずしも固有値であるとは限らない。またこの合同変換に対して不変である行列の特性数として階数と符号数 (Sylvester の慣性律) がある。一方、固有ベクトルを列にもつ正方行列 $\mathbf{H}$ ；

$$\mathbf{H} = [\theta_1, \dots, \theta_N] \quad (5.2)$$

および固有値を対角成分にもつ対角行列 Λ ：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

を用いて、式(4.1)をすべての固有ペアについてまとめると、

$$\mathbf{K}\mathbf{H} = \mathbf{H}\Lambda \quad (5.4)$$

となる。したがって

$$K = H \Lambda H^{-1} \quad (5.5)$$

または

$$\Lambda = H^{-1} K H \quad (5.6)$$

さらには H が直交行列であるから

$$H^{-1} = H^T \quad (5.7)$$

を考慮すると

$$K = H \Lambda H^T \quad (5.8)$$

および

$$\Lambda = H^T K H \quad (5.9)$$

が成立する。この相似変換の前後で不変な性質は階数と固有値である。式(5.8), (5.9)をそれぞれ

$$K = LDL^T \quad \text{再掲 (3.1)}$$

$$D = L^{-1} K (L^T)^{-1} \quad \text{再掲 (5.1)}$$

と比較するとき、 $\Lambda \Leftrightarrow D$, $H \Leftrightarrow (L^T)^{-1}$, $H^T \Leftrightarrow L^T$ と対応することがわかる。すなわち本論文では、これまでボトルネックであった相似変換 (K の固有値解析) を、より簡単な合同変換 (K の LDL^T 分解) で代用することを試みる。

ここまです基礎的事項のまとめとして、これ以降座屈モードの抽出を具体的に考える。まず scaled corrector を簡単にレビューして (第6章), その後, 第7章と第8章で, 式(3.10)で定義した $(L^T)^{-1}$ の列ベクトル s_j の基本的性質を調べる。

6. 座屈モードの抽出 (scaled corrector θ_{sc}) [7, 12]

θ_s を座屈モードにもつ分岐点近傍で $\lambda_s \rightarrow 0.0$ であるから, 式 (4.16) は十分な精度で,

$$K^{-1} \approx \frac{1}{\lambda_s} \theta_s \theta_s^T \quad (6.1)$$

と近似できる^[12]。これを式 (2.9) に代入して,

$$\delta u_E = - \left(\frac{\theta_s^T E}{\lambda_s} \right) \theta_s \quad (6.2)$$

となる。すなわち非平衡力に対する変位修正子 δu_E のモードは、特異点近傍では理論的にはゼロ固有値 λ_s に対応する固有モード θ_s に等しくなる。実際の計算では, 式(2.9)で δu_E を求めて,

$$\theta_s \approx \theta_{sc} = \frac{\delta u_E}{|\delta u_E|} \quad (6.3)$$

として, この θ_{sc} を scaled corrector と呼び^[7], 分岐座屈モードとして代用できる。その成立理由は近似式(6.1)にある。 θ_{sc} に対応する固有値 λ_{sc} が必要な場合には, 式(4.3)より,

$$\lambda_s \approx \lambda_{sc} = \theta_{sc}^T K \theta_{sc} \quad (6.4)$$

で求めることができる。

7. $(L^T)^{-1}$ の列ベクトル s_j

式(3.12)の s_j は, L^T の逆行列 $(L^T)^{-1}$ の第 j 列に等しく,

$$L^T s_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

を解けば, s_j は計算できる:

$$s_j = (L^T)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^T \quad (7.2)$$

式(7.1)で係数行列 L^T はすでに上三角化されているので s_j を求める際の計算労力は実質的に無視できる。

以下, (d_j, t_j, s_j) が満たす基本的な性質を調べる。なお固有ペアの場合と同様, index j を付けない場合はすべての (d, t, s) について成立する式である。必要な場合のみ index j を付けて個々の (d_j, t_j, s_j) を区別することにする。式 (5.1) より,

$$s^T K s = d \quad (7.3)$$

および,

$$K s = d t \quad (7.4)$$

が成立する。 K が正則行列の場合には, この式(7.4)より

$$K^{-1} t = \frac{1}{d} s \quad (7.5)$$

となる。さらに式(7.5)の両辺を転置して,

$$t^T K^{-1} = \frac{1}{d} s^T \quad (7.6)$$

を得る。さらに式(7.1)より (t_j, s_k) の間での直交関係,

$$t_j^T s_k = \delta_{jk} \quad (7.7)$$

が成立する. この直交関係を用いて任意のベクトル $\mathbf{x}$ を, $\mathbf{t}_j$ および $\mathbf{s}_j$ を基底ベクトルとして表現でき, それぞれ

