

不確定性を考慮した非比例減衰系の同定と構造物の性能評価への応用

Performance Evaluation of Non-proportionally Damped Structures considering Uncertainty

貝戸清之*, 阿部雅人**, 藤野陽三***

Kiyoyuki KAITO, Masato ABE, Yozo FUJINO

*工修 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻 博士課程 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

**Ph.D 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻 助教授 (同上)

*** Ph.D 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻 教授 (同上)

The purpose of the paper is to construct a performance evaluation method for structures considering uncertainty in measurement and modeling. At first, uncertainty in measurement of identified modal parameters is investigated quantitatively with certain confidence intervals using Bootstrap analysis. Next the performance evaluation method considering uncertainty is applied to investigate a base-isolated bridge where strong motion records have been obtained recently. That starts with construction of an identification method for non-proportionally damped system for structures with vibration control devices. Further, physical properties, such as stiffness and damping, considering uncertainty are calculated using the identified modal parameters and known physical parameters. By comparing the identified physical properties and predicted physical properties from the physics based model, it is shown that the performance of base-isolated bearings is not contradicted with design values.

Key Words : Uncertainty, Non-proportionally damped system, Bootstrap analysis, Performance evaluation, Vibration measurement

1. はじめに

構造物は非常に複雑な系であり、その挙動を解析のみから予測することは困難である。そこで、構造物の実挙動を計測し、計測結果を適宜、解析に取り込むことができれば、構造物の性能評価を行う際に、有効な手段となり得る。従来は、構造物の実挙動を計測する上で、センサー等、主にハード面に限界があり、実用化されるに至らなかった。ところが、近年、センサーの計測精度が向上するとともに、膨大なデータの処理が可能なコンピュータ技術が急速に進歩している。この進歩を受け、構造物から実挙動を精緻に把握することが現実的に可能となってきた。それに伴い、実挙動計測による構造物の性能評価や健全度診断、さらには環境問題への応用が試みられている¹⁾。

計測される量としては、振動、変形、騒音等、様々なものが目的に応じて選定される。なかでも振動計測は、構造物の固有振動数、減衰比やモード形といった動特性を反映した加速度や変位等を得ることができる。また、構造物が使用状態であっても、計測が可能であるので、他の手法と比べ、計測を容易に行

うことができる。そのため、短期的で単発的な計測のみならず、長期的で継続的な計測を実施する際にも有効な手法となる。したがって、振動計測結果は、設計から維持管理までの構造物の生涯をとおして、あらゆる問題に対する重要な判断基準を与える情報となり得る可能性がある²⁾。

振動計測結果を用いた構造物の性能評価における最大の難点は、計測や解析で生ずる不確定性をいかに取り扱うかである。したがって、性能評価を行うためには、不確定性の要因を予め把握し、定量化したうえで、結論に対する信頼性を明確にする必要がある。不確定性の要因について考えると、例えば、計測における不確定性がある。これは、計測器の問題によるもので、その感度および精度や設置法により、必然的に生ずるものである。また、土木構造物特有の問題として、図1の斜線部に示すように振動計測が可能な領域が狭いことがあげられる。これは、振動計測が可能な時間が構造物の生涯時間と比べ、短く、計測点数が構造物の自由度と比べ、少ないことによる。したがって、土木構造物においては、計測での時間的な制約や空間的な制約から計測における不確定性が生ずる。さらに、不確定性の要因

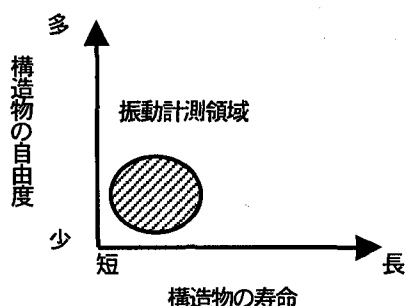


図1. 可能な振動計測領域

として、モデル化における不確実性が考えられる。これは、解析を行う際に、実構造物に対し、モデル化を行うことに起因する。例えば、構造物を有限自由度でモデル化することや、周辺の環境条件をモデルに取り込めないことによる。

