

積層ゴムの簡易解析モデル

Simplified numerical modeling of laminated rubber bearing

塩尻 弘雄*¹, Ben-Jamaa Sami *², 野本臨也*³増田耕一*⁴, 横川英彰*⁵

Hiroo SHIOJIRI, Sami, BEN-JAMAA, Rinya NOMOTO,

Koichi MASUDA, Hideaki YOKOKAWA

*¹工博, 日本大学教授, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 千代田区神田駿河台)*²工修 日本大学理工学研究科 (同上), *³ 日本大学理工学研究科 (同上),*⁴工修 オイレス工業技術開発部 (〒326-0327 足利市羽刈町 1000),*⁵工修 オイレス工業支那設計部 (〒105-8584 港区大門 1 丁目 3 番 2 号芝細田ビル)

A special finite element method is developed for the 2 and 3 dimensional analysis of rubber bearings considering large strain, visco-elasticity, and damage, where one rubber sheet is regarded as 1 element. Numerical modelings for laminated rubber bearings using a conventional finite element method, and the special ones are conducted. The computational time and stability of the two methods are compared. The effects of constitutive equations, and shape functions on the computational results are discussed. Key Words: rubber bearing, large strain, finite element method, three dimensional analysis

キーワード: 積層ゴム, 大歪み, 有限要素法, 3次元解析

1. はじめに

積層ゴムは、構造物等の免震装置として今後ますます広範囲に使用されると考えられ、適切な挙動予想法が望まれる。積層ゴムの有限要素法による解析においては、通常ゴムを超弾性体と仮定し、汎用コードや専用コードによる解析が行われている¹⁾⁵⁾。しかし、かなりの計算量、容量を必要とする。より簡易なマクロモデルも提案されているが⁶⁾、入力すべき構造データは、ゴム等の物性のみでなく構造形状にも依存し、任意の形状、ゴム物性に対して精度の高い解を得るためには、入力データを別途正確に評価する必要がある。ここでは、積層ゴムの1層を1要素と見なした専用の特殊な有限要素法をもちいることとする⁸⁾。この方法は、形状関数の次数を任意に設定できるので、必要とする精度で効率よく計算ができる。通常の有限要素法と同様、ゴムの材料物性データのみ入力すればよく、形状等の効果は自動的に考慮される。ゴムの歪み速度依存性、荷重履歴依存性などの表現も容易である。

今回は、構成式には、超弾性に加え、Simo等の理論⁹⁾¹⁰⁾を適用して損傷や粘弾性を考慮し、非弾性挙動を再現することを試みる。種々な条件下でその特殊な有限要素法で計算を行い、実験値¹¹⁾や汎用コードとの比較等により、その特性を明らかにする。

2. 解析法

内挿関数を設定するにあたって、鋼板は剛体とし、鋼板の埋め込み座標軸を t, s, r 、(最初 は全体座標 x, y, z に一致)、 t, s, r 軸まわりの回転をそれぞれ、 θ, ϕ, ψ 、回転をあらわすテンソルを Q とする (図-1)。 Q は次式で与えられる。

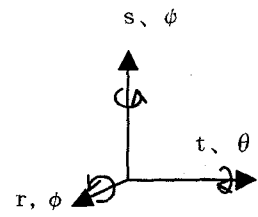


図-1 座標系

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \sin \phi & \sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \theta & +\cos \phi \cos \theta & \\ \cos \phi \sin \theta \cos \phi & \cos \phi \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \\ +\sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta & \end{bmatrix}$$

(1)