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{s}_j^T \mathbf{x}) \mathbf{t}_j \quad (7.8)$$

および

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{t}_j^T \mathbf{x}) \mathbf{s}_j \quad (7.9)$$

が成立する. 式(4.2)の両辺に右から $\mathbf{s}$ をかけて, 式(7.4)を考慮すると,

$$d \theta^T \mathbf{t} = \lambda \theta^T \mathbf{s} \quad (7.10)$$

が導ける. つぎに式(4.10)の $\mathbf{K}$ の各列を今度は式(7.8)を用いて表現する:

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N [\dots, (\mathbf{s}_j^T \mathbf{k}_k) \mathbf{t}_j, \dots] \quad (7.11)$$

ここで式(7.4)の両辺を転置した結果から,

$$(\mathbf{s}_j^T \mathbf{k}_k) = d_j (\mathbf{t}_j)_k \quad (7.12)$$

である. ここで $(\mathbf{t}_j)_k$ は $\mathbf{t}_j$ の第 k 番目のベクトル成分である. この式(7.12)を式(7.11)に代入して,

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N [\dots, d_j (\mathbf{t}_j)_k \mathbf{t}_j, \dots] \quad (7.13)$$

すなわち,

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N d_j \mathbf{t}_j \mathbf{t}_j^T \quad (7.14)$$

が成立する.

全く同様の誘導過程を経て, $\mathbf{K}'$ を $(d_j, \mathbf{s}_j)$ で展開することもできる:

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{d_j} \mathbf{s}_j \mathbf{s}_j^T \quad (7.15)$$

以上, $(d, \mathbf{t}, \mathbf{s})$ の基本的性質を調べたが, この第7章の多くの式が, 固有ペアの式(第4章)と同じ形式で書けることがわかる.

8. 座屈モードの抽出 (θ_{LDLT} モード)

Sylvester の慣性則^[10,11]より, 特異点での固有値の符号変化に呼応して対角成分の符号も変化する. $\lambda_s \rightarrow 0.0$ (第6章) となる分岐点近傍で $d_m \rightarrow 0.0$ とすると, 式(6.1)

と同様の理由で式(7.15)は十分な精度で

$$\mathbf{K}^{-1} \approx \frac{1}{d_m} \mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T \quad (8.1)$$

と近似できる. したがって, 式(6.1)と式(8.1)より

$$\frac{1}{\lambda_s} \theta_s \theta_s^T \approx \frac{1}{d_m} \mathbf{s}_m \mathbf{s}_m^T \quad (8.2)$$

この両辺に右から $\mathbf{t}_m$ をかけて, 式(7.10)と式(7.7)を考慮すると,

$$(\theta_s^T \mathbf{s}_m) \theta_s = \mathbf{s}_m \quad (8.3)$$

この式(8.3)の両辺に左から $\mathbf{s}_m^T$ をかけて,

$$(\theta_s^T \mathbf{s}_m)^2 = |\mathbf{s}_m|^2 \quad (8.4)$$

を得る. ここで

$$|\mathbf{s}_m| \neq 0.0 \quad (8.5)$$

であるから,

$$\theta_s^T \mathbf{s}_m = 0.0 \quad (8.6)$$

したがって式(8.3)より θ_s と $\mathbf{s}_m$ とは同一モードであることがわかる:

$$\theta_s = \left(\frac{1}{\theta_s^T \mathbf{s}_m} \right) \mathbf{s}_m \quad (8.7)$$

以上が理論的背景であるが, 実際の計算では式(7.1) ($j=m$)で $\mathbf{s}_m$ を求めて,

$$\theta_s = \theta_{LDLT} = \frac{\mathbf{s}_m}{|\mathbf{s}_m|} \quad (8.8)$$

とする. これが本論文で提案する座屈モードの θ_{LDLT} である. また対応する固有値 λ_{LDLT} は, 式(4.3)に式(7.3)と式(8.8)とを代入して,

$$\lambda_s = \lambda_{LDLT} = \frac{d_m}{|\mathbf{s}_m|^2} \quad (8.9)$$

と求まる. それぞれ式(8.8)と式(8.9)の右辺で必要とされる情報はすべて剛性行列の $\mathbf{LDL}^T$ 分解から得られる.

