

水中浮遊式トンネル解析における等価な弾性床上梁モデルについて

A beam model on elastic foundation for analysis of Submerged Floating Tunnels

佐藤太裕*, 蟹江俊仁**, 三上 隆***

Motohiro Sato, Shunji Kanie and Takashi Mikami

*修士(工), 北海道大学大学院, 工学研究科社会基盤工学専攻博士後期課程(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

**博士(工), 大成建設(株) エンジニアリング本部シニアエンジニア(〒160-0023 東京都新宿区西新宿1-25-1)

*** 工博 北海道大学大学院教授, 工学研究科社会基盤工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

The Submerged Floating Tunnel, "SFT", is a whole new type of strait crossings which is fixed in the water supported by the balance between buoyancy of the tunnel and mooring force of tension legs. The SFT is expected to be widely applicable for railway, roads, pedestrian walk and so on. The SFT can be regarded as a beam on discrete elastic supports. And if it is possible to replace the separate supports with a continuous elastic foundation in some cases, it is very effective for evaluating the basic characteristics. In this paper, we investigate the condition which the SFT can be considered a beam on elastic foundation.

Key Words: Submerged floating tunnel, beam on elastic supports, beam on elastic foundation, finite difference equation

キーワード: 水中浮遊式トンネル, 弾性支承上梁, 弾性床上梁, 差分方程式

1. はじめに

水中浮遊式トンネルは, 浮力を有するチューブ状のトンネル本体を, 係留索(テンションレグ)により海中に安定化させた新規渡海構造物であり, フィヨルドのような大水深域や, 橋梁, 橋脚などの海上・海中障害物を極力減らしたい海域での渡海手段として期待されている^{1), 2)}.

トンネル長さがトンネル径に比較して大きい場合には, 局部挙動は別として全体挙動の検討を行う際には梁理論の適用は非常に有効であると思われる. 水中トンネルは係留索をトンネル軸方向へ等間隔に配置した場合には, 弾性支承上梁とみることができ, さらに係留索剛性, 係留索配置間隔, トンネル本体の剛性などによって弾性床上梁にモデル化できるならば, 初期設計において基本的特性を評価する際に非常に有効であると考えられる.

沈下のみ弾性支承上梁について近似的に弾性床上梁とみなすことができる条件は Ellington³⁾により報告されている. しかし水中トンネルのように水平, 鉛直, 回転方向に復元力が生じ連成する構造物に対しても同様に考える場合は, 挙動を記述する微分方程式も連立方程式となるため新たにその条件を調べる必要がある.

本研究では係留索の配置により水平方向とトンネル軸方向回りの回転(ねじり)の運動が連成する場合において, 弾性床上梁とみなすことができる条件について検討を行うことを目的とする. まず第一に弾性支承上梁の差分方程

式^{4), 5)}とそれと等価な弾性床上梁の微分方程式の特性根を比較することにより行い, それがどのような諸元の組み合わせで可能となるか明らかにする. 第二に数値計算例を示し, 連成する等価な弾性床上梁の厳密解と, FEMにより弾性支承上梁として求めた解とを比較することにより弾性床上梁とみなすことのできる条件について数値的に検討を加える.

2. 解析モデルと支配方程式

解析に関しては次の仮定に従うものとする.

1. 係留索の取り付け間隔 h は一定である.
2. 係留索は一定の軸剛性のみを有するバネである.
3. 断面はトンネル軸方向に対して一定の中空円である.
4. トンネルの運動は, 曲げについては Bernoulli-Euler 梁理論に, ねじりについては St. Venant のねじり理論に基づくものとする.

図-1は解析モデルの断面図を, 図-2は側面図を示している. 1カ所の係留索は伸び剛性 $E_L A_L$, 長さ L_L の斜レグ4本からなり, トンネルについては断面半径を r , 肉厚を b とする. また係留索の傾角を α , トンネル本体への取り付け角度を β とする. なお本論文で取り扱う係留索の配置形状に対しては, 鉛直方向の運動は水平・回転の運動と独立に取り扱うことができ, 弾性床上梁とみなすことが

できる条件は文献3)と同様であるため、ここでは水平・回転の運動を対象とする。

2.1 弾性支承上梁の連立差分方程式とその特性根

(1) 水平方向変位に関する差分方程式

図-3は隣接する3点に作用する水平方向の力の状態を示したものであり、弾性支承上の格点 n に作用する係留索による復元力を N_n 、曲げモーメントを M_n とする。せん断力は格点間では一定であるので、点 $n-1$ と n の間のせん断力を $S_{n-1,n}$ 、点 n と $n+1$ の間のせん断力を $S_{n+1,n}$ とする。

N_n は係留索取り付け位置に作用する索張力をトンネル断面の重心に関する力に変換したもので、トンネル断面の水平方向変位 v_n 、ねじり角 θ_n を用いて次式で表される。

$$N_n = k_{vv}v_n + k_{v\theta}\theta_n \quad (1)$$

ここで

$$k_{vv} = \frac{4E_1A_1 \sin^2 \alpha}{L_1}, k_{v\theta} = -k_{vv}r \cos \beta \quad (2), (3)$$