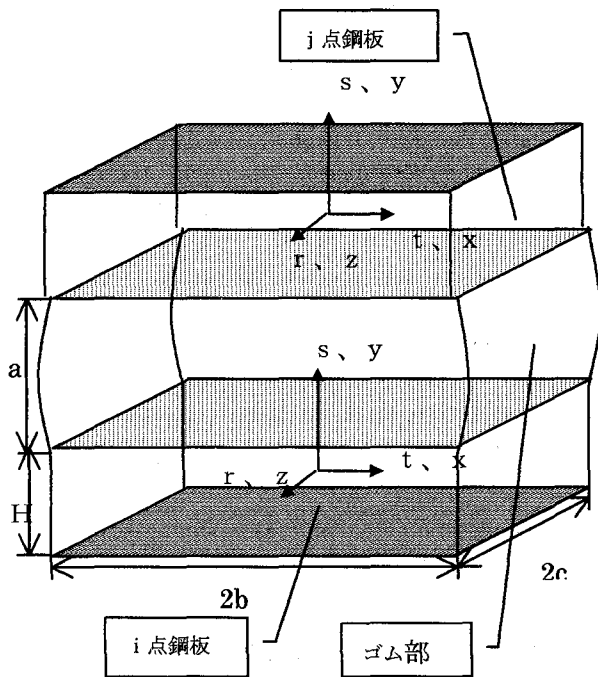


図-2 要素概念

内挿関数としては、上下縁での変位と圧力を一次式で内挿したもの、上下縁で境界値がゼロになるようフーリエ級数を用いた内挿関数を足し合わせることによってゴム内部の変位と圧力を内挿する。上下縁での節点番号を i 、 j とし、節点に関連する量は右下添え字に節点番号をつける。

u_1, u_2, u_3 を鋼板中心の並進変位、 P を圧力、 t, s, r を物質座標系、 H を鋼板の厚さ、 a をゴム一層の厚さ、 b をゴムの半幅とし、各ゴム層の上端の変位がそのゴム層の上部の鋼板の下端の変位と一致し、ゴム層の下端の変位がそのゴム層の下部の鋼板の上端の変位と一致することとすれば、ゴム、各層における変位と圧力の内挿関数は、以下のように与えられる。なお、ゴム層の変位の内挿関数の、 t と r に関する多項式の次数をそれぞれ N, L, s に関するフーリエ級数の項数を M とし、ゴム層の圧力の内挿関数の、 t と r に関する多項式の次数をそれぞれ ND, L, D, s に関するフーリエ級数の項数を MD としている。

$$\begin{aligned} {}^n u_k(t, s, r) = & \frac{a-s}{a} \left\{ {}^n u_{k1} + t({}^n Q_{k1} - 1) + \frac{H}{2} {}^n Q_{k2} + r {}^n Q_{k3} \right\} \\ & + \frac{s}{a} \left\{ {}^n u_{kj} + t({}^n Q_{k1} - 1) - \frac{H}{2} {}^n Q_{k2} + r {}^n Q_{k3} \right\} \\ & + \sum_{l=0}^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N b_{lmn} \left(\frac{t}{b} \right)^n \left(\frac{r}{c} \right)^l \sin \left(\frac{m\pi}{a} s \right), \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} {}^n P(t, s, r) = & \frac{a-s}{a} \sum_{l=0}^{LD} \sum_{n=0}^{ND} e_{ln}^i \left(\frac{t}{b} \right)^n \left(\frac{r}{c} \right)^l \\ & + \frac{s}{a} \sum_{l=0}^{LD} \sum_{n=0}^{ND} e_{ln}^j \left(\frac{t}{b} \right)^n \left(\frac{r}{c} \right)^l \\ & + \sum_{l=0}^{LD} \sum_{m=1}^{MD} \sum_{n=0}^{ND} e_{lmn} \left(\frac{t}{b} \right)^n \left(\frac{r}{c} \right)^l \sin \left(\frac{m\pi}{a} s \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Hellinger-Reissner の変分原理を用いるものとして、超弾性体モデルとしては、ゴムの体積ひずみは通常の弾性であり、せん断ひずみはエントロピー弾性であることを考えて、次のような歪みエネルギー関数もちいる。

$$W = W_B(\hat{I}_1, \hat{I}_2) - f(I_3)P - g(P) \quad (4)$$

ここで、 I_1, I_2, I_3 は歪みの不変量、 $\hat{I}_1 = I_1 / I_3^{1/3}$ 、 $\hat{I}_2 = I_2 / I_3^{2/3}$ 、であり、今回は