9. 単純特異点の場合 (全体座屈) の考察

式(3.12)において $j = m$ とすると, $\mathbf{s}_m$ の非ゼロ成分の分布は一般につぎようになる.

$$\mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} 1 & m & N \\ & 1 & \end{pmatrix}^T \quad (9.1)$$

一方固有ベクトル θ_s が、第一成分から第 N 成分まで非ゼロ成分が一様に分布するような座屈モード（全体座屈モード）の場合、

$$\theta_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \end{pmatrix}^T \quad (9.2)$$

であるから、必要条件として

$$m = N \quad (9.3)$$

が成立し、単純特異点（全体座屈）では通常 $d_N \rightarrow 0.0$ となることが実際の計算でも確認できる（全体座屈なら、確かに $m = N$ であるが、逆に $m = N$ であるからと言って常に全体座屈であるとは限らない。第11章参照）。

座屈固有ベクトル θ_s の固有値 λ_s が $(+) \rightarrow 0.0 \rightarrow (-)$ と変化する方向に平衡路をトレースする場合、この特異点を通る直前と直後で s_N は θ_s と同一モードであるため、式 (8.9) ($m=N$) から明らかなように、 d_N の値の変化挙動は、固有値 λ_s の挙動にすり寄り、 d_N も $(+) \rightarrow 0.0 \rightarrow (-)$ と連続的に変化して特異点を通ることがわかる。以上が全体座屈モードを示す個々の特異点近傍における考察である。

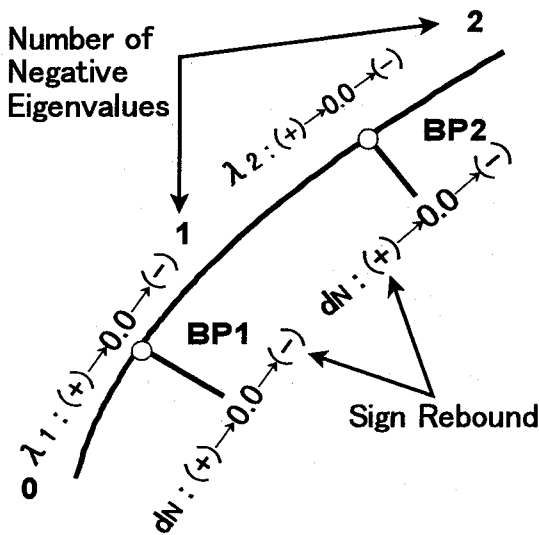


図1 対角成分の符号変化

つぎに平衡路に複数個の特異点が相次いで出現する場合を考えてみる。図1ではそれぞれ異なる固有値 (λ_1, λ_2) がゼロとなる分岐点 (BP1, BP2) を経る度に、負の固有値の個数が $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ と変化する場合を示す。式 (8.7) より s_N のモードは各分岐点でクリティカルな固有モード (θ_1, θ_2) と一致し、式 (8.9) より d_N もそれぞれクリティカルな固有値 (λ_1, λ_2) と同じ方向に、 $(+) \rightarrow 0.0 \rightarrow (-)$ と符号が変化する。最初の分岐点 (BP1) で d_N が λ_1 と同じく $(+) \rightarrow 0.0 \rightarrow (-)$ と連続的に変化した後、さらにつぎの分岐点 (BP2) では、今度は λ_2 と同様に $(+) \rightarrow 0.0 \rightarrow (-)$ と変化するためには、BP1 と BP2 の間（正則平衡点）で、 d_N の値がゼロ値を経由することなく不連続的に $(-) \rightarrow (+)$ と符号変化することが必要となる。実際の計算でも対角

成分のこの符号のリバウンドは確認でき、特異点を経なくとも負の対角成分の成分番号は頻繁に変化する。しかし d_N が不連続的に $(-) \rightarrow (+)$ と符号変化する瞬間には、 d_N 以外のある対角成分が反対方向に $(+) \rightarrow (-)$ と、これも不連続的に符号リバウンドを起こして、結果的には2個の特異点に挟まれた区間では、負の対角成分の個数は一定である状態が保たれていることが実際の計算のなかでも観察される。