次に隣接する3点 $n-1, n, n+1$ の間の2格間分の力のつり合いを考えると、

$$S_{n+1,n} - S_{n-1,n} - N_n = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_n - M_{n-1} &= S_{n-1,n}h \\ M_{n+1} - M_n &= S_{n+1,n}h \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)、(5)より

$$\Delta^2 M = M_{n+1} - 2M_n + M_{n-1} = N_n h \quad (6)$$

ここで Δ は差分演算子を表し、高階差分の定義から

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n \quad (7a)$$

$$\Delta^2 f_n = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1} \quad (7b)$$

$$\Delta^3 f_n = f_{n+2} - 3f_{n+1} + 3f_n - f_{n-1} \quad (7c)$$

$$\Delta^4 f_n = f_{n+2} - 4f_{n+1} + 6f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2} \quad (7d)$$

と表される。

また水平方向変位の階差式は次式で表される⁵⁾。

$$\Delta^2 v_n = -\frac{h^2}{6EI} (M_{n+1} + 4M_n + M_{n-1}) \quad (8)$$

ただし EI はトンネルの曲げ剛性である。

式(8)の両辺をさらに2階差分の操作を行い、式(6)と式(7b)を用いれば、最終的に弾性支承上の点 n にお

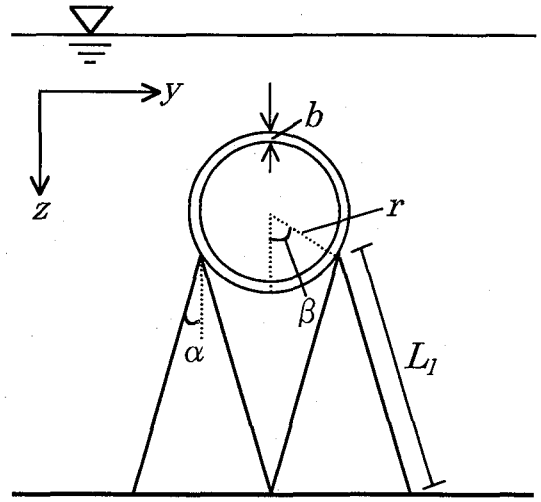


図-1 解析モデルの断面図

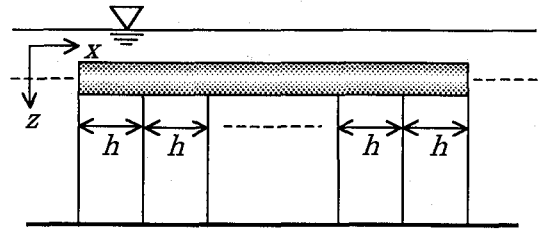


図-2 解析モデルの側面図

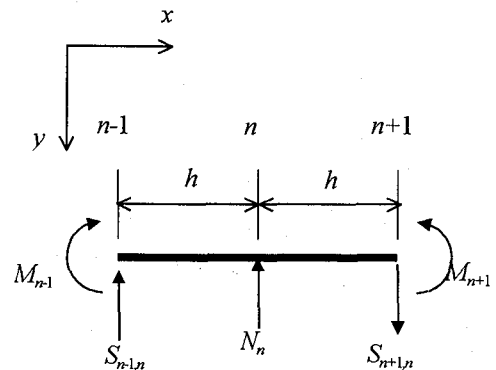


図-3 隣接する3点に作用する水平方向の力

ける水平方向の差分方程式は次式となる。

$$\Delta^4 v_n + K_1 \Delta^2 v_n + 6K_1 v_n + K_2 \Delta^2 \theta_n + 6K_2 \theta_n = 0 \quad (9)$$

ここで K_1, K_2 は次式で与えられる。

$$K_1 = \frac{k_{vv}h^3}{6EI}, K_2 = \frac{k_{v\theta}h^3}{6EI} \quad (10)$$

(2) ねじりに関する差分方程式

図-4は隣接する3点に作用する x 軸回りのねじりモーメントの状態を示したものであり、点 n に作用する係留索によるねじり方向の復元力を N_{θ_n} 、 x 軸回りのねじりモーメントを Mx_n とする。

N_{θ_n} は式 (1) の N_n と同様な考えにより求められるもので、次式で与えられる。

$$N_{\theta_n} = k_{\theta v} v_n + k_{\theta \theta} \theta_n \quad (11)$$

ここで

$$\begin{aligned} k_{\theta v} &= k_{\theta v} = -k_{vv} r \cos \beta \\ k_{\theta \theta} &= k_{vv} r^2 \left(\cos^2 \beta + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \beta \right) \end{aligned} \quad (12)$$

隣接する3点 $n-1, n, n+1$ の間の2格間分の x 軸回りのねじりモーメントのつり合いを考えると次式となる。

$$Mx_{n-1,n} + Mx_{n+1,n} - N_{\theta_n} = 0 \quad (13)$$

ここで点 $n-1, n+1$ でのねじりモーメントは次式で表される。

$$\begin{aligned} Mx_{n-1,n} &= -Mx_{n,n-1} = \frac{GJ}{h} (\theta_{n-1} - \theta_n) \\ Mx_{n+1,n} &= -Mx_{n,n+1} = \frac{GJ}{h} (-\theta_n + \theta_{n+1}) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし GJ はトンネルのねじり剛性である。