$$f(I_3)P = (\sqrt{I_3} - 1)P, \quad g(P) = \frac{P^2}{2FK}$$

FK は体積弾性率である。

増分形の釣り合い方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \int_{v_0} \frac{\partial^2 g({}^n P)}{\partial P^2} \Delta P \delta \Delta P dv + 2 \int_{v_0} \frac{\partial f(I_3)}{\partial I_3} {}^n I_3 C_{ij}^{-1} \Delta \bar{\gamma}_{ij} \delta \Delta P dv \\ = - \int_{v_0} \left(\frac{\partial g({}^n P)}{\partial P} + f({}^n I_3) \right) \delta \Delta P dv \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} - 2 \int_{v_0} C_{ij}^{-1} \frac{\partial f(I_3)}{\partial I_3} {}^n I_3 \Delta P \delta \Delta \bar{\gamma}_{ij} dv = \int_{S_0} \sigma_i \delta u_i ds \\ \int_{v_0} D_{ijkl} \Delta \bar{\gamma}_{kl} \delta \Delta \bar{\gamma}_{ij} dv + \int_{v_0} {}^n t_{ij} \delta \Delta \hat{\gamma}_{ij} dv + \int_{v_0} {}^n t_{ij} \delta \Delta \bar{\gamma}_{ij} dv \end{aligned} \quad (5b)$$

ここで、 D_{ijkl} : 4 階のテンソル、 t_{ij} : キルヒホッフの応力テンソル、 C_{ij} : 変形テンソル、 $\Delta \bar{\gamma}_{ij}, \Delta \hat{\gamma}_{ij}$: 線形・非線形歪み増分、 σ_i : 表面応力、 δ : 仮想量である。

式(5a)の4 階のテンソル D_{ijkl} はゴムを超弾性体と見なした場合、式(6)で表される。

$$D_{ijkl} = \frac{\partial^2 W_B}{\partial \gamma_{kl} \partial \gamma_{ij}} - 2 \frac{\partial}{\partial \gamma_{kl}} \left[C_{ij}^{-1} \frac{\partial^2 f(I_3)}{\partial I_3} I_3 P \right] \quad (6)$$

損傷を考慮する場合、Simoら⁶⁷⁾のダメージパラメータ ϕ_S を積層ゴムへの適用を考えて、ここでは7式のように定義する。

$$\phi_s = \max \frac{1}{G_0} \sqrt{\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial W_B}{\partial \gamma_{ij}} \right)^2} \quad (7)$$

また、損傷を考慮した有効歪み $\pi^{ij'}_{(s)}$ は(8)式で表される。

$$\pi^{ij'}_{(s)} = \frac{1}{G_0} \left[\beta + (1-\beta) \frac{1 - e^{-\frac{\phi_s}{\alpha}}}{\frac{\phi_s}{\alpha}} \right] \frac{\partial W_B}{\partial \gamma_{ij}} \quad (8)$$

ただし α はダメージ指数を表すパラメータ、 β はダメージ限界を表すパラメータである。

さらに粘弾性を考慮した第2種のPiola-Kirchhoffの応力テンソル t_{ij} は、今回ゴムのせん断歪みのみに粘弾性を適用するものとするれば、(9)式で表される。

$$t_{ij} = -2C_{ij}^{-1} \frac{\partial f(I_3)}{\partial \lambda_3} I_3 P + \int_0^t \left\{ G_\infty + (G_0 - G_\infty) e^{-\frac{t-s}{\nu}} \right\} \left(\pi^{ij'}_{(s)} \right) ds \quad (9)$$