つぎに特異点の遠方より予測した座屈モードを考察する。単純特異点より遠く離れた正則平衡点においては、式 (7.15) の右辺における支配的な項を、 θ_s を含む複数本の固有ベクトル ($\dots, \theta_{s-1}, \theta_s, \theta_{s+1}, \dots$) の関連項であるとすると、

$$K^{-1} = \frac{1}{\lambda_s} \left\{ \dots + \frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}} \theta_{s-1} \theta_{s-1}^T + \theta_s \theta_s^T + \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}} \theta_{s+1} \theta_{s+1}^T + \dots \right\} \quad (9.4)$$

となる。一方、式 (7.5) より s_N は K^{-1} の第 N 列のモードに等しいことがわかるので、

$$\begin{aligned} s_N &= d_N (K^{-1} \text{の第} N \text{列}) \\ &= \frac{d_N}{\lambda_s} \left\{ \dots + \frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}} (\theta_{s-1})_N \theta_{s-1} + \right. \\ &\quad \left. (\theta_s)_N \theta_s + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}} (\theta_{s+1})_N \theta_{s+1} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (9.5)$$

ここで例えば、 $(\theta_{s+1})_N$ は、固有ベクトル θ_{s+1} の第 N 番目のベクトル成分を意味する。平衡路に沿って固有モードが大きく変動しない限り、各固有モードの第 N 成分はほぼ一定である。したがって $\lambda_s \rightarrow 0.0$ となるにつれ、 θ_s 以外の固有モードの重みが安定的にゼロに一樣収束を開始する場合には、遠方からでも座屈モードを予見できることを計算例題（図3）で示す。

10. 多重特異点の場合（全体座屈）の考察

例えば2本の固有ベクトル (θ_{s1}, θ_{s2}) がクリティカルとなる多重分岐点（この場合は2重分岐点）の近傍で、

$$K^{-1} = \frac{1}{\lambda_{s1}} \theta_{s1} \theta_{s1}^T + \frac{1}{\lambda_{s2}} \theta_{s2} \theta_{s2}^T \quad (10.1)$$

が成立し、 K^{-1} の各列は (θ_{s1}, θ_{s2}) の線形結合となる。したがって K^{-1} の異なる2本の列を取り出せば基本的には座屈モードは抽出できることになる。一方2個の固有値 ($\lambda_{s1}, \lambda_{s2}$) に対応して、多重分岐点でゼロとなる2個の対角成分を (d_{m1}, d_{m2}) とすると、これまでの同様の手順で多重分岐点近傍で

$$K^{-1} = \frac{1}{d_{m1}} \mathbf{s}_{m1} \mathbf{s}_{m1}^T + \frac{1}{d_{m2}} \mathbf{s}_{m2} \mathbf{s}_{m2}^T \quad (10.2)$$

が成立する。式 (9.2) のような全体座屈モードの場合には、式 (10.2) の右边が一般に密行列であるためには $m1$ 、または $m2$ が N に等しいことが必要条件となる。仮に

$$m2 = N \quad (10.4)$$

とすると単純特異点の場合と同様、 $\mathbf{s}_{m2} = \mathbf{s}_N$ は、式 (7.5) より K' の第 N 列のモードに等しくなる。つぎに $\mathbf{s}_{m1} \mathbf{s}_{m1}^T$ は K' の第 1 行 (列) から第 $m1$ 行 (列) までの対角ブロックのなかの非ゼロ成分の分布を生み、第 $(m1+1)$ 行 (列) から第 N 行 (列) に収まる非ゼロ成分は $\mathbf{s}_{m2} \mathbf{s}_{m2}^T = \mathbf{s}_N \mathbf{s}_N^T$ が分担する。すなわち第 $(m1+1)$ 行 (列) から第 N 行 (列) までの行 (列) ベクトルがすべて $\mathbf{s}_{m2} = \mathbf{s}_N$ と平行となる。このことは、 $m1 \leq N-2$ の場合、 K' の任意の 2 列が (近似的に) 線形独立であるとする立場からは明らかに不合理である。この不合理を排除するためには

$$m1 = N-1 \quad (10.3)$$

であることが必要となる。したがって 2 重分岐点のとき、最後の相次ぐ 2 個の対角成分 (d_{N-1}, d_N) がゼロとなる。ただし対応する 2 つのモード ($\mathbf{s}_{N-1}, \mathbf{s}_N$) は互いに線形独立ではあるが、固有ベクトルの場合と異なり、互いに直交しているとは限らない。多重分岐の計算例題も後で示す (図 4)。