本研究では、以上を踏まえ、不確実性を定量的に考慮した構造物の性能評価手法の構築を行う。はじめに、構造物の一般的な性能評価の枠組みのなかで、上述した2つの要因に基づく不確実性が、どのような流れで最終評価に影響を及ぼすかについて示す。計測における不確実性に関しては、振動計測結果から得られる解析結果が、ある母集団分布に従う確率変数であることから、その信頼性区間を算出することで、定量化を計る。一方、モデル化における不確実性に関しては、評価の対象となる量の材料特性や環境条件特性に関して得られる試験結果等を利用して、算出する。

一例として、不確実性を考慮した性能評価手法を地震時の振動計測結果に基づく免震橋における免震支承の性能評価へ応用した。特に、近年、免震および制振装置を付加した構造物が増加傾向にあり³⁾、その制振・免震性能の評価に対する必要性は高まっている。実際に、免震支承に関して、地震時の振動計測結果⁴⁾⁵⁾に基づいた性能評価が、行われた事例もある⁶⁾⁷⁾。ここで留意すべきは、制振装置を付加した構造物は、局所的に高い減衰が付加された非比例減衰系となる点である。このような場合には、非比例減衰を考慮したモデル化を行う必要がある。しかしながら、現状では、減衰のモデル化が困難である⁸⁾ことから、構造物は比例減衰系として扱われることが多い。また、非比例減衰系ではモード形が複素数となり、通常のモード解析を適用することができず、振動計測結果から動特性を得ることが難しい。そこで、非比例減衰系を対象とした動特性の同定手法についても構築を行った。

2. 構造物の性能評価における不確実性

構造物の性能評価は、一般に振動計測結果と物理モデルに基づく解析結果の比較により行われる。性能評価の流れを図示すると、図2のフローチャートのようになる。この手順の流れの概略を説明する。振動計測に基づく手順は、振動計測結果から動特性の同定を行い、動特性を物理量へ変換することで行われる。これは、図中の手順1~3に対応する。一方、解析に基づ

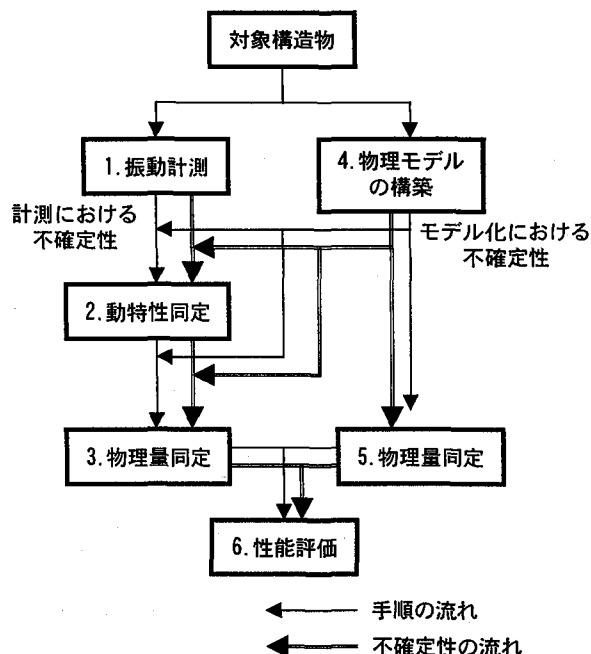


図2. 構造物の性能評価の枠組み

く手順では、はじめに構造物の物理モデルを構築し、それをもとに物理量が算出される。これは、図中の手順4、5に対応する。最後に両物理量を比較することで性能評価が行われる。これは手順6に対応する。

さらに、図中には、計測とモデル化における不確実性とその流れを示した。図より、2つの不確実性が、最終評価の段階まで累積されることが確認できる。この段階で、得られた両物理量の違いが、有意な差であるのか、不確実性の範囲であるのかを定量的に判断することが重要である。以下に各段階における不確実性について述べる。番号は図2と対応させた。

