

Spline 要素法を用いた変厚 Mindlin 斜板の振動解析

Vibration of Skew Mindlin Plates with Varying Thickness by the Spline Element Method

水澤富作*
Tomisaku Mizusawa近藤八重**
Yae Kondo

* 工博 大同工業大学 教授 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

** 大同工業大学非常勤講師 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents an application of the spline element method based on the Mindlin plate theory to analyse vibration of skew thick plates with varying thickness in the longitudinal direction.

To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods. Good convergence and accuracy are obtained. Frequencies of skew Mindlin plates with varying thickness are analysed for the different thickness ratios, aspect ratios, the ratio of the width to thickness and skew angles.

Key Words: skew Mindlin plate, varying thickness, spline element method, vibration

1. まえがき

斜板は、斜スラブ、斜めデッキや翼などの構造要素として用いられており、その振動特性を知することは、設計上重要な課題である。これまでに、一様厚さの斜板の振動問題は、薄板理論¹⁾、一次せん断変形板理論²⁻⁵⁾、高次せん断変形板論⁶⁾や3次元弾性理論⁷⁻¹⁰⁾に基づく種々の数値解析法により解析されている。また、斜板問題では、関数の直交性が成り立たなくなり、厳密な解を求めることが困難になるので、Rayleigh-Ritz法や有限要素法などの数値解析法の適用が必要になる。実際に用いられる斜板の板厚は、ステップ状またはテーパー状に変化する場合がある¹¹⁻¹⁴⁾。このような変断面性状を有する斜板の振動解析は、支持される境界条件に関係なく厳密な解を求めることが困難な問題の1つであり、また任意の変断面性状を持つ斜板の振動問題に関する研究は、変厚長方形板と比較して、さほど多く報告されていない。

Chopraら¹¹⁾は、薄板理論に基づくRayleigh-Ritz法を用いて、周辺単純支持された変厚斜板の振動解析を行っている。Dokainishら¹²⁾は、Galerkin法を用いて、周辺固定された変厚斜板の自由振動解析を行っている。また、Banerjee¹³⁾は、Galerkin法を用いて、一方向に板厚が任意に変化する周辺固定された斜め薄板の振動解析を行っている。

一方、薄板理論で無視される横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した斜め厚板に関する振動解析も行われて

いるが、その多くの研究は、等厚を仮定した斜め厚板を対象にしたものである²⁻¹⁰⁾。Matsudaら¹⁵⁾は、Mindlin理論に基づく離散化積分方程式法を用いて、一方向に板厚が直線的に変化する比較的薄い斜板の振動解析を行っている。

水澤らは¹⁶⁻¹⁷⁾、2方向にB-spline関数を仮定したspline要素法を用いて、斜め薄板や扇形板の振動解析を行っている。この方法は、変位関数に高次の連続性を有するスプライン関数を用いた領域分割法であり、また比較的少ない要素分割数で精度の高い結果が得られている。

本文では、Mindlinの一次せん断変形板理論に基づくSpline要素法を用いて、一方向に任意の変断面性状を有するMindlin斜板の振動解析を行っている。本手法の収束性や解析精度に与える要素分割数の影響について検討している。また、変厚斜板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、辺長比や斜角などの影響について明らかにして

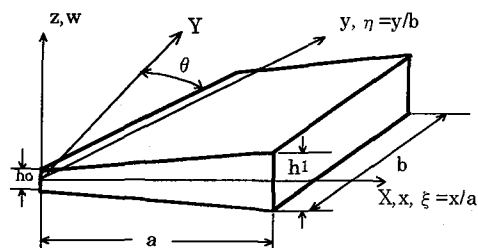


Fig. 1 Skew Mindlin plate with varying thickness in the x-direction and coordinate systems

いる。

2. 式の定式化

Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、Fig. 1 に示すような一方向に変厚な Spline 斜要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される斜交座標系と偏微分の関係式を用いる²⁾。

$$\begin{aligned} x &= X - Y \tan \theta, y = Y \sec \theta \\ \partial(\cdot)/\partial X &= \partial(\cdot)/\partial x, \\ \partial(\cdot)/\partial Y &= -\{\partial(\cdot)/\partial x\} \tan \theta + \{\partial(\cdot)/\partial y\} \sec \theta \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 X - Y は直交座標系、 x - y は斜交座標系であり、また θ は斜角である。

Mindlin 板の X, Y, z 方向の変位 U, V, W は、直交座標系で次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U(X, Y, z) &= z \phi_X(X, Y), V(X, Y, z) = z \phi_Y(X, Y), \\ W(X, Y, z) &= W(X, Y) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 W はたわみであり、 ϕ_X と ϕ_Y は、それぞれ直交座標系の Y 軸と X 軸回りの回転角である。これらの回転角は斜交座標系で表すと、次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_X(X, Y) &= \phi_x(x, y) \cos \theta, \\ \phi_Y(X, Y) &= -\phi_x(x, y) \sin \theta + \phi_y(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 ϕ_x と ϕ_y は、それぞれ斜交座標系の y 軸と x 軸回りの回転角を表す。

ここでは、次式で示す無次元斜交座標系を用いて、式の定式化を行う。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, W' = W/b \quad (4)$$

ここで、 W はたわみであり、 a と b はそれぞれ斜板の長さとお幅を示す。

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W' &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、それぞれ正規化された B-spline 関数である¹⁾。 W' はたわみであり、 ϕ_x と ϕ_y は回転角である。また、 $i_x = k-1 + M_x$, $i_y = k-1 + M_y$, $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi) N_{1,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi) N_{i_y,k}(\eta)]$ である。未定係数ベクトルは、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \{A_{11} A_{12} \dots A_{i_x i_y}\}^T, \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \{B_{11} B_{12} \dots B_{i_x i_y}\}^T, \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \{C_{11} C_{12} \dots C_{i_x i_y}\}^T \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。

したがって、式 (5) をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (7)$$

ここで、

$$[S]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} N_{mk}(\xi) N_{nk}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{mk}(\xi) N_{nk}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{mk}(\xi) N_{nk}(\eta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、 $\{d\} = \{\phi_x, \phi_y, W'\}$, $\{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn}, \{\delta_B\}_{mn}, \{\delta_C\}_{mn}\}^T$ である。

次に、Mindlin 板理論で定義される曲げひずみ $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}_s$ を無次元斜交座標系 (ξ - η) で表せば、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}_b &= \begin{Bmatrix} (z/a) \partial \phi_x / \partial \xi \\ (z/b) \sec \theta \partial \phi_y / \partial \eta - (z/a) \tan \theta \partial \phi_y / \partial \xi \\ (z/a) \partial \phi_y / \partial \xi + (z/b) \sec \theta \partial \phi_x / \partial \eta - (z/a) \tan \theta \partial \phi_x / \partial \xi \end{Bmatrix} \\ \{\epsilon\}_s &= \begin{Bmatrix} \phi_x + (b/a) \partial W' / \partial \xi \\ \phi_y + \sec \theta \partial W' / \partial \eta - (b/a) \tan \theta \partial W' / \partial \xi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