式 (11), (14) を式 (13) に代入し、式 (7) を用いて整理すると最終的に弾性支承上の点 n におけるねじりに関する差分方程式は次式となる。

$$\Delta^2 \theta_n - 6K_3 v_n - 6K_4 \theta_n = 0 \quad (15)$$

ここで K_3, K_4 は次式で与えられる。

$$K_3 = \frac{k_{v\theta} h}{6GJ}, \quad K_4 = \frac{k_{\theta\theta} h}{6GJ} \quad (16)$$

(3) 連立差分方程式の特性方程式と特性根

式 (9) と (15) は v_n と θ_n に関する定数係数線形連立差分方程式である。次にこの連立差分方程式の特性方程式と特性根を求める。

解の形を次式で仮定する。

$$v_n = A \exp(\phi_D n) \quad (17)$$

$$\theta_n = B \exp(\phi_D n) \quad (18)$$

ここで A, B は n によらない任意定数である。

上式と高階差分の定義 (7) より、例えば式 (9) に現

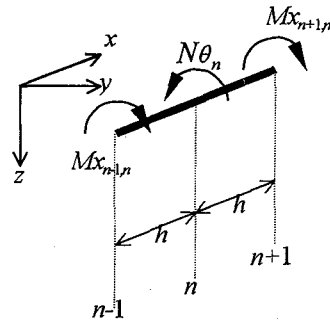


図-4 隣接する3点に作用する x 軸回りのねじりモーメント
(回転の正方向は右ネジの法則に従う)

れる第4次差分は

$$\Delta^4 v_n = (\exp(\frac{\phi_D}{2}) - \exp(-\frac{\phi_D}{2}))^4 A \exp(\phi_D n) \quad (19)$$

および式 (15) に現れる第2次差分は

$$\Delta^2 \theta_n = (\exp(\frac{\phi_D}{2}) - \exp(-\frac{\phi_D}{2}))^2 B \exp(\phi_D n) \quad (20)$$

と変形することができる。式 (19), (20) 中について

$$(\exp(\frac{\phi_D}{2}) - \exp(-\frac{\phi_D}{2}))^2 = 2(\cosh \phi_D - 1) = X_D \quad (21)$$

とおき式 (9) と (15) にそれぞれ代入すると次の定数 A と B に関する2つの式が得られる。

$$(X_D^2 + K_1 X_D + 6K_1)A + (K_2 X_D + 6K_2)B = 0 \quad (22)$$

$$-6K_3 A + (X_D - 6K_4)B = 0 \quad (23)$$

したがって上式より X_D に関する次の3次の特性方程式が得られる。

$$\begin{aligned} X_D^3 + (K_1 - 6K_4)X_D^2 + 6\{K_1 - (K_1 K_4 - K_2 K_3)\}X_D \\ - 36(K_1 K_4 - K_2 K_3) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) の解のうち、弾性床土梁として扱うことのできる解は 2.2(2)において後述するように実数解1つ、虚数解2つの場合である。

式 (24) を解き、式 (21) に留意すれば解は次式で与えられる。

$$\cosh \phi_D = \lambda', \quad \alpha' \pm i\beta' \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (25)$$

ここで、 $\lambda', \alpha', \beta'$ は3次方程式の係数で表される。

式 (25) より連立差分方程式 (9) と (15) の特性根 ϕ_D は次式となる。

$$\phi_D = \pm \lambda_D, \quad \pm (\alpha_D \pm i\beta_D) \quad (26)$$

ここで

$$\lambda_D = \log(\lambda' + \sqrt{\lambda'^2 - 1}) \quad (27)$$

$$\cosh \alpha_D \cos \beta_D = \alpha', \quad \sinh \alpha_D \sin \beta_D = \beta' \quad (28)$$

であり、式 (28) より α_D , β_D はそれぞれ次式となる。

$$\alpha_D = \cosh^{-1} \frac{\sqrt{(\alpha'+1)^2 + \beta'^2} + \sqrt{(\alpha'-1)^2 + \beta'^2}}{2} \quad (29)$$

$$\beta_D = \cos^{-1} \frac{\sqrt{(\alpha'+1)^2 + \beta'^2} - \sqrt{(\alpha'-1)^2 + \beta'^2}}{2} \quad (30)$$

以上より格点 n におけるたわみ v_n とねじり角 θ_n はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} v_n = & A_1 e^{\lambda_D n} + A_2 e^{-\lambda_D n} \\ & + e^{\alpha_D n} (A_3 \cos \beta_D n + A_4 \sin \beta_D n) \\ & + e^{-\alpha_D n} (A_5 \cos \beta_D n + A_6 \sin \beta_D n) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \theta_n = & B_1 e^{\lambda_D n} + B_2 e^{-\lambda_D n} \\ & + e^{\alpha_D n} (B_3 \cos \beta_D n + B_4 \sin \beta_D n) \\ & + e^{-\alpha_D n} (B_5 \cos \beta_D n + B_6 \sin \beta_D n) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで $A_1 \sim A_6$, $B_1 \sim B_6$ は n によらない任意定数である。