1. 振動計測結果には計測における不確実性が生ずる。
2. 同定された動特性には、計測における不確実性が含まれる。
同時に構造モデルとモード次数を決定する段階で、モデル化による不確実性が生ずる。
3. 減衰や剛性等の物理量は、同定された動特性から算出されるため、この段階においても計測における不確実性が混入する。同時に構造モデルと自由度を決定する段階で、モデル化における不確実性が生ずる。
4. モデル化における不確実性は、構造モデルと、その次元を決定する際に生ずる。
5. 物理モデルから予測された減衰や剛性には、モデル化における不確実性のなかでも、振幅や環境条件による部材特性の変化による不確実性が生ずる。
6. 判断における不確実性が生ずる。

以上が、各段階における不確実性である。本研究では、上記の2、3段階に含まれる計測における不確実性に関しては、Bootstrap法⁹⁾を応用し、信頼性区間を算出することで定量化を試みる。一方、5段階に含まれるモデル化における不確実性に関しては、実際の免震支承の工場載荷試験結果を用い、その履歴特性から振幅による剛性の不確実性を算出した。また、剛性

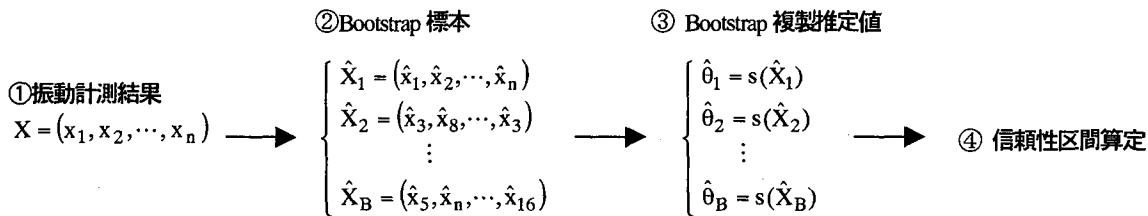


図-3. Bootstrap 法の適用手順

および減衰に影響を及ぼす要因として摩擦係数についても現実性を考慮し、不確定性を算出した。ちなみに、本研究では、計測器による計測における不確定性や、モデル化における不確定性が同定結果に及ぼす影響に関しては、検討していない。ただし、計測器による計測における不確定性に関しては、その要因、不確定性が規定されている¹⁰⁾。また、構造モデルに関しては、振動計測結果より確定的に得た。ただし、モデル化における不確定性に関しては、不確定性を最小にするという観点から、最適なモデル選定を行う応用を考えている。

3. Bootstrap 法による計測における不確定性の算出

本章では、振動計測結果から同定される動特性に含まれる計測における不確定性の算出について検討する。信頼性区間の算出に帰着される不確定性の算出は、確率変数の母集団分布が得られれば、容易に算出することができる。しかしながら、母集団分布が得られることは希であり、一般的には何らかの分布、多くの場合は正規分布で近似することになる。これは、世の中の多くの事象が、正規分布で表せることが多いことと、母集団分布を仮定しないノンパラメトリック問題は、理論的な取り扱いが非常に困難となることによる。しかしながら、実際に動特性の母集団分布は未知である。もちろん、正規分布を仮定できる場合もあると考えられるが、ノンパラメトリック問題として扱ったうえで、その仮定が妥当かどうか、判断を下すことが望ましい。

これに対し、Bootstrap 法⁹⁾は、信頼性区間を母集団分布の仮定なしに、算出することができる手法である。この手法は、標本から得られる経験分布から真の母集団分布を推定する。その過程では、複雑な理論や数式に基づく解析は必要なく、大量の反復計算でそれらを代用する。したがって、正規分布を仮定していた多くの問題に対して、より厳密な信頼性区間の算出を可能にする。さらに、同定問題への応用を考えた場合、計測対象が変化しても、母集団分布の仮定が不要であるため、計算を自動化できるという利点がある。そこで、計測における不確定性の算出に対して、Bootstrap 法の応用を試みる。

はじめに、Bootstrap 法の一般的な適用手順について述べる。次いで算出される Bootstrap 分布と真の母集団分布との近似精度を証明する。最後に同定結果に含まれる計測における不確定性の算出に対する Bootstrap 法の応用手順を示す。

3-1. Bootstrap 法の適用手順

Bootstrap 法は、リサンプリング法の 1 つとして考えることができる。したがって、その適用に関しては、「標本の要素のひとつひとつが同一の確率分布から等しい確率で、独立に抽出されたものである。」との仮定が必要となる。この仮定のもと、Bootstrap 法の一般的な適用手順を図 3 と併せて以下に説明する。