したがって、式 (5) を式 (9) と (10) に代入すれば、ひずみベクトル $\{x\}$ は、次式で与えられる。

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon\}_b \\ \{\epsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (11)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、またひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a) \partial / \partial \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1/b) \sec \theta \partial / \partial \eta & 0 \\ (1/b) \sec \theta \partial / \partial \eta & -(1/a) \tan \theta \partial / \partial \xi & 0 \\ -(1/a) \tan \theta \partial / \partial \xi & (1/a) \partial / \partial \xi & 0 \\ 1 & 0 & (b/a) \partial / \partial \xi \\ 0 & 1 & \sec \theta \partial / \partial \eta \\ & & -(b/a) \tan \theta \partial / \partial \xi \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} [B]_{mn} &= [T][S]_{mn} \\ &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} (1/a) \dot{N}_m \dot{N}_n & 0 & 0 \\ 0 & (1/b) \sec \theta \dot{N}_m \dot{N}_n & 0 \\ -(1/a) \tan \theta \dot{N}_m \dot{N}_n & (1/a) \dot{N}_m \dot{N}_n & 0 \\ \dot{N}_m \dot{N}_n & 0 & (b/a) \dot{N}_m \dot{N}_n \\ 0 & \dot{N}_m \dot{N}_n & \sec \theta \dot{N}_m \dot{N}_n \\ & & -(b/a) \tan \theta \dot{N}_m \dot{N}_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} [B_b]_{mn} \\ [B_s]_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} N_m &= N_{m,k}(\xi), N_n = N_{n,k}(\eta) \\ \dot{N}_m &= \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi, \dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta \end{aligned}$$

である。

斜板の板厚は、 x 方向に任意の形状で変化すると仮定している。 $x=0$ と $x=a$ での板厚を h_0 と h_1 とすると、Fig. 2 に示すように板厚は、板厚が凸型断面の場合は、

$$h(\xi) = h_0 \{ \delta - (\delta - 1)(1 - \xi)^p \} = h_0 H(\xi) \quad (14)$$

また、凹型断面の場合は、

$$h(\xi) = h_0 \{ (\delta - 1)\xi^p + 1 \} = h_0 H(\xi) \quad (15)$$

で与えられる。ここで、 δ は変厚比であり、 h_1/h_0 で表される。また、上式において、板厚断面の形状を表す多項式の次数、 p を 1 に仮定すると、板厚断面は、線形的に変化することになる。

したがって、上式を用いれば、板厚が線形的に変化する場合の斜板の曲げ剛性は、

$$D(\xi) = Eh(\xi)^3 / [12(1 - \nu^2)] = D_0 \{ (\delta - 1)\xi + 1 \}^3 \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 $D_0 = Eh_0^3 / [12(1 - \nu^2)]$ 、 E はヤング係数、また ν はポアソン比である。

等方性変厚斜板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは、それぞれ次式で与えられる。

$$[D]_b = Eh(\xi)^3 / 12(1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[D]_s = Gh(\xi)\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $G=E/2(1+\nu)$ はせん断弾性係数であり、また κ はせん断修正係数である。

変厚 Mindlin 斜板のひずみエネルギー、 U は、

$$\begin{aligned} U &= (ab \cos \theta / 2) \int_0^1 \int_0^1 \{ \varepsilon \}_b^T [D]_b \{ \varepsilon \}_b + \{ \varepsilon \}_s^T [D]_s \{ \varepsilon \}_s d\xi d\eta \\ &= (D_0 ab \cos \theta / 2a^2) \int_0^1 \int_0^1 H(\xi)^3 \left[\sec^2 \theta \left\{ \partial \phi_x / \partial \xi \right. \right. \\ &\quad - (a/b) \sin \theta \partial \phi_x / \partial \eta - \sin \theta \partial \phi_y / \partial \xi + (a/b) \partial \phi_y / \partial \eta \}^2 \\ &\quad - (1 - \nu) \{ 2(a/b) (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \eta) \\ &\quad \left. - (1/2) \{ (a/b) \partial \phi_x / \partial \eta + \partial \phi_y / \partial \xi \}^2 \} \right] \\ &\quad + 6(1 - \nu) \kappa (b/h_0)^2 (a/b)^2 H(\xi) \left[\cos \theta \phi_x + (b/a) \partial W / \partial \xi \right]^2 \\ &\quad + \left\{ - \sin \theta \phi_x + \phi_y - (b/a) \tan \theta \partial W / \partial \xi + \sec \theta \partial W / \partial \eta \right\}^2 \Big] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (19)$$

また、この板の運動エネルギー、 T は、

$$\begin{aligned} T &= (\rho h_0 / 2) \omega^2 ab^3 \cos \theta \int_0^1 \int_0^1 H(\xi) W^2 \\ &\quad + (1/12) (h_0 / b)^2 H(\xi)^3 \{ \phi_x^2 - 2 \sin \theta \phi_x \phi_y + \phi_y^2 \} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (20)$$

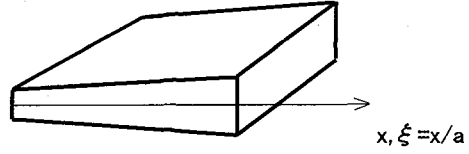
で与えられる。ここで、 ρ は密度であり、 ω は円振動数 (rad/sec) である。

変厚 Mindlin 斜板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、次式で示される。

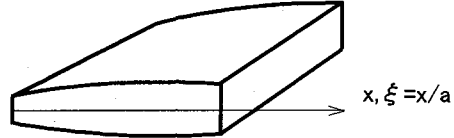
$$\Pi = U - T \quad (21)$$

したがって、式 (4) を式 (21) に代入し、 Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。

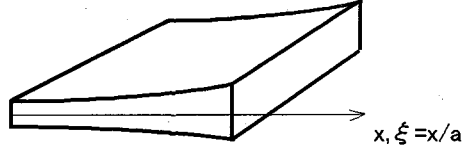
$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \}_{mn} = 0 \quad (22)$$



a) Type 1 : $h(\xi) = h_0 \{ (\delta - 1) \xi + 1 \}$



b) Type 2 ($p=2$) and Type 3 ($p=3$): $h(\xi) = h_0 \{ \delta - (\delta - 1)(1 - \xi)^p \}$



c) Type 4 ($p=2$) and Type 5 ($p=3$): $h(\xi) = h_0 \{ (\delta - 1) \xi^p + 1 \}$

Fig. 2 Variation of varying thickness in the x -direction

式 (22) をマトリックス表示すれば、次式のようにになる。

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k ([K]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn} - n^* [M]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn}) = 0 \quad (23)$$