11. 局部座屈 (単純・多重分岐) の場合の考察

第 9 章と第 10 章での議論を踏まえて局部座屈 (単純分岐・多重分岐) の場合のモード θ_{LDT} モードを考える。局部座屈モードを図化すると、一般に座屈波形は構造系の一部分のみに集中し、その他の部分は無変形の形態となる。モード形態は節点番号の付け方 (従って節点自由度番号の付け方) には依存せず、節点を全く任意に番号付けした場合にも、同一の局所モードが画像表示される。しかしこの種のモードのベクトル成分に注目すると、局所的なモード変形を表す非ゼロ成分と、無変形を表すゼロ成分の分布状況は節点番号の付け方に依存する。このためモード変形の局所性に関する情報を、図化せずに固有モードの数値情報のみから得るには、ベクトルのなかの非ゼロ成分 (集中変形) とゼロ成分 (無変形) の分布状況が、図化されたモードの局所性を反映するよう節点番号が準備されていなければならない。すなわちモード変形の局所性を反映して、モードベクトルの非ゼロ成分も相次いで密集して出現する必要がある。

したがってこれ以降の議論では、局所的な座屈変形が集中する個所の節点が、極端にランダムに飛ぶことなく連続的に番号付けされていることを前提とする。不自然

に付けられた節点番号からは、ベクトルのなかで非ゼロ成分とゼロ成分とが逸散した分布となるため、モード変形の局所性が読み取れないため、このような前提が必要となる。

局部座屈 (単純分岐) の場合：

$$\mathbf{s}_m = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ & \text{---} & \\ & & 1 \end{array} \right)^T \quad (11.1)$$

局部座屈 (多重分岐) の場合：

$$\mathbf{s}_{m1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ & \text{---} & \\ & & 1 \end{array} \right)^T \quad (11.2)$$

$$\mathbf{s}_{m2} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{array} \right)^T \quad (11.3)$$

すなわち、特異点で符号変化を伴う対角成分の成分番号 ($m, m1, m2$) をモニターするだけで (座屈モードを計算しなくとも)、局部座屈モードであるか、全体座屈モードであるかを予測できる (ただし局所的なモード変形が最後の方の節点番号をもつ節点の個所に集中する場合には、 $m=N$ でも局部座屈となる)。これも座屈モード θ_{LDT} の一つの特長である。

12. 計算例題

図 2 の例題は単純分岐問題のベンチモデルである Toggle Frame^[13] である。スパン $2L = 2 \times 238.56 \text{ cm}$ 、および ライズ $H = 38.6 \text{ cm}$ の両端端固定の山形はり (断面：伸び剛性 $EA = 8416 \text{ kN}$ 、曲げ剛性 $EI = 26574 \text{ kN cm}^2$) の中央断面に集中荷重が作用する。図 2 では主経路に沿う最初の 3 個の単純分岐点 (BP1, BP2, BP3) と荷重極限点 LP で、それぞれ実際に固有値解析で求めた座屈モードも示してある。

図 3 は無載荷無変形の原点より出発して、各荷重レベルでのつり合い点で求めた座屈モード θ_{LDT} (すなわち $\mathbf{s}_N$) の変化をプロットしたものである。特異点 (BP1, BP2, BP3, LP) の荷重レベル ($p=1.1138, 2.0448, 2.7036, 2.7050$) では、実際に固有値解析で求めた固有ベクトルを明示してある。原点において求めた $\mathbf{s}_N$ は、BP1 での座屈モードをすでに暗示するモードとなっており、さらに BP1 に近づくにつれ $\mathbf{s}_N$ がその座屈モードに漸近する様子がわかる。例えば 座屈荷重 $p=1.1138$ の約 70 % にすぎない荷重レベル $p=0.8000$ において、 $\mathbf{s}_N$ は BP1 での座屈モードに近似しており、このことから $\mathbf{s}_N$ が、特異点近傍のみならず遠方からでも座屈モードを予測していることがわかる。他の残りの 3 個の特異点 (BP2, BP3, LP) についても同様に座屈モードをよくモニターしている。また 2 個の特異点で挟まれた短い区間 (BP1-BP2, BP2-BP3, BP3-LP) では $\mathbf{s}_N$ が、通過した特異点の座屈モードから、つぎに控えている特異点での座屈モードに向かって急変する模様が興味深い。