①未知の母集団分布 F から標本 X を得る。得られた標本が従う経験分布関数 F_n により母集団分布 F を推定する。図中、 x は標本要素であり、 n は総要素数である。

②既知の確率分布 F_n を持つ母集団から、大きさ n の標本 $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_B$ を B 回反復抽出する。このとき各要素の選定確率は、仮定より、全て等しく $1/n$ でなければならない。 B 個の標本を以下では Bootstrap 標本と称する。

③各々の Bootstrap 標本に対して同一の解析を行い、推定値 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_B$ を合計 B 個得る。これを Bootstrap 複製推定値と称する。

④ B 個の Bootstrap 複製推定値をもとに信頼性区間を算出する。

以上の手順により、対象とする推定量の $\alpha\%$ 信頼性区間を求めることができる。

3-2. Bootstrap 分布の近似精度の証明

Bootstrap 法における最大の興味は、Bootstrap 複製推定値の分布の真の母集団分布に対する近似精度にある。未知の母集団分布とその Bootstrap 分布との距離を

$$\sup_x \left| P_F \left\{ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq x \right\} - P_{F_n} \left\{ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}) \leq x \right\} \right| \quad (1)$$

で計り、その誤差を評価することを考える¹¹⁾。ここで θ は未知量、 $\hat{\theta}$ は推定量、 $\hat{\theta}^*$ は Bootstrap 複製推定値である。しかしながら、ノンパラメトリックのもとでの誤差評価は一般に困難である。そのため、 $n \rightarrow \infty$ としたときの漸近的な様相を調べることとなる。 $\hat{\theta}$ が n 個の要素から成り、 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ の分布関数が平均 0、分散 σ の漸近正規性を有するならば、エッジワース展開¹²⁾により、

$$\begin{aligned} P \left\{ n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq x \right\} \\ = \Phi(x/\sigma) + n^{-1/2} p_1(x/\sigma) \phi(x/\sigma) + \dots + n^{-j/2} p_j(x/\sigma) \phi(x/\sigma) \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ。ただし、漸近正規性を有さない場合でも未知の母集団分布を標本の経験分布関数で近似できるなら証明は可能で

ある。エッジワース展開は、極限分布である標準正規分布関数 $\phi(x)$ を第一項として、 $n^{-1/2}$ の巾のオーダーで展開された式で与えられる。各項は、標準正規密度関数 $\phi(x)$ とその係数が母集団確率分布のモーメントの関数として与えられる多項式 p_j との積である。式中、 $\phi(x/\sigma) = (2\pi)^{-1/2} e^{-1/2(x/\sigma)^2}$ で

$$\Phi(x/\sigma) = \int_{-\infty}^x \phi(u/\sigma) du \quad (3)$$

である。式(2)と $n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta)$ の分布関数における標準偏差 s が $s = \sigma + O(n^{-1/2})$ であることを考慮すると式(1)は確率 1, $n \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \sup_x |P_{F(0,\sigma^2)}\{n^{-1/2}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq x\} - P_{Fn(x,s^2)}\{n^{-1/2}(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}) \leq x\}| \\ = \sup_x |\Phi(x/\sigma) - \Phi(x/s)| = O(n^{-1/2}) \end{aligned} \quad (4)$$

となり、 $n^{1/2}$ のオーダーで 0 に収束することが示される。

3-3. 動特性に含まれる計測における不確定性の算出

Bootstrap 法の応用例として、同定された動特性に含まれる計測における不確定性を、 $\alpha\%$ 信頼性区間で算出する¹³⁾。このとき、振動計測結果を Bootstrap 標本とし、その要素を単に並び替えただけでは時間の因果律が崩れる。そこで、振動計測結果を振動数領域に変換し、以下の手順にしたがい、信頼性区間を算出する。ここでは、3-1 での仮定を満たすために、振動計測結果は定常過程であるとする。また、図 4 にも手順を示す。