ここで、 n^* は振動数パラメータであり、 $\omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ で表している。

剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ と質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$[K]_{mnrs} = D_0 ab \cos \theta / a^2 \begin{bmatrix} [K\phi_x \phi_x] & [K\phi_x \phi_y] & [K\phi_x W'] \\ [K\phi_y \phi_x] & [K\phi_y \phi_y] & [K\phi_y W'] \\ [KW' \phi_x] & [KW' \phi_y] & [KW' W'] \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[M]_{mnrs} = \rho h_0 \omega^2 ab^3 \cos \theta \begin{bmatrix} [M\phi_x \phi_x] & [M\phi_x \phi_y] & 0 \\ [M\phi_y \phi_x] & [M\phi_y \phi_y] & 0 \\ 0 & 0 & [MW' W'] \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のマトリックスの大きさは、 $3(k+M_x-1)(k+M_y-1)$ で与えられる。ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x 方向と y 方向の要素分割数である。Appendix には、これらのマトリックスの要素が示してある。

3. 数値計算例および考察

ここでは、一方向に任意の変断面性状を有する

Mindlin 斜板の振動解析への本手法の適用性について示す。また、変厚 Mindlin 斜板の振動特性に与える変厚比、幅厚比や斜角などの影響について示す。斜板の境界条件は CF-SC のように表し、それぞれ2つの直線辺 ($\xi=0,1.0$) で、固定辺(C), 自由辺(F)であり、他の2辺 ($\eta=0,1.0$) が単純支持辺(S)と固定辺(C)に相当している。なお、以下の数値計算では、スプライン次数,k-1 は3次に仮定している。またポアソン比は 0.3、せん断修正係数、 κ は 5/6 を用いている。

Table 1 は、 ξ 方向に板厚が直線的に変化する周辺固定された Mindlin 斜板の振動数パラメータ, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ の収束性に与える要素分割数の影響を示している。ここで、辺長比,a/b は 1.0、斜角, θ は 45°、変厚比,h1/h0 は 2.0 に仮定し、要素分割数,Mx=My は 4 分割から 16 分割まで変化させている。また、幅厚比,b/h0 は 5, 10, 100 としている。これより、高次の振動数パラメータまで、要素の分割数を高めると、幅厚比に関係なく安定した収束状態が得られている。

Table 2 には、一方向に板厚が直線的に変化する周辺単純支持された斜め薄板の振動数パラメータ, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ の精度比較が示してある。ここで、a/b=1.0, b/h0=250, また h1/h0 は 1.2 と 2.0 に仮定し、斜角は 0° から 45° まで変化させている。比較のために、Chopra らの Fourier sin 級数を変位関数に用いた Ritz 法により求められた数値解¹¹⁾が示してある。これより、本手法で幅厚比を 250 程度にとれば薄板理論により求められた値とよく一致した結果が得られている。Chopra らは級数の項数を 36 に仮定しているので、斜角の増大とともに、本手法の結果と比較して、5%程度の差が見られる。

Table 3 には、周辺固定された Mindlin 斜板の振動数パラメータ, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ の精度比較が示してある。ここで、斜角は 45°、辺長比は 2.0, 1.0, 0.5 としている。また、b/h0 は 10, 5, h1/h0 は 1.0, 1.5, 2.0 に変化させている。比較のために、Liew らの直交多項式を変位関数に用いた Ritz 法で求めた結果²⁾も示してある。これより、本手法で求めた値は、辺長比や幅厚比を変化させても、Liew らの数値解とよく一致した結果が得られている。

Table 2 Comparison of frequency parameter, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ of simply supported skew plates with linearly varying thickness: a/b=1.0, b/h0=250 and Mx=My=14

skew angle		Modes				
θ	h1/h0	Method	1st	2nd	3rd	4th
0	1.2	Present method	2.198	5.492	5.496	8.793
		Chopra et. al. [11]	2.198	5.488	5.492	8.790
		Present method	2.959	7.272	7.354	11.81
	2.0	Present method	2.959	7.272	7.354	11.81
		Chopra et. al. [11]	2.960	7.271	7.351	11.81
		Present method	2.783	5.864	8.011	9.380
30	1.2	Present method	2.783	5.864	8.011	9.380
		Chopra et. al. [11]	2.889	5.993	8.211	9.604
		Present method	3.737	7.817	10.59	12.60
	2.0	Present method	3.737	7.817	10.59	12.60
		Chopra et. al. [11]	3.886	8.001	10.87	12.92
		Present method	3.953	7.395	11.28	12.14
45	1.2	Present method	3.953	7.395	11.28	12.14
		Chopra et. al. [11]	4.314	7.786	11.95	12.83
		Present method	5.291	9.857	14.78	16.37
	2.0	Present method	5.291	9.857	14.78	16.37
		Chopra et. al. [11]	5.791	10.42	15.72	17.36
		Present method	5.791	10.42	15.72	17.36

Table 4 には、種々の境界条件を持つ一方向に板厚が直線的に変化する正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ の精度比較が示されている。ここで、a/b=1.0, b/h0=10 に仮定し、h1/h0 は 1.0 と 2.0 としている。比較のために、Ritz 法を用いた Liew らの数値解²⁾、Mikami らによる shifted Legendre 多項式の根を選点に用いた選点法の解¹⁸⁾とスプライン帯板法を用いた Mizusawa の値¹⁹⁾も示してある。これより、境界条件や変厚比に関わらず、本手法で求めた値は、他の数値解とよく一致した結果が示されている。

Table 1. Convergence study of frequency parameters, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ of skew plates with linearly varying thickness in the longitudinal direction: CC-CC, h1/h0=2.0, $\theta=45^\circ$ and a/b=1.0

		Modes						
b/h0	Mx=My	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
5.0	4	43.99	64.75	73.29	79.45	93.42	97.50	106.6
	6	45.77	64.59	79.57	81.45	99.32	107.6	111.7
	8	46.24	64.60	80.97	82.21	98.71	107.3	114.3
	10	46.43	64.62	81.25	82.73	98.64	107.2	114.7
	12	46.53	64.62	81.35	83.00	98.64	107.3	114.8
	14	46.58	64.63	81.39	83.14	98.64	107.3	114.9
10.0	16	46.61	64.63	81.42	83.22	98.64	107.3	114.9
	4	66.67	105.3	125.8	135.2	165.8	175.8	193.9
	6	69.16	103.3	131.9	135.8	168.1	185.4	194.4
	8	69.88	103.2	132.6	137.6	165.2	183.6	195.4
	10	70.18	103.2	132.8	138.6	164.9	183.5	195.4
	12	70.34	103.2	132.9	139.0	164.8	183.5	195.4
100.0	14	70.43	103.2	133.0	139.3	164.8	183.5	195.5
	16	70.46	103.2	133.0	139.4	164.8	183.5	195.6
	4	106.3	226.3	292.8	368.9	780.0	802.3	819.1
	6	97.99	169.7	243.0	266.9	404.3	428.1	460.9
	8	96.07	157.6	224.3	235.4	319.1	357.9	409.9
	10	95.62	155.4	215.7	230.7	292.0	339.0	378.0
	12	95.49	154.3	213.3	229.7	284.4	333.6	362.5
	14	95.45	154.1	212.5	229.4	282.1	332.0	357.3
	16	95.44	154.1	212.2	229.3	281.4	331.4	355.6