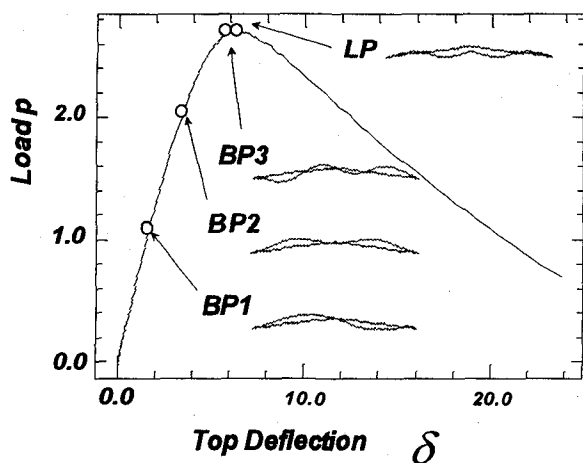
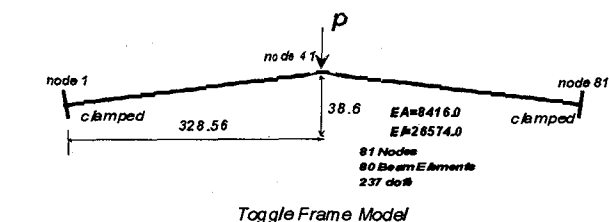


図2 Toggle Frame

つぎに軸方向に圧縮力を受ける円筒シェルの座屈モードを調べる(図4)。円断面の半径 $R=100$ cm, 長さ $L=71.9$ cm, 肉厚 $t=0.247$ cm, ヤング率 $E=567$ N/mm², ポアソン比 $\nu=0.3$ のモデルを設定し, その上端・下端部をまず完全固定とする。ただし上端部については, 軸方向の並進変位をすべて均一伸縮量 δ になるよう節点自由度を拘束して, 軸圧縮力を載荷する(座屈後, 線荷重分布は円周方向に沿って均一とはならない)。さらに提案手法が多重分岐問題にも対応できることを示すために変形の