従って、4階のテンソル D_{ijkl} は(10)式のように表される。

ただし ν は緩和時間である。

$$D_{ijkl} = \bar{G} (1-\beta) \frac{\frac{\phi_s}{\alpha} e^{-\frac{\phi_s}{\alpha}} - 1 + e^{-\frac{\phi_s}{\alpha}}}{\left(\frac{\phi_s}{\alpha} \right)^2} \frac{\partial W_B}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial}{\partial \gamma_{kl}} \left(\frac{\phi_s}{\alpha} \right) + \bar{G} \left[\beta + (1-\beta) \frac{1 - e^{-\frac{\phi_s}{\alpha}}}{\frac{\phi_s}{\alpha}} \right] \frac{\partial}{\partial \gamma_{kl}} \left(\frac{\partial W_B}{\partial \gamma_{ij}} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \gamma_{kl}} \left[c_{ij}^{-1} \frac{\partial^2 f(I_3)}{\partial \lambda_3} I_3 P \right] \quad (10)$$

$$\text{ここで} \quad \bar{G} = \frac{1}{G_0} \left\{ G_\infty + \frac{\nu}{\Delta t} (G_0 - G_\infty) e^{-\frac{\Delta t}{\nu}} \right\}$$

3. 計算例

3.1 計算法による相違

まず、本方法、および汎用コード (COSMOS M) による

2, 3次元解析結果を比較する。対象とする積層ゴムは、平面寸法 200mm×200mm, ゴム層厚 10mm, 鋼板厚さ 6mm, 層数4の角型モデルである。物性としては、Mooneyモデル $W_B = C_1 (\hat{I}_1 - 3) + C_2 (\hat{I}_2 - 3)$ を用いるものとし、

$C_1 = 0.352 \text{MPa}$, $C_2 = 0.088 \text{Mpa}$ とした。

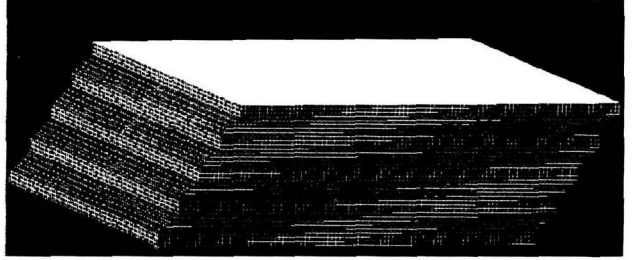
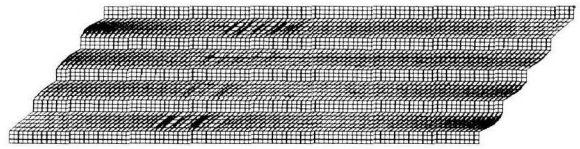


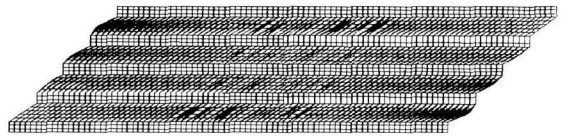
図-3 本方法による変形の透視図

図-3に、本方法による3次元変形図、図-4に汎用コードと、本方法によるせん断歪み 100%時の変形図を示す。本法における内挿関数の次数は、 $M=N=L=MD=4, ND=LD=3$ (2次元解析の場合は $L=LD=1$) である。本法と、汎用コードの変形状態は類似している。

なお、本方法については、ゴムは1要素であるが、ゴム表面にメッシュが描かれていたものとして、その点の変位を内挿関数により求め、その状態を示している。



a) 本方法による変形図 (100%)



(b) 汎用コードによる変形図 (100%)

図-4 本方法と汎用コードの変形図

図-5に汎用コードと本方法による2, 3次元解析による水平変位—水平荷重の関係を示すが、ほとんど一致している。

図-6に、本方法を用いた、2次元と3次元解析による水平変位—鉛直変位の関係式を示す。鉛直方向変位に関しては2次元解析と3次元解析の差が生じる。なお、ここで、せん断応力は、水平力をゴムの初期断面積で除したものを指し、せん断歪みは、積層ゴム上下端の変位差をゴムの初期の層厚で除したものを呼ぶ。