Table 3. The frequency parameters, $n^*=\omega b^2/\rho h_0/Do$ of clamped skew Mindlin plates with linearly varying thickness: $\theta=45^\circ$, CC-CC and Mx=My=16

			Modes							
a/b	b/h0	h1/h0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
1.0	1.0	1.0	41.26	47.79	59.06	73.80	89.54	97.07	104.4	104.8
		Liew et. al. [2]	41.24	47.84	59.15	73.74	89.44	96.98	104.5	105.3
		1.5	47.86	55.77	68.42	84.66	101.5	108.6	117.3	118.6
	2.0	2.0	52.82	62.09	75.65	92.74	109.8	116.6	126.7	128.5
		5	31.73	36.44	44.25	53.89	63.56	65.76	70.80	72.59
		Liew et. al. [2]	31.67	36.42	44.22	53.75	63.36	65.57	70.72	72.59
2.0	1.5	1.5	34.60	39.79	48.09	58.12	67.86	69.35	74.89	77.19
		2.0	36.49	42.03	50.64	60.88	70.44	71.69	77.47	80.06
	10	1.0	55.26	83.84	110.8	116.2	139.6	157.1	168.0	187.8
		Liew et. al. [2]	55.31	83.67	110.6	116.3	139.2	156.7	167.7	188.1
		1.5	63.88	95.01	123.9	129.8	154.5	172.7	184.5	204.3
		2.0	70.49	103.2	133.0	139.4	164.8	183.5	195.6	215.2
1.0	5	1.0	41.09	58.47	74.71	76.97	91.34	100.0	107.4	117.1
		Liew et. al. [2]	41.05	58.25	74.44	76.89	90.96	99.61	107.0	117.1
		1.5	44.46	62.25	78.88	80.83	95.87	104.4	112.1	121.7
	2.0	2.0	46.61	64.63	81.42	83.22	98.64	107.3	114.9	124.4
		10	1.0	126.9	145.7	177.0	215.6	254.2	263.0	283.2
		1.5	138.6	159.1	192.5	232.8	272.3	277.1	299.3	309.0
0.5	2.0	2.0	146.0	167.9	202.8	244.2	283.9	285.6	309.3	320.9
	5	1.0	79.08	90.96	109.4	130.8	149.0	150.7	162.3	169.4
		1.5	81.84	94.38	113.5	135.1	151.8	154.8	165.9	169.4
		2.0	83.31	96.35	115.9	137.5	153.5	155.3	167.2	168.0

Table 5 には、周辺固定と周辺単純支持された一方向に板厚が直線的に変化する Mindlin 斜板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ に与える斜角と変厚比の影響が示してある。ここで、 $b/h_0 = 10$, $a/b = 1.0$ にとり、斜角は 0° から 60° まで変化させている。また、 h_1/h_0 は 1.0, 1.5 と 2.0 としている。これより、斜角と変厚比が増大すると、板の剛性が高まるので振動数パラメータも増大する。

Fig. 3 には、板厚が直線的に変化する変断面性状を有する周辺固定された Mindlin 斜板の一次の振動数パラメータ n_1^* に与える幅厚比と変厚比の影響が示されている。ここで、 $a/b = 1.0$, $\theta = 45^\circ$ である。これより、幅厚比が大きいと、振動数パラメータは、変厚比に対してほぼ直線的に変化している。しかし、板厚が増大すると、横せん断変形の影響が大きく生じてくるので、振動数パラメータは減少し、また変厚比に対して非線形な性状が示される。

Table 6 は、一方向に板厚が直線的に変化する片持ち Mindlin 斜板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ に与える固定辺の位置、幅厚比と変厚比の影響を示している。ここで、 $\theta = 45^\circ$, $a/b = 1.0$, b/h_0 は 10 と 100 にとり、また h_1/h_0 は 1.0 から 2.5 まで変化させている。

Table 4. Comparison of accuracy of frequency parameters, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ of tapered square Mindlin plates: $\theta = 0^\circ$, $b/h_0 = 10.0$, $a/b = 1.0$ and $M_x = M_y = 16$

Boundary conditions	h ₁ /h ₀	Modes						
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
SS-SS	1.0	Present method	19.04	45.44	45.44	69.71	85.04	106.6
		Liew et. al. [2]	19.07	45.48	45.48	69.79	85.04	106.7
		Mikami et. al. [18]	19.06	45.45	45.45	69.72	84.93	
		Mizusawa [19]	19.06	45.45	45.45	69.72	84.93	
	2.0	Present method	27.10	61.42	61.78	92.09	108.5	135.3
		Mikami et. al. [18]	27.11	60.56	61.73	92.02	108.3	109.9
		Mizusawa [19]	27.12	61.38	61.74	92.01	108.3	109.9
	1.0	Present method	32.52	62.03	62.03	86.93	102.4	123.9
		Liew et. al. [2]	32.52	62.04	62.04	86.95	102.4	123.9
	2.0	Present method	43.48	79.00	79.16	108.5	124.7	149.8
CC-CC	1.0	Present method	3.423	8.017	20.00	25.49	28.06	47.29
		Liew et. al. [2]	3.431	8.061	20.09	25.50	28.25	47.53
	2.0	Present method	7.275	13.62	30.68	34.97	38.69	62.98
		Present method	7.275	13.62	30.68	34.97	38.69	62.98
FC-FF	1.0	Present method	3.423	8.017	20.00	25.49	28.06	47.29
		Liew et. al. [2]	3.431	8.061	20.09	25.50	28.25	47.53
	2.0	Present method	7.275	13.62	30.68	34.97	38.69	62.98
		Present method	7.275	13.62	30.68	34.97	38.69	62.98

Table 5. The effect of skew angle on the frequency parameters, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ of tapered skew plates: $b/h_0 = 10$, $a/b = 1.0$ and $M_x = M_y = 14$