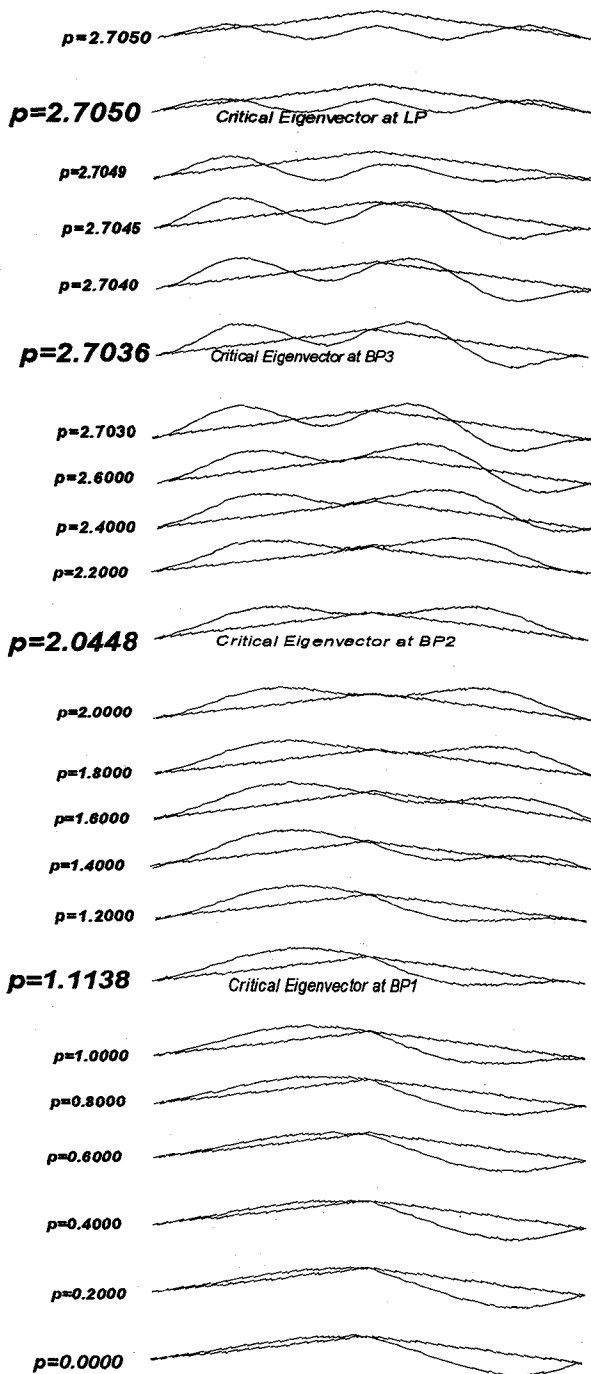
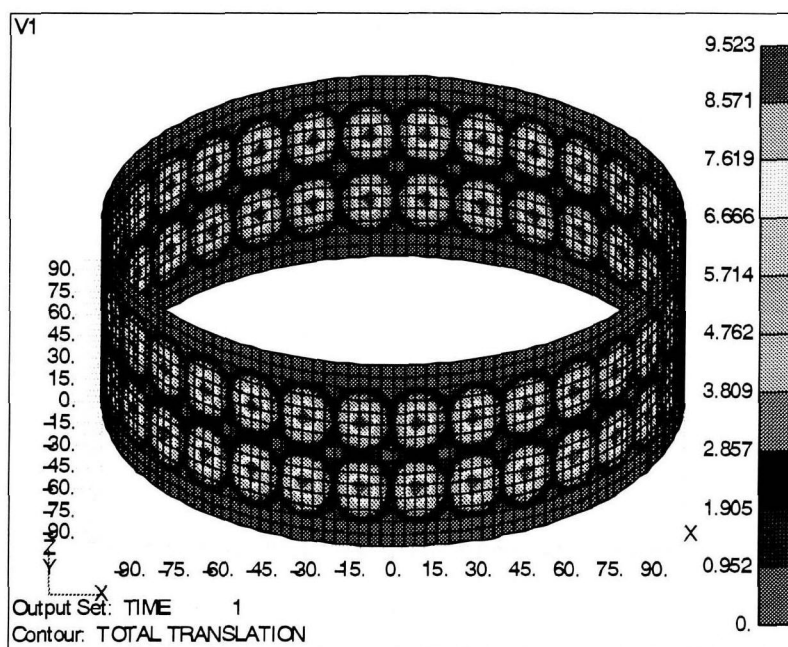
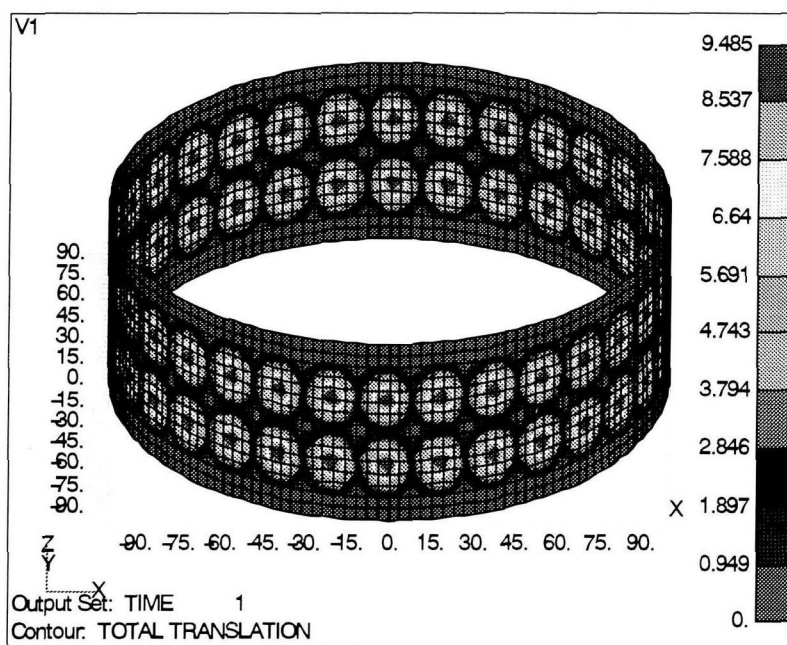


図3 モード S_N による座屈モードの遠方からの予測

対称性を考慮せずに, 全曲面をシェル要素で離散化し, 11360 自由度の計算モデルで非線形座屈解析を行った。図4は主経路上で最初に発生する多重分岐点で, 固有値解析を必要とせず求めた座屈モード(S_{N-1} , S_N)を示す。この多重分岐点では第10章での考察の通り, 最後の2個の対角成分(d_{N-1} , d_N)がゼロとなる。比較検証のため scaled corrector θ_{sc} も図5に示した。scaled corrector は2-3回のつり合い反復の結果として得られる副産物であり, もとより固有値解析を必要としない。