1. 振動計測を行い、入力と出力に対するそれぞれの振動計測結果 $x(t)$ と $y(t)$ を得る。
2. 振動計測結果 $x(t)$, $y(t)$ を任意のデータ数で分割し、小区間 $x_m(t)$, $y_m(t)$ ($m=1 \sim k$) を作成する。データを小区間に分割するのは、手順 3 でフーリエ変換を行うためである。このとき、 k は小区間の総数である。小区間の長さに関しては、各小区間の自己相関係数を求め、始点と終点が無相関であると判断できる長さとする。これにより、各小区間は、互いに独立であるとみなすことができる。この手順は、3-1 節手順①に対応する。
3. 各小区間に対し、フーリエ変換を行い、 $X_m(\omega)$, $Y_m(\omega)$ を得る。これらが Bootstrap 標本の構成要素に対応する。
4. 標本の構成要素を無作為に重複を許して並び換え、新たな標本を作成する。作成した標本から式(5)により、伝達関数を算出する。

$$\hat{H}_b(\omega) = \frac{\sum_{m=1}^k \hat{X}_{mb}(\omega) \hat{Y}_{mb}^*(\omega)}{\sum_{m=1}^k |\hat{X}_{mb}(\omega)|^2} \quad (b=1, 2, \dots, B) \quad (5)$$

B は Bootstrap 標本数である。この手順は、3-1 節手順②に対応する。

5. B 個の伝達関数それぞれについて、固有振動数と減衰比の同定を行う。同定された固有振動数 f_k と減衰比 h_k は Bootstrap 複製推定値として、 B 個算出される。この手順は、3-1 節手

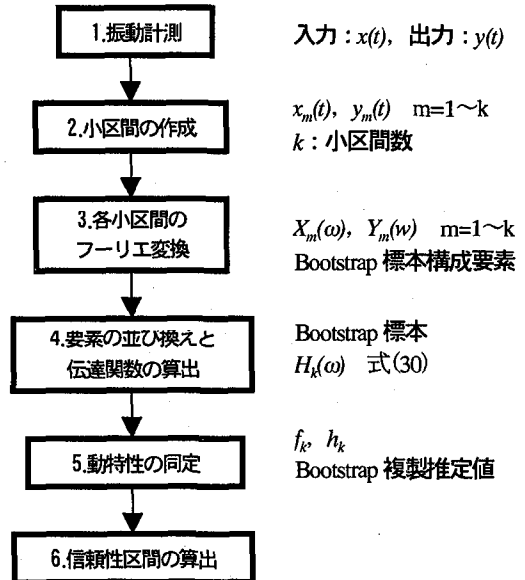


図-4. 同定問題への Bootstrap 法の適用手順

順③に対応する。

6. Bootstrap 複製推定値に対し、上限と下限の $(100-\alpha)/2\% \times B$ 個を除外して、 $\alpha\%$ 信頼性区間を算定する。この手順は、3-1 節手順④に対応する。

以上が同定問題への Bootstrap 法の応用の一例である。本研究で対象とする地震時の振動計測結果は定常過程として扱えない。しかしながら、小区間の長さについて自己相関係数から、各小区間が無相関となる長さを取り、各要素の独立性を保証した。さらに、非定常性により振幅が大きくなると、同一の確率分布からの標本抽出の仮定が成り立たなくなることが懸念される。この点についても手順 4 で伝達関数を算出すること、すなわち出力を入力で除算することで、ある種の規準化を行い、回避した。これにより 3-1 節の仮定を満たすとして上述の手順を適用した。

また当然ながら、同定問題への Bootstrap 法の応用は、この手法だけでなく他の手法へも応用することができる。しかしながら、時間領域で同定を行う場合は、時系列データが互いに独立ではないため、時系列モデルの構造を反映するよう手法の修正⁹⁾が必要となる。

4. 免震橋の性能評価

4-1. 対象橋梁の概要および地震時の振動計測結果

第 2 章の構造物の性能評価手法を免震橋に対して応用する。これまで幾つかの免震橋に対して、性能評価が行われているが、ほとんどが 1 自由度モデルとして同定されている⁶⁾⁷⁾。しかしながら、図 6 の振動計測結果より求めた伝達関数から明らかのように、山あげ大橋の橋軸直角方向においては桁のたわみの影響が大きい。そこで、少なくとも 2 次モードまでを考慮する必要があると考えられる。本研究では、この点を考慮して、多自由度非比例減衰系の例として山あげ大橋に着目した。