Boundary conditions	θ°	h ₁ /h ₀	Modes							
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
CC-CC	0	1.0	32.52	62.03	62.03	86.93	102.4	103.4	123.9	123.9
		1.5	38.53	71.86	71.74	99.28	115.5	116.7	139.0	139.2
		2.0	43.47	79.00	79.16	108.5	124.7	126.3	149.8	150.2
	15	1.0	34.32	61.52	68.76	87.69	107.0	111.5	119.1	134.9
		1.5	40.58	71.09	79.08	100.0	120.3	125.3	134.1	150.5
		2.0	45.69	78.40	86.81	109.2	129.6	135.0	145.0	161.5
	30	1.0	40.62	67.52	84.20	93.63	122.6	122.8	135.6	153.7
		1.5	47.68	77.56	95.70	106.3	135.5	138.8	150.8	168.7
		2.0	53.33	85.14	104.0	115.7	144.7	150.0	161.3	179.2
	45	1.0	55.21	83.84	110.8	116.0	139.6	157.1	168.0	187.5
		1.5	63.83	95.01	123.8	129.6	154.5	172.7	184.4	204.0
		2.0	70.43	103.2	132.9	139.0	164.8	183.5	195.5	214.9
	60	1.0	91.16	124.3	153.6	184.0	187.7	213.7	235.5	244.5
		1.5	102.2	137.1	168.1	199.7	202.6	230.6	251.9	262.4
		2.0	109.9	145.9	177.9	210.2	212.1	241.8	262.6	274.1
SS-SS	0	1.0	19.04	45.45	45.45	69.71	84.97	85.04	106.6	106.6
		1.5	23.26	54.16	54.30	82.05	98.42	99.03	122.9	123.1
		2.0	27.10	61.42	61.78	92.09	108.5	110.1	135.3	135.9
	15	1.0	20.08	44.50	51.11	69.81	89.02	92.50	101.1	117.4
		1.5	24.50	53.15	60.73	82.15	103.1	107.0	117.2	134.6
		2.0	28.51	60.42	68.70	92.17	113.7	118.2	129.8	147.5
	30	1.0	23.81	48.28	63.94	73.61	102.8	102.8	115.1	134.6
		1.5	28.95	57.52	75.27	86.49	116.5	120.5	131.9	151.4
		2.0	33.53	65.23	84.39	96.93	127.2	133.8	144.7	163.9
	45	1.0	32.99	59.61	86.26	91.61	115.4	133.9	144.8	165.6
		1.5	39.76	70.49	100.1	106.7	132.2	152.7	163.8	185.6
		2.0	45.61	79.37	110.7	118.8	144.5	166.7	177.4	199.8
	60	1.0	58.16	89.70	120.5	151.9	159.6	183.7	208.5	216.1
		1.5	68.64	104.2	137.8	171.6	179.6	205.1	231.3	239.1
		2.0	77.06	115.4	150.6	185.6	194.2	220.1	247.2	254.8

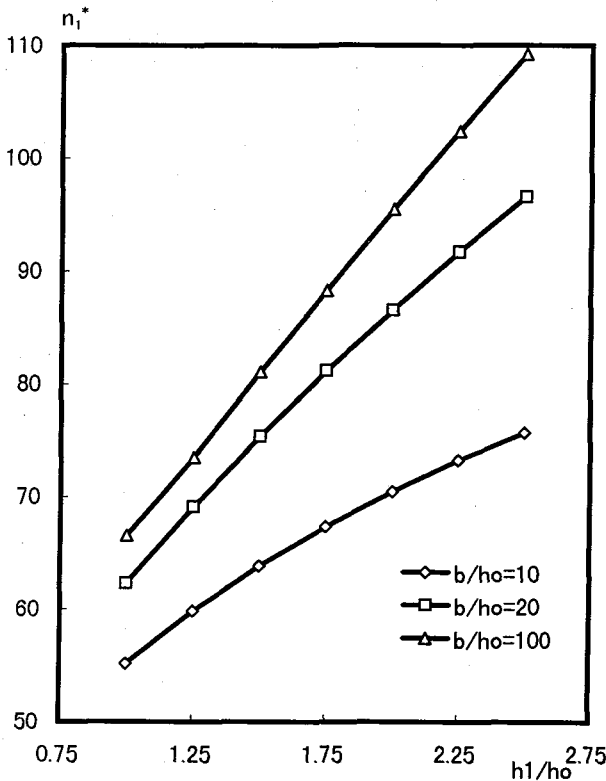


Fig. 3 The effect of b/h_0 on the frequency parameter of skew Mindlin plates with tapered thickness: CC-CC, $a/b = 1.0$ and $\theta = 45^\circ$

Fig. 4 は、この片持ち Mindlin 斜板の一次の振動数パラメータ n_1^* に与える固定辺の位置の影響が示されている。これより、片持ち変厚斜板では、等厚板と異なり、振動数パラメータは固定辺の位置により大きく異なる。最小厚さの辺を固定した CF-FF を除くと、振動数パラメータは、変厚比に対してほぼ直線的に増大している。

Table 7 には、一方向に板厚が変化する周辺固定された Mindlin 斜板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ に与える種々の変断面性状の影響が示されている。ここで、Fig. 2 に示すような板厚断面が直線的に変化する Type 1、断面が凸状変化する Type 2 (2 次曲線) と Type 3 (3 次曲線) 及び断面が凹状に変化する Type 4 (2 次曲線) と Type 5 (3 次曲線) が仮定されている。また、 $a/b=1.0$, $b/h_0=10$, h_1/h_0 は 2.0, 1.5 と 1.0 であり、斜角は 15° から 60° まで変化させている。これより、変厚 Mindlin 斜板の振動数パラメータは、断面性状を変化させれば、大きく変化させることができる。しかしながら、斜角が大きくなると、振動数パラメータに与える断面性状の影響がさほど大きく見られなくなる。

Table 6. The effect of b/h_0 and h_1/h_0 on the frequency parameters, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ of cantilevered skew plates with linearly varying thickness: $\theta=45^\circ$, $a/b=1.0$ and $M_x=M_y=14$