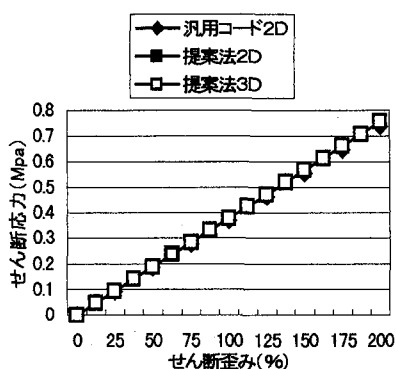


図-5 解析法と水平変位特性

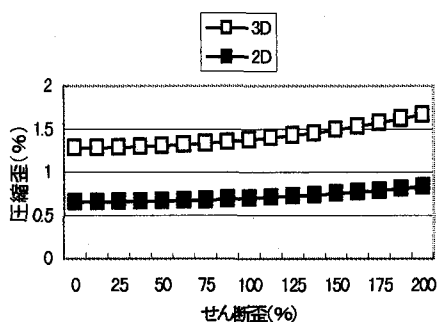


図-6 解析法と鉛直変位

またここで圧縮歪みと呼ぶのは、積層ゴム上下端の鉛直方向の変位差を、ゴムの初期層厚で除したものである。本方法では、200% 水平歪みまで、20 ステップで計算を行った(最初の3ステップは、鉛直荷重20Nの载荷に使われる)。所要の計算機メモリ容量は、3次元解析でも5メガバイト程度である。計算時間は汎用コードよりかなり短い。2次元解析で約数十分の一、3次元解析では、100分の1以下となる。

3. 2 角型天然ゴム積層ゴムのシミュレーション

実験モデル⁴⁾ (層数5、一層のゴム厚 $a=0.009(\text{m})$ 、幅 $b=0.070(\text{m})$ 、奥行き $c=0.070(\text{m})$ 、鋼板の厚さ $h=0.0005(\text{m})$) を対象として、実験値と3D,2Dモデルとの比較を行った。 W_B の具体的なモデルとして前記のMooneyモデルと、指数関数モデル⁴⁾：

$$W_B = A_1 + A_2 + B_1(\hat{I}_1 - 3) + B_2(\hat{I}_2 - 3) + C_1(\hat{I}_1 - 3)^2 + C_2(\hat{I}_2 - 3)^2 + C_3(\hat{I}_1 - 3)^3 + C_4(\hat{I}_2 - 3)^3 + D_1 e^{E_1(I_1 - 3)} + D_2 e^{E_2(I_2 - 3)}$$

を用いた。内挿関数の次数を変えた場合の水平方向の変位と力の関係の比較を図-7に示す。ここで、凡例の記号の数字はそれぞれ、L,M,N,LD,MD,NDの値をあらわす。

最大30ステップ計算し、各ステップ、Newton法で5回以内に収束したものがプロットされている。せん断応力とせん断変位との関係式は次数に依存せず、実験値と一致している。

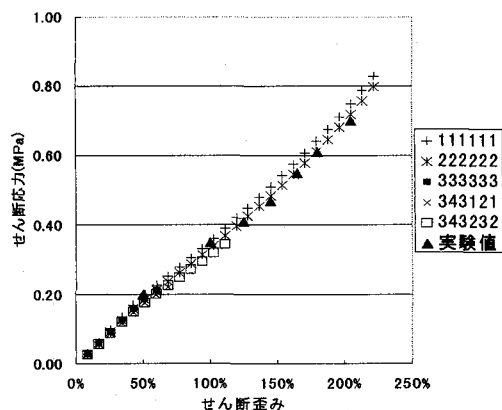


図-7 次数の変化の影響
(せん断歪とせん断応力の関係)

一方、次数とせん断歪み-圧縮歪みの関係は次数に大きく依存し、ある程度の次数がないと実験値よりも、圧縮ひずみを過小に評価する(図-8)。

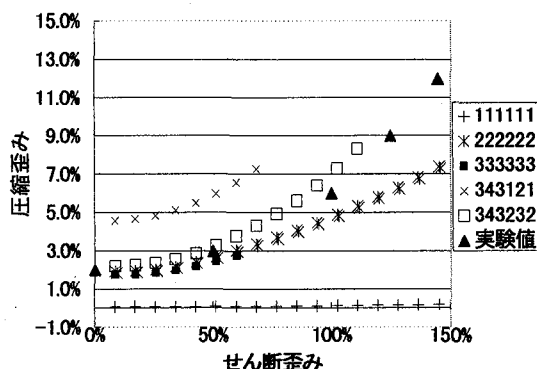


図-8 次数の変化の影響
(せん断歪みと圧縮歪みの関係)