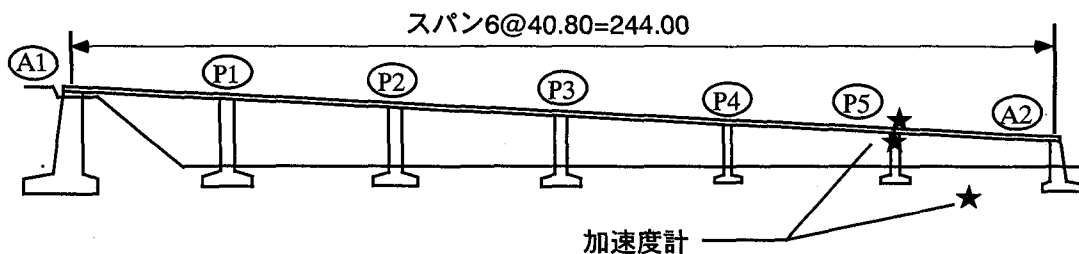


図-5. 山上げ大橋側面図

表-1. 山上げ大橋構造諸元

橋種	プレストレスコンクリート道路橋
橋格	1等橋 (TL-20)
型式：上部構造	6径間連続PC箱桁
：橋脚型式	矩形柱壁式橋脚
：橋台型式	逆T式橋台
：基礎型式	直接基礎
桁の総重量	7276tf
桁の剛性：鉛直	$1.6 \times 10^9 \text{ N/cm}^2$
：軸直角	$3.3 \times 10^9 \text{ N/cm}^2$
橋長	246.3m
支間長	6@40.8m
有効幅員：標準部	車道部 8.00m, 歩道部 2.50m
：拡幅部	車道部 11.00m, 歩道部 2.50m
平面線形	$R=\infty \sim A=240\text{m}$
縦断勾配	1.0%~VCL=100, $R=2500\text{m} \sim 5.0\%$
横断勾配	車道部 1.5%, 歩道部 2.0%
地盤種別	1種地盤
設計震度：橋軸方向	$K_h=0.16$
：直角方向	$K_h=0.20$
免震方向	1方向 (橋軸方向)

山あげ大橋は、栃木県東部の一般国道 244 号の鳥山バイパス起点部に位置する。橋長は 246.3m で、有効幅員が 10.5~13.5m の 6 径間連続 PC 高架橋である。概要は図 5 に示し、設計条件は表 1 に示す。免震支承としては高減衰積層ゴム支承が採用され、橋台、橋脚上にそれぞれ 2 基ずつ、計 14 基設置されている。橋軸直角方向は、移動制限装置で変位を拘束しており、免震効果は橋軸方向のみ期待している。しかしながら、橋軸直角方向に関して、移動制限装置が作動した形跡が見られない。そこで、4-5 節での免震支承の性能評価に関して、橋軸方向だけでなく、橋軸直角方向についても実施する。

加速度計は、図 5 中の P5 桁、橋脚天端および地中の 3 点に設置されている。振動計測結果は橋軸、橋軸直角および鉛直方向の 3 成分が得られる。表 2 に、使用した振動計測結果の詳細を示す。得られた振動計測結果の地震の規模は、いずれも震度 3 以下で、最大加速度も橋脚天端で 35gal 以下である。振動計測条件は、サンプリング周波数 100Hz、サンプリング個数 8168 個で、計測時間は 81.67 秒である。なお、解析で使用する際には 10Hz 以上の振動数成分はローパスフィルターにより除去した。

4-2. 非比例減衰系の動特性の同定

本節では、まず、任意外力に対する非比例減衰系の伝達関数を導出する。次いで、振動計測結果から動特性を振動数領域で同定する手法を示す。最後に実際の振動計測結果に対して、動特性の同定を行う。同定手法に関しては、時間領域および振動数領域における様々な手法があり、それぞれに一長一短がある。振動数領域の同定手法は、振動数帯域の切りやすさ、視覚的に結果が判断できる、初期値が不要、モード座標と直接結びついているといった長所を有する。その反面、非線形や時変系には理論的には適用できないという短所がある。本研究では、同定の際に構造物の非線形性や時変性を考慮しないため、振動数領域での同定は有効であると判断した。また、構造物や荷重の特性により、他の同定手法¹⁴⁾を用いることも可能である。