2.2 弾性床上梁の微分方程式とその特性根

(1) 水平・ねじり方向の連立微分方程式

トンネル断面重心の水平方向変位を v , ねじり角を θ とし、係留索の影響を等価な弾性床上ばねで表せば、トンネル本体の曲げ、ねじりによるひずみエネルギー U_1 , および弾性床上ばねによるひずみエネルギー U_2 はそれぞれ次式で与えられる。

$$U_1 = \int \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \int \frac{GJ}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (33)$$

$$\begin{aligned} U_2 = & \frac{1}{2} \int k'_{vv} (v - r \cos \beta \cdot \theta)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int k'_{ww} r^2 \sin^2 \beta \cdot \theta^2 dx \end{aligned} \quad (34)$$

ここで U_2 に現れる k'_{vv} は水平方向地盤係数に相当するもの、 k'_{ww} は鉛直方向地盤係数に相当するものであり、弾性支承上梁と等価な弾性床上梁を考えた場合、係留索の取り付け間隔 h を用いて次式で表すことができる。

$$k'_{vv} = \frac{k_{vv}}{h}, \quad k'_{ww} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} k'_{vv} \quad (35)$$

式 (33) , (34) に変分法⁶⁾ を適用すれば v と θ に関する以下の連立微分方程式が導かれる。

$$h^4 \frac{d^4 v}{dx^4} + 6K_1 v - 6K_1 r_C \theta = 0 \quad (36)$$

$$h^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 6a \frac{1}{h^2} K_1 r_C v - 6a \frac{1}{h^2} (K_1 r_C^2 + K_1^* r_S^2) \theta = 0 \quad (37)$$

ここで a , r_C , r_S , K_1^* はそれぞれ

$$a = \frac{EI}{GJ} \quad (38)$$

$$r_C = r \cos \beta, \quad r_S = r \sin \beta \quad (39)$$

$$K_1^* = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} K_1 \quad (40)$$

で表されるパラメータである。

(2) 連立微分方程式の特性方程式と特性根

式 (36) と (37) は v と θ に関する定数係数線形連立微分方程式である。次に **2.1 (3)** と同様にしてこの連立微分方程式の特性方程式と特性根を求める。

解の形を次式で仮定する。

$$v = A^* \exp(\phi_C x) \quad (41)$$

$$\theta = B^* \exp(\phi_C x) \quad (42)$$

ここで A^* , B^* は x によらない任意定数である。

上式を式 (36) と (37) にそれぞれ代入すると次の A^* と B^* に関する2つの式が得られる。

$$(X_C^2 + 6K_1)A^* - 6K_1 r_C B^* = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & 6a \frac{1}{h^2} K_1 r_C A^* \\ & + \{X_C - 6a \frac{1}{h^2} (K_1 r_C^2 + K_1^* r_S^2)\} B^* = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

ここで

$$X_C = h^2 \phi_C^2 \quad (45)$$

式 (43) , (44) より X_C に関する次の3次の特性方程式が得られる。

$$\begin{aligned} X_C^3 - \frac{6a(K_1 r_C^2 + K_1^* r_S^2)}{h^2} X_C^2 + 6K_1 X_C \\ - \frac{36aK_1 K_1^* r_S^2}{h^2} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

式 (46) の解は実数解1つと虚数解2つで (付録参照) 以下のように表される。

$$\phi_C = \pm \lambda_C, \pm (\alpha_C \pm i\beta_C) \quad (47)$$

ここで、

$$\alpha_C = R \cos \frac{1}{2}\gamma, \beta_C = R \sin \frac{1}{2}\gamma \quad (48)$$

であり、 R, γ は3次方程式の係数で表される。

以上より任意の点 x におけるたわみ $v(x)$, ねじり角 $\theta(x)$ はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} v(x) = & A_1^* e^{\lambda_C x} + A_2^* e^{-\lambda_C x} \\ & + e^{\alpha_C x} (A_3^* \cos \beta_C x + A_4^* \sin \beta_C x) \\ & + e^{-\alpha_C x} (A_5^* \cos \beta_C x + A_6^* \sin \beta_C x) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) = & B_1^* e^{\lambda_C x} + B_2^* e^{-\lambda_C x} \\ & + e^{\alpha_C x} (B_3^* \cos \beta_C x + B_4^* \sin \beta_C x) \\ & + e^{-\alpha_C x} (B_5^* \cos \beta_C x + B_6^* \sin \beta_C x) \end{aligned} \quad (50)$$

ここで $A_1^* \sim A_6^*, B_1^* \sim B_6^*$ は x によらない任意定数である。

2.3 等価な弾性床上梁に対する判定条件

次に 2.1 (3) と 2.2 (2) より求められた特性根を比較し、等価な弾性床上梁とみなすことができる条件について検討する。式 (31) と (49), 式 (32) と (50) はそれぞれ同じ形であるため特性根の比較のみにより判定が可能であると考えられる。よってここでは弾性支承上の梁を弾性床上の梁とみなすことができる条件として、虚数解については偏角と絶対値による、実数解についてはそのものの値による比較を行うこととする。差分方程式中の整数変数 n を連続的な変数 xh に置き換えられることに留意して考える。このとき虚数解の偏角については次式を満足しなければならない。

$$\tan^{-1} \frac{\beta_D/h}{\alpha_D/h} \cong \tan^{-1} \frac{\beta_C}{\alpha_C} \quad (51)$$

式 (48) を用いれば式 (51) は

$$\tan^{-1} \frac{\beta_D}{\alpha_D} \cong \tan^{-1} \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma} \quad (52)$$