2次元解析と3次元解析の比較(L,M,N,LD,MD,ND、を、それぞれ、3,4,3,2,3,2とした。ただし2次元解析では、 $L=LD=1$)では、せん断歪みと圧縮歪みの関係については、両者はあまり相違はない。(図-9)

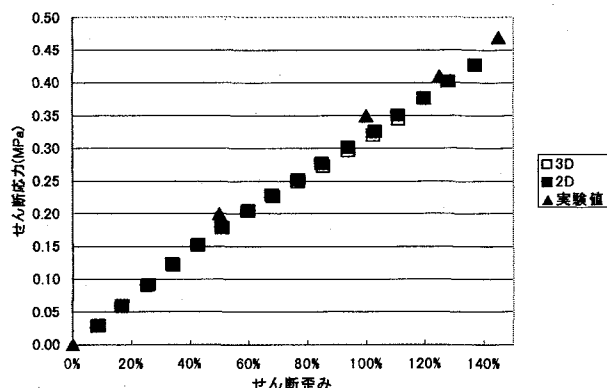


図-9 2次元解析と3次元解析の比較
(せん断歪みとせん断応力の関係)

せん断歪みと圧縮歪みの関係では差が生じ、2次元解析は、圧縮歪みが小さくなる(図-10)。しかし、せん断歪みのない場合の圧縮歪みの差は大きい、せん断歪みの増加に伴う歪みの増加については大きな差はない。

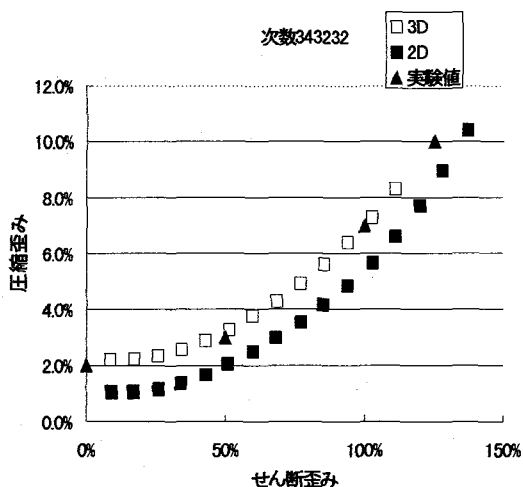


図-10 2次元解析と3次元解析の比較
(せん断歪みと圧縮歪みの関係)

せん断歪みの増加に伴う、中間の各鋼板の平均勾配の変化を比較したのが図-11であるが、これについては、2次元解析と3次元解析で大きな差はない。

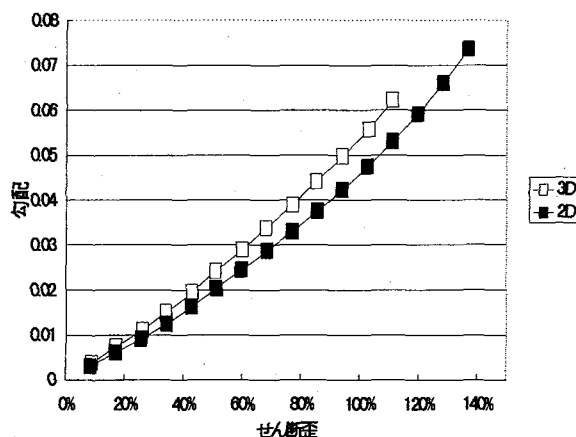


図-11 2次元解析と3次元解析の比較
(鋼板の勾配)