(1) 任意外力に対する非比例減衰系の伝達関数

任意外力 f が作用する、 N 自由度非比例減衰系の運動方程式は次式で与えられる⁹⁾¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾。

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{f\} \quad (6)$$

ここで、 $[\cdot]$ は行列、 $\{\cdot\}$ はベクトルを表す。また、 $[M]$ は質量行列、 $[C]$ は減衰行列、 $[K]$ は剛性行列 (全て $N \times N$ 次元)、 $\{x\}$ は変位ベクトル (N 次元) である。式(1)を状態変数表示を

用いて、 $2N$ 個の 1 階微分方程式で表すと、

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{g\} \quad (7)$$

となる。ここで

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (2N \times 2N)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}, \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2N) \quad (8a,b,c,d)$$

である。式(7)の左辺の固有値問題 $[\lambda[A] + B]\{\psi\} = 0$ の解は、 N 個の複素共役の組からなる $2N$ 個の複素固有値、固有ベクトルとなる。ここで、 $r=1 \sim N$ について、 $\lambda_r = s_r$ としたとき、 $\lambda_{r+N} = s_r^*$ となるように固有値を並び替えた。その場合、固有ベクトルは、

$$\{\psi_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_r \\ s_r \psi_r \end{Bmatrix}, \quad \{\psi_{r+N}\} = \begin{Bmatrix} \psi_r^* \\ s_r^* \psi_r^* \end{Bmatrix} \quad (9)$$

となる。このとき、 $\{u\}$ はモード座標を用いると、

$$\{u\} = [\psi]\{q\} \quad (10)$$

と表すことができる。ここで $\{q\}$ はモード変位ベクトル ($2N \times 1$) である。さらに上式を式(2)に代入して、左から $[\psi]$ の転置を乗ずると

$$[\psi]^T[A][\psi]\{\dot{q}\} + [\psi]^T[B][\psi]\{q\} = [\psi]^T\{f\} \quad (11)$$

となる。式中の $[\psi]^T[A][\psi]$ 、 $[\psi]^T[B][\psi]$ は対角行列となり、

表-2. 計測地震記録

発生日	規模 (M)	震央地名	深さ (km)	主な震度	最大加速度 (gal)	
					橋脚天端	桁
1994.10.4	8.1	北海道東方沖	30	宇都宮 2	13.73	19.36
1996.2.17	6.6	福島県沖	51	宇都宮 3	34.21	20.32
1997.5.12	5.7	福島県沖	60	宇都宮 2	14.31	15.14

下式のように $2N$ 個のモードごとの非連成化した式として表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & a_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & b_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix} = [\Psi]^T \begin{Bmatrix} g \end{Bmatrix} \quad (12)$$

このとき、 a_r , b_r は各行列の対角成分である。非連成化された 1 から N までの r 次モードの運動方程式は、

$$\dot{q}_r - s_r q_r = \frac{1}{a_r} \{\Psi_r\}^T \{g\} \quad (13)$$

と表される。ここで s_r は固有値であり、

$$s_r = -b_r/a_r = -\omega_r h_r + i\omega_r \sqrt{1-h_r^2} \quad (14)$$

で与えられる¹⁵⁾。 ω_r は r 次の固有円振動数、 h_r は r 次の減衰比である。式(13)に対してフーリエ変換を行い、振動数領域で展開すると、

$$Q_r(\omega) = \frac{1}{(i\omega - s_r)} \frac{1}{a_r} \{\Psi_r\}^T \begin{Bmatrix} F(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

を得る。ここで、 $Q_r(\omega)$ と $F(\omega)$ はそれぞれ q_r と f のフーリエ変換であり、 $i = \sqrt{-1}$ である。 $\{u\}$ のフーリエ変換を $\{U(\omega)\}$ と表記し、式(10)に対してもフーリエ変換を行えば、

$$\{U(\omega)\} = [\Psi] \{Q(\omega)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\Psi_r\} Q_r(\omega) \quad (16)$$