Boundary conditions	b/h_0	h_1/h_0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
CF-FF	1.0	1.0	4.336	10.53	24.56	28.14	44.97	51.50	66.20	71.58
		1.25	4.360	10.90	26.75	30.32	49.46	55.90	72.08	77.98
		1.5	4.387	11.25	28.65	32.38	53.45	59.76	77.21	83.36
		1.75	4.413	11.58	30.28	34.35	57.02	63.14	81.76	87.98
		2.0	4.437	11.89	31.67	36.24	60.21	66.10	85.80	91.87
		2.25	4.458	12.17	32.33	38.04	63.05	68.69	89.40	95.10
		2.5	4.478	12.43	33.81	39.76	65.56	70.95	92.60	97.74
	1.00	1.0	4.461	11.23	26.83	31.31	50.55	58.81	76.99	87.56
		1.25	4.501	11.74	29.88	34.19	57.16	65.78	85.53	99.11
		1.5	4.544	12.26	32.81	37.00	63.53	72.54	95.64	110.3
		1.75	4.585	12.76	35.63	39.77	69.70	79.14	104.4	121.2
		2.0	4.625	13.25	38.34	42.51	75.69	85.61	113.0	131.8
		2.25	4.663	13.73	40.95	45.23	81.53	91.98	121.3	142.2
		2.5	4.699	14.21	43.45	47.96	87.23	98.27	129.4	152.4
	1.0	1.0	4.336	10.53	24.56	28.14	44.97	51.50	66.20	71.58
		1.25	5.353	12.54	27.39	31.68	49.17	56.61	72.13	77.03
		1.5	6.366	14.52	30.05	34.97	53.05	61.23	77.37	81.99
		1.75	7.375	16.46	32.56	38.05	56.68	65.45	82.04	86.56
		2.0	8.380	18.36	34.95	40.93	60.07	69.32	86.23	90.79
		2.25	9.378	20.22	37.23	43.63	63.26	72.89	90.03	94.73
		2.5	10.37	22.04	39.40	46.16	66.26	76.19	93.49	98.38
FC-FF	1.00	1.0	4.461	11.23	26.83	31.31	50.55	58.81	76.99	87.56
		1.25	5.539	13.51	30.32	36.10	56.26	66.17	86.00	97.27
		1.5	6.629	15.81	33.74	40.83	61.80	73.31	94.57	106.7
		1.75	7.730	18.12	37.10	45.52	67.24	80.28	102.8	116.0
		2.0	8.843	20.45	40.44	50.18	72.60	87.12	110.9	125.1
		2.25	9.968	22.80	43.75	54.82	77.90	93.85	118.7	134.0
		2.5	11.11	25.16	47.05	59.46	83.16	100.5	126.5	142.8
	1.0	1.0	4.336	10.53	24.56	28.14	44.97	51.50	66.20	71.58
		1.25	4.991	11.94	28.03	31.20	48.89	57.57	71.96	78.85
		1.5	5.655	13.35	31.22	34.09	52.49	63.09	76.88	85.20
		1.75	6.318	14.74	34.20	36.74	55.86	68.08	81.26	90.55
		2.0	6.974	16.09	36.99	39.14	59.03	72.61	85.24	94.97
		2.25	7.621	17.41	39.61	41.28	62.02	76.71	88.86	98.54
		2.5	8.255	18.67	42.04	43.23	64.84	80.44	92.14	101.4
FF-CF	1.00	1.0	4.461	11.23	26.83	31.31	50.55	58.81	76.99	87.56
		1.25	5.173	12.95	30.98	36.07	56.08	67.60	85.58	101.5
		1.5	5.906	14.76	34.90	41.15	61.39	76.33	93.45	116.4
		1.75	6.654	16.63	38.70	46.39	66.59	84.95	100.9	129.1
		2.0	7.411	18.54	42.45	51.71	71.75	93.47	108.2	142.6
		2.25	8.175	20.48	46.18	57.07	76.88	101.9	115.3	155.8
		2.5	8.943	22.45	49.92	62.43	82.00	110.2	122.3	168.7

Table 7. The effect of variation of thickness and h_1/h_0 on the frequency parameters, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ of skew Mindlin plates: $b/h_0=10.0$, $\nu=0.3$, CC-CC, $a/b=1.0$ and $M_x=M_y=14$

ϕ	h_1/h_0	Type	Modes							
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
15°	2.0	1	45.70	78.40	86.83	109.2	129.6	135.0	145.0	161.5
		2	48.46	82.69	91.36	114.4	135.7	141.3	151.1	167.9
		3	49.79	84.63	93.51	116.8	138.5	144.4	153.8	170.9
		4	42.58	73.02	81.50	102.8	121.6	127.7	137.4	153.4
		5	40.98	70.11	78.78	99.28	117.3	124.1	133.0	149.0
	1.5	1	40.58	71.09	79.09	100.0	120.3	125.3	134.1	150.5
		2	42.25	73.86	82.03	103.5	124.3	129.5	138.3	154.9
		3	43.08	75.18	83.48	105.1	126.3	131.6	140.2	157.0
		4	38.81	67.98	75.91	96.19	115.6	120.8	129.4	145.6
		5	37.92	66.37	74.32	94.18	113.1	118.6	126.9	143.0
	1.0		34.32	61.52	68.77	87.70	107.0	111.5	119.1	134.9
	30°	2.0	53.35	85.14	104.1	115.7	144.7	150.0	161.5	179.2
		2	56.19	89.44	108.6	120.9	151.0	155.8	167.7	186.2
		3	57.54	91.38	110.8	123.3	154.2	158.2	170.6	189.6
		4	50.11	79.79	98.40	109.2	136.6	142.6	153.7	170.2
		5	48.41	76.89	95.46	105.5	132.7	138.2	149.6	165.8
	1.5	1	47.69	77.56	95.75	106.3	135.5	138.8	150.9	168.7
		2	49.46	80.39	98.83	109.8	139.7	142.8	155.2	173.5
		3	50.34	81.74	100.3	111.5	142.0	144.6	157.3	175.9
		4	45.81	74.40	92.32	102.4	130.7	134.2	146.2	163.3
		5	44.85	72.76	90.59	100.3	128.4	131.6	143.7	160.7
	1.0		40.63	67.52	84.24	93.64	122.6	122.8	135.7	153.7
45°	2.0	1	70.49	103.2	133.0	139.4	164.8	183.5	195.6	215.2
		2	73.31	107.3	138.1	143.8	170.9	189.1	202.1	221.8
		3	74.62	109.2	140.5	145.6	173.6	191.5	205.1	224.8
		4	67.18	97.88	126.5	133.8	157.1	176.0	187.2	206.7
		5	65.39	94.93	122.9	130.5	153.0	171.6	182.8	202.3
	1.5	1	63.88	95.01	123.9	129.8	154.5	172.7	184.5	204.3
		2	65.76	97.89	127.4	133.0	158.7	176.9	189.0	208.9
		3	66.68	99.26	129.2	134.4	160.7	178.8	191.2	211.1
		4	61.85	91.76	119.8	126.2	149.8	167.9	179.3	199.0
		5	60.80	90.05	117.7	124.5	147.3	165.4	176.6	196.4
	1.0		55.26	83.84	110.8	116.2	139.6	157.1	168.0	187.8
	60°	2.0	110.1	145.9	177.9	210.2	212.7	241.8	262.6	274.0
		2	112.3	149.3	182.3	215.4	215.7	247.5	267.2	280.1
		3	113.2	150.7	184.2	216.7	217.7	250.0	269.1	282.8
		4	107.5	141.5	172.1	203.3	208.2	234.2	256.1	265.8
		5	105.9	138.8	168.7	199.3	205.4	229.8	252.2	261.1
	1.5	1	102.4	137.2	168.1	199.7	203.2	230.1	252.0	262.3
		2	104.1	139.8	171.4	203.5	205.9	234.8	255.7	266.8
		3	104.9	141.0	173.0	205.3	207.1	236.8	257.3	269.0
		4	100.5	134.1	164.3	195.2	200.0	225.7	247.5	256.9
		5	99.47	132.5	162.3	192.8	198.2	223.0	245.1	254.0
	1.0		91.35	124.3	153.7	183.9	188.3	213.7	235.5	244.3