になる。

虚数解の絶対値とその絶対値の比 P については次式を満足しなければならない。

$$\left(\frac{\alpha_D}{h}\right)^2 + \left(\frac{\beta_D}{h}\right)^2 \cong R^2 \quad \therefore P = \frac{\alpha_D^2 + \beta_D^2}{(hR)^2} \cong 1 \quad (53)$$

実数解については次式を満足しなければならない。

$$\frac{\lambda_D}{h} \cong \lambda_C \quad (54)$$

式 (52) ~ (54) を同時に満足する場合、式 (31) と (49), 式 (32) と (50) はそれぞれ一致した形となる。

3. 特性根の比較と考察

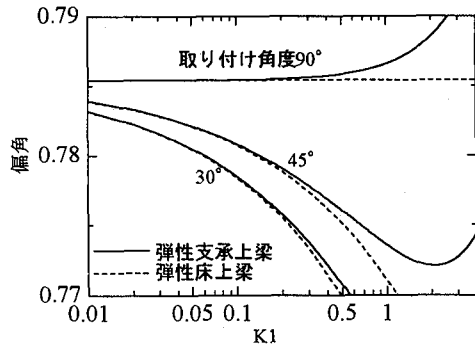
2.における特性根の導出から、これらの変化はトンネルの断面を決定した場合、梁に対する係留索の相対的なばね定数 K_1 , 係留索の傾角 α , 取り付け角度 β , 半径 r , 間隔 h により決定できることが明らかになった。以下ではパラメータ K_1 の変化による虚数となる特性根における偏角と絶対値, 実数となる特性根の値を求め, 式 (52) ~ (54) の関係式を用いて弾性床上梁とみなすことのできる条件を満足する K_1 についての検討を行う。数値計算に用いた諸元は, $\alpha=1.2$ (式 (38)), 半径 $r=5\text{m}$ と 10m (ともに肉厚 $b=1\text{m}$) の2つを取り上げ, 係留索間隔 $h=50\text{m}$ と 100m , 傾角 $\alpha=30^\circ, 45^\circ$, 取り付け角度 $\beta=30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ とし, パラメータ $K_1=0.01 \sim 4.0$ まで変化させ数値計算を行う。なお $r=5\text{m}$ の結果は $r=10\text{m}$ の結果と比較してパラメータ K_1 の上限値について同じ傾向を示したため, ここでは紙面の関係上 $r=10\text{m}$ の結果のみを示すこととする。

3.1 虚数解における偏角の比較

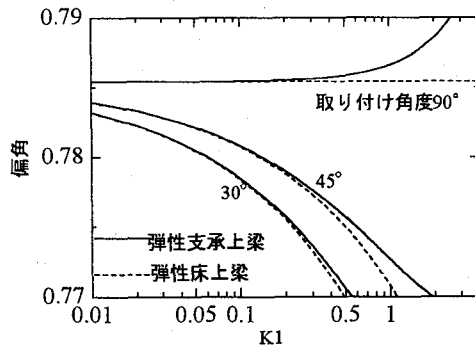
図-5は式 (52) の虚数解における偏角の比較を表したものである。水平方向変位とねじり角が連成しない取り付け角度 $\beta=90^\circ$ の場合, 弾性床上梁の特性根は K_1 の値によらず一定値 ($\pi/4 \cong 0.785$) をとる。また弾性支承上梁においても, およそ $K_1 \leq 0.2$ までは同様のことがいえる。しかし K_1 が大きくなるにつれ, 両者の偏角には明らかな違いが見られる。それに対し取り付け角度 $\beta=45^\circ, 30^\circ$ は回転が生じ連成する場合の結果で, 連成の度合いが大きくなるにつれ, 弾性床上梁の解の偏角は一定値ではなくなる。しかしいずれの場合も連成しない場合と同様に $K_1 \leq 0.2$ まではほぼ両者の偏角はほぼ等しい。また K_1 の増加に伴い弾性支承上梁と弾性床上梁の解の偏角が異なった値を取るという傾向についても変わらない。

3.2 虚数解における絶対値の比較

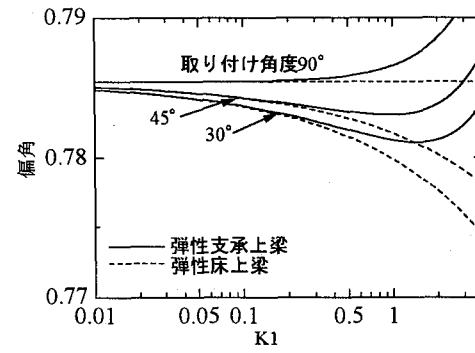
図-6は連立差分方程式と連立微分方程式における虚数となる特性根の絶対値の比 P を式 (53) を用いて表したものである。この値が1に近いほど弾性支承上梁と弾性床上梁の虚数となる特性根の絶対値が一致していること