圧縮歪みは、ゴム自体の体積変化、鋼板によって拘束されていない側面の孕みだし、及び、鋼板の傾斜に伴い発生するせん断変形の軸方向成分、の3種からなると考えられる。このうち、ゴム自体の体積変化によるものは、孕みだしによるものに比べて、通常小さいとされている。孕みだしによる圧縮歪みは、孕みだしを起こしうる面が増える3次元解析の方が大きくなる。せん断歪みに鋼板の平均勾配を乗じたものを、せん断変形の軸方向成分とし、全圧縮歪みからそれを差し引いたものが、孕みだしによる圧縮歪みと考え、全圧縮歪みにしめる割合を示したのが図-12で

ある。せん断歪みの増加に伴い、孕みだしによる圧縮歪みの割合は減少し、大部分がせん断変形によるものとなる。せん断変形、および、勾配は、2次元解析と3次元解析で大きな差がないので、これが、せん断変形の増加に伴う圧縮歪みの増加が類似している理由と考えられる。

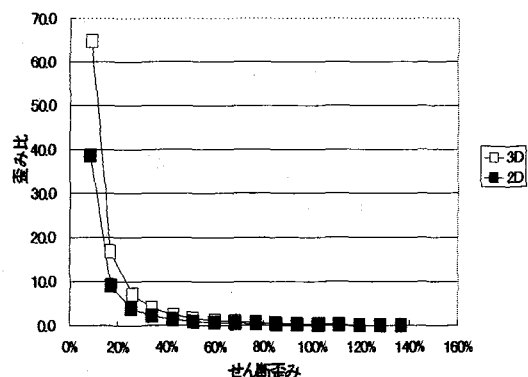


図-12 2次元解析と3次元解析の比較
(歪み比)

Mooney モデルと指数モデルの比較は、ひずみがそれほど大きくない場合は大差ない(図-13)。

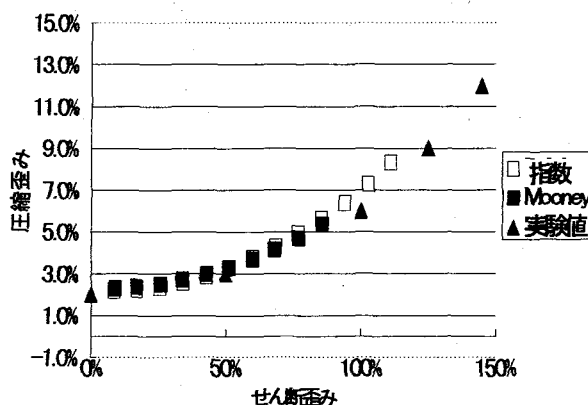


図-13 指数モデルと Mooney モデルの比較

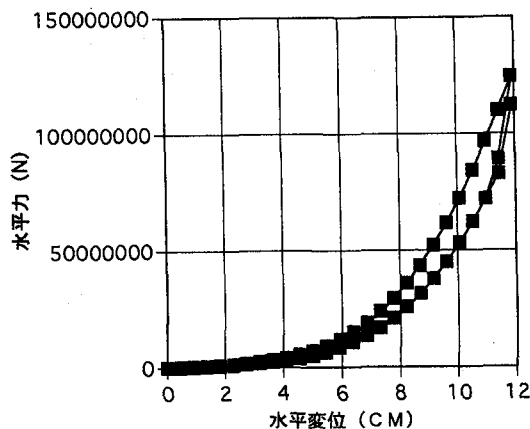
3. 3 損傷および粘弾性モデル

図-14 に、損傷モデル導入した場合の、水平載荷時と除荷時の変位と荷重関係例、図-15 に、損傷と粘弾性モデル導入した場合履歴曲線例($\alpha = 2 \times 10^8$, $\beta = 0.4$,

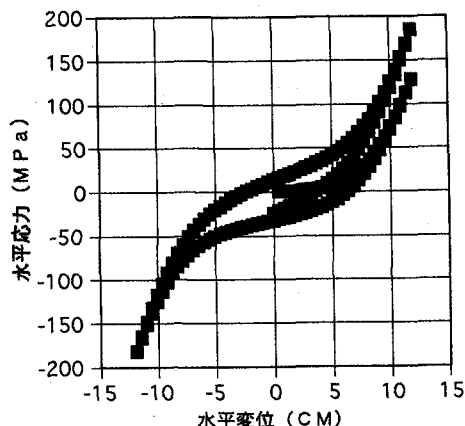
$\nu = 10s$)を示す。大歪みを加えた場合の除荷時の剛性低下、履歴によるエネルギー吸収など、積層ゴムの非弾性挙動がある程度表現できることが窺える。