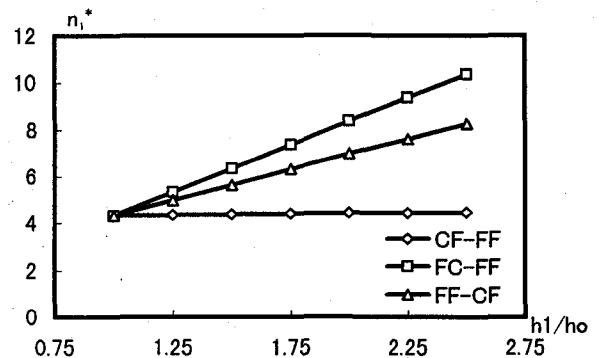


Fig. 4 The effect of the position of clamped edge and h_1/h_0 on frequency parameter of cantilevered skew Mindlin plates with linearly varying thickness: $\theta=45^\circ$, $a/b=1.0$ and $b/h_0=10$

Table 8 には、一方向に板厚が変化する片持ち Mindlin 斜板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ に与える変断面性状と固定辺の位置の影響が示されている。ここで、用いた変断面性状は、Table 7 で示した 5 種類である。また、斜角は 45° 、 $a/b=1.0$ 、 $b/h_0=10.0$ であり、変厚比は 2.0、1.5 と 1.0 を仮定している。これより、一方向に変断面性状を有する片持ち Mindlin 斜板の振動数パラメータでは、凸型断面を持つ場合の振動数パラメータが最も大きな値を示し、また変厚比が大きいほど変断面性状の影響が大きく現れてくる。固定辺の位置を最大厚さの辺 ($\xi=1.0$) あるいは変断面辺 ($\eta=0$ または 1.0) にとると、振動数パラメータが変厚比の増大とともに大きな値を示す。したがって、変厚比や板厚断面の形状を変化させれば、振動特性を効果的に変化させることが可能である。

Table 8. The effect of variation of thickness on the frequency parameters, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ of skew Mindlin plates: $\theta=45^\circ$, $a/b=1.0$, $b/h_0=10$, $\nu=0.3$ and $M_x=M_y=14$

Boundary condition	h1/h0	type	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
FC-FF	2.0	1	8.380	18.36	34.95	40.93	60.07	69.32	86.23	90.79
		2	9.099	19.89	38.02	44.37	64.61	75.07	91.94	97.77
		3	9.216	20.23	39.62	45.93	67.23	78.06	95.34	101.5
		4	7.541	16.57	31.64	37.09	55.21	62.87	79.96	82.82
		5	6.892	15.27	30.13	35.16	53.26	60.11	77.55	79.51
	1.5	1	6.366	14.52	30.05	34.97	53.05	61.23	77.37	81.99
		2	6.722	15.31	31.68	36.87	55.52	64.52	80.62	86.09
		3	6.793	15.51	32.57	37.78	56.99	66.30	82.57	88.43
		4	5.982	13.67	28.36	32.99	50.52	57.77	73.95	77.65
		5	5.688	13.07	27.59	32.00	49.51	56.26	72.55	75.93
	1.0	1	4.336	10.53	24.56	28.14	44.96	51.50	66.20	71.57
		Liew et. al. [2]	4.387	10.54	24.77	28.26	44.95	51.56	66.22	71.71
	2.0	1	6.974	16.03	36.99	39.14	59.02	72.61	85.24	94.97
		2	7.536	17.86	39.85	42.99	65.41	78.49	92.75	100.6
		3	7.764	18.57	40.68	45.04	68.70	80.76	96.75	103.2
		4	6.440	14.30	32.71	36.38	52.12	65.77	77.02	89.24
		5	6.117	13.19	30.35	34.88	49.08	61.99	73.49	85.94
FF-CF	1.5	1	5.655	13.35	31.22	34.09	52.88	63.09	76.88	85.20
		2	5.959	14.31	32.96	36.14	55.94	66.65	81.04	88.80
		3	6.084	14.72	33.60	37.20	57.80	68.15	83.28	90.40
		4	5.359	12.38	29.21	32.29	48.92	59.30	72.54	81.56
		5	5.183	11.80	28.06	31.24	47.34	57.20	70.63	79.45
	2.0	1	4.437	11.89	31.67	36.24	60.21	66.10	85.80	91.87
		2	4.876	12.95	34.27	38.88	63.82	70.85	91.13	97.15
		3	5.226	13.69	35.58	40.20	65.26	73.08	93.21	99.26
		4	3.939	10.71	28.82	33.51	56.35	60.84	79.59	86.02
		5	3.817	10.33	27.41	32.14	54.01	58.01	75.75	82.47
CF-FF	1.5	1	4.387	11.25	28.65	32.38	53.45	59.76	77.21	83.36
		2	4.650	11.87	30.13	33.99	55.62	62.71	80.40	86.89
		3	4.856	12.31	30.85	34.80	56.50	64.09	81.71	88.32
		4	4.105	10.59	27.11	30.74	51.23	56.66	73.77	79.68
		5	4.037	10.38	26.32	29.92	49.89	54.98	71.74	77.46

4. あとがき

本文では、Mindlin 板理論に基づく Spline 要素法を用いて、一方向に板厚が変断面性状を有する Mindlin 斜板の振動解析を行い、本手法の有用性について検討を行った。本文で得られた主な結果をまとめると、以下のようになる。

1) 本手法を用いれば、任意の境界条件を持つ変厚 Mindlin 斜板の振動解析ができ、また解の安定した収束性と精度が得られる。

2) 変厚 Mindlin 斜板の振動数は、変厚比、幅厚比や斜角などの影響を大きく受ける。とくに、幅厚比が大きいと直線的に変化するが、板厚の増大に伴い、横せん断変形と回転慣性の影響により、振動数パラメータは非線形な性状を示す。

3) 変厚板の振動数は、板厚断面の形状によっても大きな影響を受ける。その影響は、斜角が小さい場合に顕著に見られる。また、変厚板では、幅厚比、変厚比や板厚断面の形状を変化させれば、振動特性または剛性を効果的に変化させることが可能と思われる。