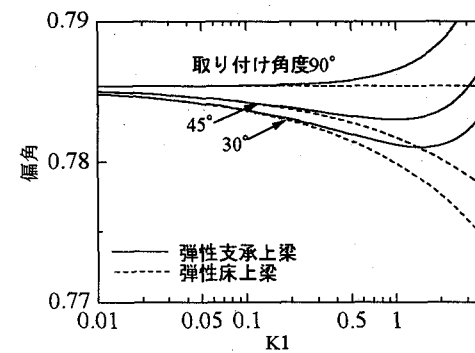
(a) $h=50\text{m}, \alpha=30^\circ$



(b) $h=50\text{m}, \alpha=45^\circ$

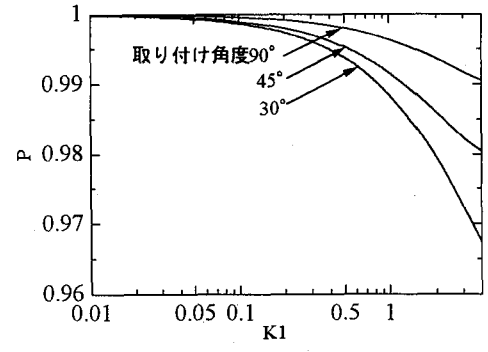


(c) $h=100\text{m}, \alpha=30^\circ$

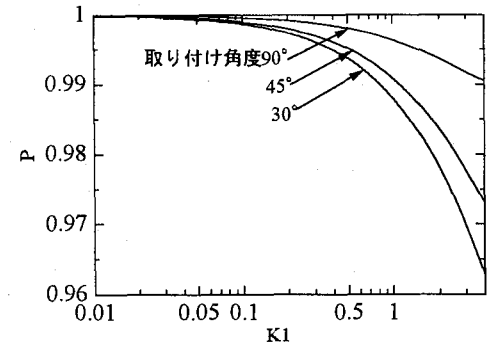


(d) $h=100\text{m}, \alpha=45^\circ$

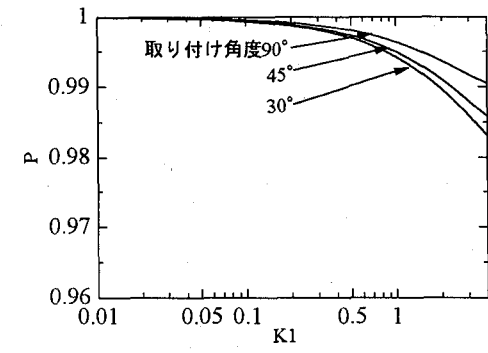
図-5 虚数解の偏角



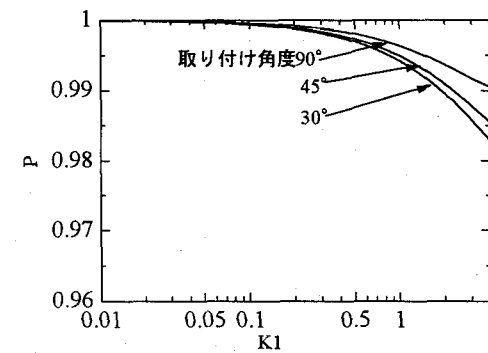
(a) $h=50\text{m}, \alpha=30^\circ$



(b) $h=50\text{m}, \alpha=45^\circ$



(c) $h=100\text{m}, \alpha=30^\circ$



(d) $h=100\text{m}, \alpha=45^\circ$

図-6 虚数解の絶対値の比較

を意味するが、この図-6より取り付け角度によって P の値に多少の影響が出ていることがわかる。 $\beta=90^\circ$ の場合はいずれも同じ曲線であるが、 $\beta=45^\circ$ 、 30° と連成の度合いが大きくなるにつれ K_1 の増加に伴う減少の度合いが大きくなること分る。しかし $K_1 \approx 0.2$ 付近で P の値が急激に減少する傾向はいずれの場合においても見られる。

3.3 実数となる特性根

図-7は実数解部分の比較を表したものである。いずれの場合においても、 K_1 の値がある程度大きくなっても弾性支承上梁と弾性床上梁の実数解には大きな違いは見られない。

以上の結果から明らかなように、いずれの場合においても虚数となる特性根の偏角に着目すれば水中トンネルを弾性床上梁として扱うことのできる条件の検討を行うことができ、その適用範囲はパラメータ K_1 が $K_1 \leq 0.2$ を満たす場合であることがわかる。

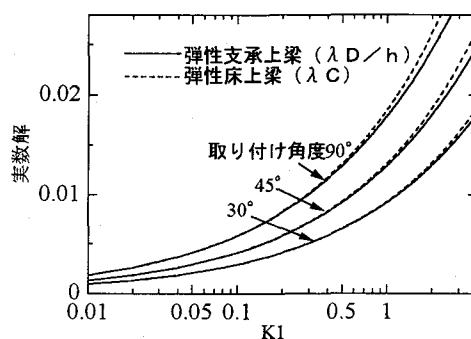
4. 数値計算例による検討

次に連立差分方程式と連立微分方程式の特性根の比較から求められた $K_1 (\leq 0.2)$ による判定の妥当性を検証するために、弾性支承上梁と、等価な弾性床上梁について計算を行った。