損傷、粘弾性を考慮したモデルを用い、高減衰ゴムの各歪みレベルにおける剛性と減衰⁸⁾を再現することを考える。損傷、粘弾性パラメータを、ニューロ・カルマンフィルタ⁹⁾で同定して計算した結果を図-16に示す。おお

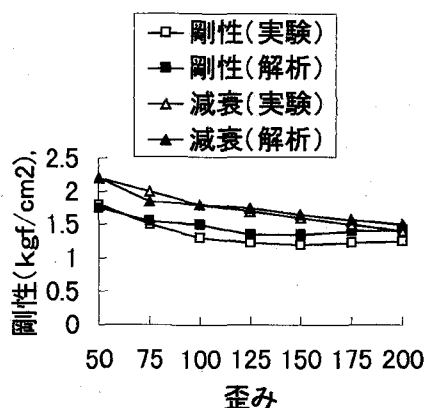
むね良好に再現しているといえる。



図一14 損傷モデル導入時の水平載荷挙動



図一15 粘弾性、損傷モデル導入時の履歴挙動



図一16 実験値⁸⁾と解析結果の比較
(等価剛性、等価減衰)

4. まとめ

積層ゴム解析のため1層を1要素とし、大歪み損傷等が扱え、形状関数の次数を任意に設定できる特殊な有限要素法を開発し、既存のFEM、実験値と比較して妥当性を確認した。また、損傷等の効果が表現できることを確認した。この方法は、簡易で計算量も小さく、設計や積層ゴムの力学メカニズムの検討等に便利と考えられる。

今後、内部鋼板の変形、より一般的な形状への対応、等が課題である。

参考文献

- 1) Shiojiri, H., Mazda, T., and Shimizu, H.: Numerical method for analysis of laminated elastomer bearing, Trans. 11th SMIRT, Vol. K2, pp175-180, 1991
- 2) 松田泰治、矢花修一、塩尻弘雄: 有限要素法による免震用積層ゴムの大ひずみ解析、電力中央研究所研究報告U92061, 1993
- 3) 松田昭弘: 選択積分法を用いた積層ゴムの有限要素立体解析、日本機械学会論文集A編64巻617号、pp132-140, 1998
- 4) Seki, W., Fukahori, Y., Iseda, Y., and Matsunaga, T.: A Large-Deformation Finite-Element Analysis for Multilayer Elastomeric Bearings, 133th American Chemical Society, pp856-869, 1987
- 5) Takayama, M., Tada, H., and Tanaka, R.: Finite Element Analysis of Laminated Rubber Bearing Used in Base Isolation System, Rubber Division, American Chemical Society, 1990
- 6) 松田泰治、塩尻弘雄: 伝達マトリックスによる積層ゴムの簡易解析、構造工学論文集Vol.39B, pp203-209, 1993
- 7) 日本建築学会: 免震構造設計指針, pp545-563, 1993
- 8) 塩尻弘雄、野本臨也、大之本寛: 積層ゴムの解析モデル、計算工学講演会論文集Vol.4, pp861-862, 1999
- 9) Simo, J. C.: On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects", Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 60pp153-173, 1987
- 10) Simo, J. C., and Taylor, R. L.: A three-dimensional finite deformation visco-elastic model accounting for damage effects, UCB/SESM/85-02, SESM, U.C. Berkeley, 1985
- 11) 大島靖樹: 高減衰ゴムを用いた免震構造物の地震応答評価に関する研究、長岡技術科学大学博士論文、1996
- 12) 村瀬治比古、小山修平、石田良平、"パソコンによるカルマン・ニューロコンピューティング" 森北出版、1994

(1999年9月17日受付)