最後に、数値計算には、大同工業大学情報処理センターを利用させて頂きました。また、貴重な意見を頂いた査読者に謝意を表します。

Appendix

式(25)で示されるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 M\phi_x\phi_x &= (1/12)(h_0/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{00} \\
 M\phi_x\phi_y &= -\sin\theta(1/12)(h_0/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{00} \\
 M\phi_y\phi_y &= (1/12)(h_0/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{00} \\
 M\phi_y\phi_x &= -\sin\theta(1/12)(h_0/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{00} \\
 MW'W' &= I_{mr}^{001} J_{ns}^{00}
 \end{aligned}$$

また、式(24)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 K\phi_x\phi_x &= \sec^2\theta [I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} - (a/b)\sin\theta I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} - (a/b)\sin\theta I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \\
 &\quad + (a/b)^2 \sin^2\theta I_{mr}^{003} J_{ns}^{11}] + 0.5(1-\nu)(a/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{11} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(b/h_0)\kappa I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\
 K\phi_x\phi_y &= \sec^2\theta [-\sin\theta I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} + (a/b)I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} + (a/b)\sin^2\theta I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \\
 &\quad - (a/b)^2 \sin\theta I_{mr}^{003} J_{ns}^{11}] + 0.5(1-\nu)(a/b)I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} - (1-\nu)(a/b)I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} \\
 &\quad - 6(1-\nu)(b/h_0)\kappa \sin\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\
 K\phi_y\phi_y &= 6(1-\nu)(b/a)(b/h_0)^2 \kappa [(b/a)\cos\theta I_{mr}^{011} J_{ns}^{00} + \sin\theta \tan\theta (b/a)I_{mr}^{011} J_{ns}^{00} \\
 &\quad - \sin\theta \sec\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{01}] \\
 K\phi_y\phi_x &= \sec^2\theta [-\sin\theta I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} + (a/b)I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} + (a/b)\sin^2\theta I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \\
 &\quad - (a/b)^2 \sin\theta I_{mr}^{003} J_{ns}^{11}] + 0.5(1-\nu)(a/b)I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} - (1-\nu)(a/b)I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \\
 &\quad - 6(1-\nu)(b/h_0)\kappa \sin\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\
 K\phi_y\phi_y &= \sec^2\theta [\sin^2\theta I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} - (a/b)\sin\theta I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} - (a/b)\sin\theta I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \\
 &\quad + (a/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{11}] + 0.5(1-\nu)I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\
 KW'W' &= 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa [\sec\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{01} - (b/a)\tan\theta I_{mr}^{011} J_{ns}^{00}] \\
 KW'\phi_x &= 6(1-\nu)(b/a)(b/h_0)^2 \kappa [(b/a)\cos\theta I_{mr}^{101} J_{ns}^{00} + (b/a)\sin\theta \tan\theta I_{mr}^{101} J_{ns}^{00} \\
 &\quad - \sin\theta \sec\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{10}] \\
 KW'\phi_y &= 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa [\sec\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{10} - (b/a)\tan\theta I_{mr}^{011} J_{ns}^{00}] \\
 KW'W' &= 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa [(b/a)^2 I_{mr}^{111} J_{ns}^{00} + (b/a)^2 \tan^2\theta I_{mr}^{111} J_{ns}^{00} \\
 &\quad - (b/a)\tan\theta \sec\theta I_{mr}^{101} J_{ns}^{01} - (b/a)\sec\theta \tan\theta I_{mr}^{011} J_{ns}^{10} + \sec^2\theta I_{mr}^{001} J_{ns}^{11}]
 \end{aligned}$$

ここで、 I_{mr}^{ijk} と J_{ns}^{ij} は次式で表され、また数値積分には、Gauss の数値積分公式を用いている。

$$I_{mr}^{ijk} = \int_0^1 [d^i N_{m,k}(\xi) / d\xi^i d^j N_{r,k}(\xi) / d\xi^j] H(\xi)^k d\xi$$

$$J_{ns}^{ij} = \int_0^1 [d^i N_{n,k}(\eta) / d\eta^i d^j N_{s,k}(\eta) / d\eta^j] d\eta$$

参考文献

- 1) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by using B-spline functions. Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 301-308, 1979.
- 2) Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Wang, C.M.: Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory. J. Sound and Vibr., Vol. 168, pp. 39-69, 1993.
- 3) Ganesan, N. and Nagaraja Rao: Vibration analysis of moderately thick skew plates by a variational approach. J. Sound and Vibr., Vol. 101, pp. 117-119, 1985.
- 4) Kanaka Raju, K. and Hinton, E.: Natural frequencies and modes of rhombic Mindlin plates. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, pp. 55-62, 1980.
- 5) McGee, O.G. and Butalia, T.S.: Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew thick plates. J. Sound and Vibr., Vol. 176, pp. 351-376, 1994.
- 6) McGee, O.G., Graves, W.D. and Butalia, T.S.: Natural frequencies of shear deformable rhombic plates with clamped and simply supported edges. Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, pp. 1133-1148, 1994.
- 7) McGee, O.G. and Leissa, A.W.: Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilevered plates. J. Sound and Vibr., Vol. 144, pp. 305-322, 1991.
- 8) Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K.: Vibration characteristics of simply supported thick skew plates in three-dimensional setting. J. Appl. Mech., Vol. 62, pp. 880-886, 1995.
- 9) 板倉和則: 三次元斜交座標を用いた厚肉片持ち斜板の自由振動. 構造工学論文集, Vol. 41B, pp. 297-304, 1995.
- 10) 板倉和則: 任意境界条件を有する肉厚斜板の自由振動解析. 日本建築学会構造系論文集, 第 492, pp. 37-45, 1997.
- 11) Chopra, I. and Durvasula, S.: Natural frequencies and modes of tapered skew plates. Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 935-944, 1971.
- 12) Dokainish, M.A. and Kumar, K.: Vibrations of orthotropic parallelogrammic plates with variable thickness. AIAA J., Vol. 11, pp. 1618-1621, 1973.
- 13) Banerjee, M.M.: On the vibration of skew plates of variable thickness. J. Sound and Vibration, Vol. 63, pp. 377-383, 1979.
- 14) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration and buckling of plates of abruptly varying stiffnesses. Computers and Structures, Vol. 12, pp. 689-693, 1980.
- 15) Matsuda, H. and Sakiyama, T.: A Discrete method of analyzing the bending vibration of skew Mindlin plates with variable thickness. J. Sound and Vibr., Vol. 127, pp. 179-186, 1988.
- 16) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by B-spline functions. Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 301-308, 1979.
- 17) 水澤富作、加藤秀一: Spline 要素法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析について. 構造工学論文集, Vol. 45A, pp. 1-8, 1999.
- 18) Mikami, T. and Yoshimura, J.: Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates. Computers & Structures, Vol. 18(3), pp. 425-431, 1984.
- 19) Mizusawa, T.: Vibration of rectangular Mindlin plates with tapered thickness by the spline strip method. Computers & Structures, Vol. 46(3), pp. 451-463, 1993.

(1999年9月17日受付)