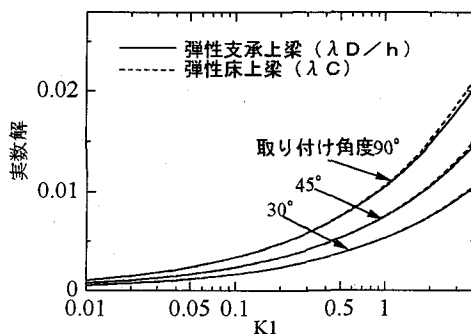
検証計算の解析対象とする構造物は両端固定とし、支間長 $l=2000(\text{m})$ 、曲げ剛性 $EI=7.4 \times 10^{13} (\text{Nm}^2)$ の梁に等間隔 $h=50(\text{m})$ 、 $100(\text{m})$ で傾角 $\alpha=30^\circ$ 、取り付け角度 $\beta=45^\circ$ の係留索を配置した水中トンネルの支間中央に水平方向に静的な集中荷重 ($=1000\text{N}$) を作用させたものである。この水平方向変位 v と曲げモーメント M を、弾性支承上梁については梁要素を用いたFEMにより、またそれと等価な弾性床上梁については連立微分方程式から求められる解析解より求め両者を比較した。 K_1 については $0.02, 0.2, 2.0$ の3通りについて計算を行った。図-8に水平方向変位の値を、図-9に曲げモーメント図を示す。なお図-8、9中において横軸左端が支間中央(原点)、右端が $x=l/2$ 点を表し、図-8中における縦軸の v_0 は $v_0=v/r$ 、図-9中における縦軸の M_0 は $M_0=MI/EI^3$ と v と M をそれぞれ無次元化した値である。

これらの結果より、図-8、9において水平方向変位に関しては K_1 の増加による両者の大きな相違はみられないものの、曲げモーメントに関しては K_1 の増加に伴い、特に $K_1=2.0$ について荷重載荷点付近で弾性支承上梁の解が等価な弾性床上梁の連続的になめらかな解に一致しないことが確認できる。

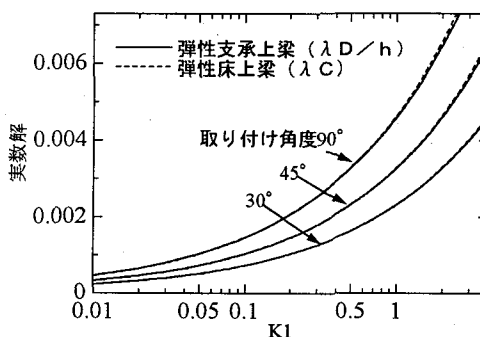
表-1は K_1 の増加に伴う支間中央(荷重載荷点)における弾性支承上梁の水平方向変位 v_c と弾性床上梁の水平