モード S_{N-1}



モード S_N

図4 多重分岐座屈モード S_{N-1} と S_N

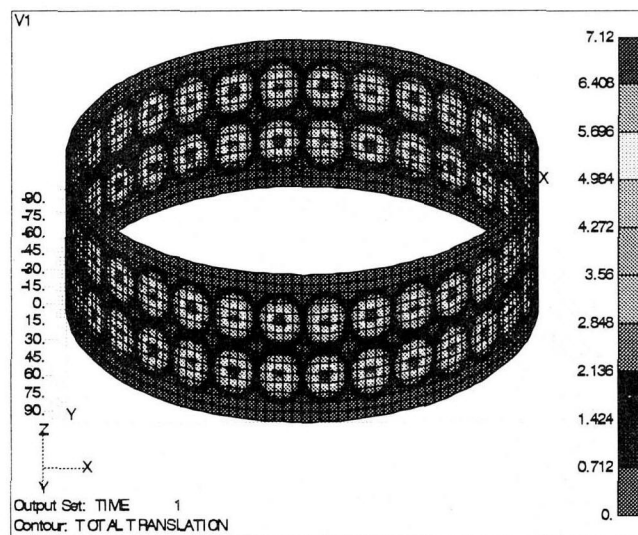


図5 Scaled Corrector θ_{sc}

図4と図5にあるこれらすべてのモードは 円周方向/長さ方向にそれぞれ、32 Buckles/2 Tiers の同一のモード (ダイヤモンドバックリング) であることを確認した。これにより必ずしも固有値解析を行わなくとも、大規模系の多重分岐座屈モードを容易に評価できることが示された。

13. まとめ

すでに提案されている scaled corrector θ_{sc} に加えて、本研究では剛性行列の LDL^T 分解情報から簡単に抽出できる座屈モード θ_{LDL} を提案し、その数理的背景を詳細に解説した。提案手法は特異点近傍ではもちろんのこと、特異点遠方からでも座屈モードを予見でき、しかも多重分岐点にも対応できる点が特長的である。

提案する座屈モードの抽出作業は、通常の剛性行列の LDL^T 分解に加えてわずかの作業を実施するだけであり、そのための付加的計算労力は実質的に無視できる。特異点近傍であれば固有値解析を全く必要とせずに、 LDL^T 分解による剛性方程式の解法が可能な限り、座屈モードを特別な手続きを必要とせずに容易に評価できるため、数万自由度以上の大規模系の座屈問題に特に有効である。

参考文献

- 1) Henk Van der Vorst (緒方秀教 訳) : 超大型固有値問題の解法, 応用数理, Vol.8, No.4, pp. 6-20, 1998.
- 2) 西田 晃 : 固有値解法の最近の進歩 : 計算工学, Vol. 4, NO. 1, pp. 21-27, 1999.
- 3) 平野菅保, 戸川隼人, 藤井 宏, 三好哲彦 : 計算技術および数値計算法, 培風館, 日本鋼構造協会編, コンピュータによる構造工学講座 II-1-A, 1970.
- 4) 柏木光博 : 共役勾配法による最大あるいは最小固有解の一算定法, 日本計算工学会論文集, Vol.1, pp.1-5, 1999.
- 5) 森正武, 名取亮, 鳥居達生 : 数値計算, 岩波書店, 岩波講座情報科学-18, 1982.
- 6) 村田健郎, 名取 亮, 唐木 幸比古 : 大型数値シミュレーション, 岩波書店, 1990.
- 7) 野口裕久, 久田俊明 : Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 58, pp. 2191-2198, 1992.
- 8) 岡澤重信, 藤井文夫, 野口裕久 : 修正剛性行列を用いた多重分岐点の安定化反復精算法, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp. 285-292, 1998.
- 9) 藤井文夫, 野口裕久 : 剛性行列の LDL^T 分解情報から得られる座屈モード, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, Vol. 4, No. 2, pp. 677-680, 1999.
- 10) ストラング, G. (井上 訳) : 線形代数とその応用, 産業図書, 昭和53年.
- 11) 伊里正夫, 阪田省二郎 : 応用数学 3 = マトリックス 培風館, 工学基礎講座3, 1982.
- 12) 藤井文夫, 岡澤重信 : 剛性行列の固有ペアの数理と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 299-310, 1997.
- 13) 藤井文夫, 岡澤重信 : 構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法, 機械学会論文集, 特集号「ハイパフォーマンス コンピューティング」, Vol. 62, No. 603, A., pp. 2448-2455, 1996.
- 14) Fujii, F., Ikeda, K., Noguchi, H. and Okazawa, S.: Modified Stiffness Iteration to Pinpoint Multiple Bifurcation Points, (forthcoming) Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000

(1999年9月17日受付)