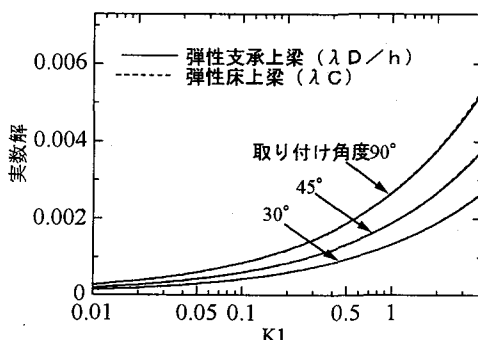
(a) $h=50\text{m}, \alpha=30^\circ$



(b) $h=50\text{m}, \alpha=45^\circ$

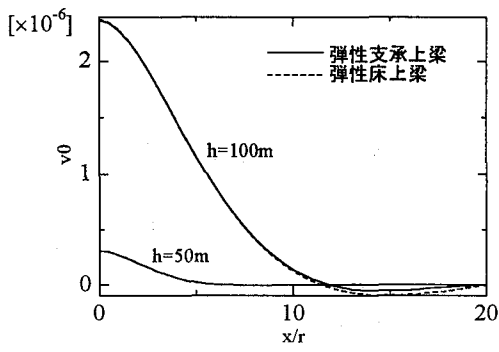


(c) $h=100\text{m}, \alpha=30^\circ$

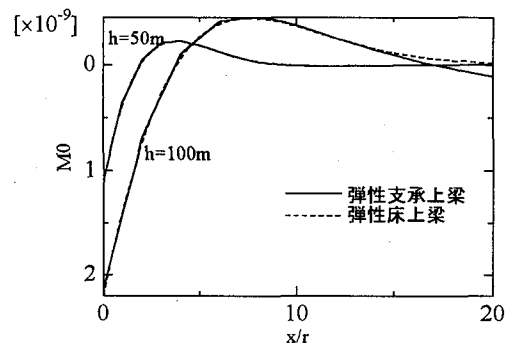


(d) $h=100\text{m}, \alpha=45^\circ$

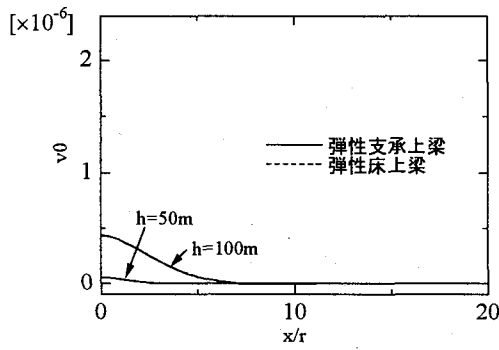
図-7 実数解の比較



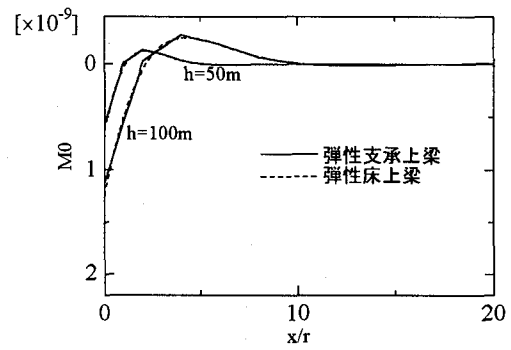
(a) $K_1=0.02$



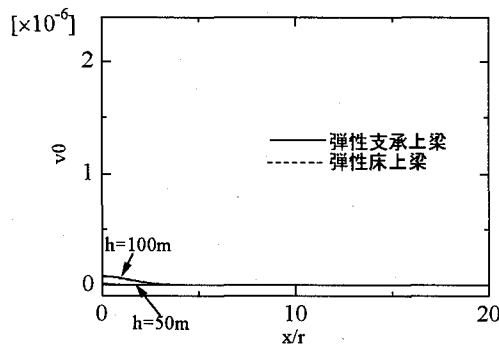
(a) $K_1=0.02$



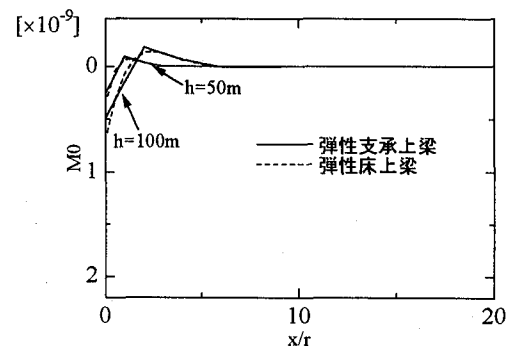
(b) $K_1=0.2$



(b) $K_1=0.2$



(c) $K_1=2.0$



(c) $K_1=2.0$

図-8 水平方向変位の比較

図-9 曲げモーメントの比較

表-1 v_C/v_D の値の変化

K_1	v_C/v_D ($h=50m$)	v_C/v_D ($h=100m$)
0.01	1.00	1.00
0.02	1.00	1.00
0.05	1.00	1.00
0.1	1.00	1.00
0.2	1.00	1.00
1.0	1.01	1.01
2.0	1.03	1.03

表-2 M_C/M_D の値の変化

K_1	M_C/M_D ($h=50m$)	M_C/M_D ($h=100m$)
0.01	1.02	1.03
0.02	1.03	1.03
0.05	1.05	1.05
0.1	1.07	1.07
0.2	1.10	1.11
1.0	1.27	1.28
2.0	1.42	1.44

方向変位 v_D の比を、表-2は表-1と同様に支間中央における弾性支承上梁の曲げモーメント M_C と弾性床上梁の曲げモーメント M_D の比を数値的に表したものである。表-1より v_C/h_D の値は K_1 の増加により大きく変化しない。一方表-2より、 M_C/M_D の値は K_1 の増加に伴い増加していることがわかる。

5. まとめ

本研究は等間隔で緊張係留された水中浮遊式トンネルの解析において、近似的に弾性床上梁とみなして解析できる条件を明らかにしたものである。すなわち水中浮遊式トンネルを曲げとねじりが連成する弾性支承上梁およびそれと等価な弾性床上梁で記述し、前者の連立差分方程式および後者の連立微分方程式における3次の特性方程式の解(特性根)の比較を行い以下の結果を得た。

- (1) 弾性床上梁とみなすことのできる条件は、虚数となる特性根の偏角の相違から得られる。
- (2) 弾性床上梁とみなすことのできる条件は、鉛直方向の応答と同様にパラメータ K_1 が次の条件を満足する場合である。

$$K_1 = \frac{k_w h^3}{6EI} \leq 0.2$$

ここで EI はトンネル本体の曲げ剛性、 h は係留索間隔、 k_w は式(2)で与えられる係留索の水平方向の伸び剛性

付録

式(46)は次のように書き直すことができる。

$$y = f(X_C) = g(X_C)$$

ここで

$$f(X_C) = X_C^3 + 6K_1 X_C$$

$$g(X_C) = \frac{6a(K_1 r_C^2 + K_1^* r_S^2)}{h^2} X_C^2 + \frac{36aK_1 K_1^* r_S^2}{h^2}$$

$f(X_C)$ は原点を変曲点とする3次関数、 $g(X_C)$ は頂点を正の y 軸上に有する下に凸の2次関数である。これより式(46)の実数解は1つしか存在しない。

参考文献

- 1) Krokeborg(ed.), : Proceeding of the Third Symposium on Strait Crossings, 1994.
- 2) (社) 水中トンネル研究調査会 : 水中トンネル 第I編 計画から設計施工まで, 第II編 ケーススタディー, 平成7年.
- 3) Ellington, J.P. : The beam on discrete elastic supports, Bulletin of the International Railway Congress Association, Vol.34, No.12, pp.933-941, 1957.
- 4) 石川廣美 : 差分方程式入門, コロナ社, 1976.
- 5) 島田静雄 : 土木応用数学, 共立出版, 1967.
- 6) Dym, C.L., Shames, L.H. (砂川恵監訳) : 材料力学と変分法, ブレイン図書出版, 1977.

(1999年9月17日受付)