となる。ここに式(15)を代入すれば、

$$\{U(\omega)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\Psi_r\} \frac{1}{(i\omega - s_r)} \frac{1}{a_r} \{\Psi_r\}^T \begin{Bmatrix} F(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

を得る。さらに

$$\{\Psi_r\} / \sqrt{a_r} = \{\Phi_r\} \quad (18)$$

として固有ベクトルを a_r に関して、正規化すれば、

$$\{U(\omega)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\Phi_r\} \frac{1}{(i\omega - s_r)} \{\Phi_r\}^T \begin{Bmatrix} F(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

となる。ここで、式(8c)と式(9)より

$$\{U(\omega)\} = \begin{Bmatrix} X(\omega) \\ i\omega X(\omega) \end{Bmatrix}, \quad \{\Phi_r\} = \begin{Bmatrix} \phi_r \\ s_r \phi_r \end{Bmatrix} \quad (20)$$

であるから

$$\begin{Bmatrix} X(\omega) \\ i\omega X(\omega) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2N} \begin{Bmatrix} \phi_r \\ s_r \phi_r \end{Bmatrix} \frac{1}{(i\omega - s_r)} \begin{Bmatrix} \phi_r \\ s_r \phi_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

と表され、上式の変位に関する成分 $X(\omega)$ を抽出すると、

$$\{X(\omega)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\phi_r\} \frac{1}{(i\omega - s_r)} \{\phi_r\}^T \{F(\omega)\} \quad (22)$$

となる。したがって、ある任意点 j における k 点に作用する任意外力に対する伝達関数は、

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_k(\omega)} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} \quad (23)$$

と表される。ここで、 $s_{r+N} = s_r^*$, $\phi_{r+N} = \phi_r^*$ であるから、

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) \quad (24)$$

を得る。ここで、 ϕ_{jk} は j 点における r 次のモード形である。 $\phi_r \phi_{kr}$ は留数であり、各モードの寄与率を表す影響係数のようなものと考えられる。このとき、低次の振動が主たる対象で、高次モードの寄与が小さいと考えられる場合には、 $|\omega| \ll |s_r|$ が成り立つ。第 N_u モードまでが興味の対象であるとする、伝達関数は、

$$\begin{aligned} H_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^{N_u} \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) + \sum_{r=N_u+1}^N \left(-\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{s_r} - \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{s_r^*} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{N_u} \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) + \frac{1}{K_u} \end{aligned} \quad (25)$$

と近似できる。ここで、 K_u は剛性と同一次元を持つ定数であるので、剰余剛性と呼ばれる¹⁶⁾。逆に、第 N_u 次以上の高次振動が主たる検討対象である場合には、低次モードについて $|\omega| \gg |s_r|$ であるから、

$$\begin{aligned} H_{jk}(\omega) &\approx \sum_{r=1}^{N_u} \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega} \right) + \sum_{r=N_u+1}^N \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) \\ &= -\frac{1}{\omega^2 M_\ell} + \sum_{r=N_u+1}^N \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

とすることで、近似的にその影響を取り込むことができる。

M_ℓ は剰余質量と呼ぶ。ここで非比例減衰系においては、一般に剰余質量・剰余剛性は複素数の定数となる。

また、 r 次モードにおける j 点と k 点の留数を α_{jk} と表す。 s_r に関しては式(14)を代入すると、

表-3. 動特性同定結果

発生日		固有振動数 (Hz)		減衰比	
		1 次	2 次	1 次	2 次
1994 年 10 月 4 日	同定値	2.34	4.00	0.0704	0.0279
	99%信頼性区間	2.29-2.45	3.84-4.12	0.0285-0.131	0.0112-0.104
1996 年 2 月 17 日	同定値	2.73	4.04	0.0564	0.0228
	99%信頼性区間	2.67-2.75	3.82-4.09	0.0225-0.123	0.0113-0.120
1997 年 5 月 12 日	同定値	2.43	4.12	0.0779	0.0280
	99%信頼性区間	2.41-2.50	3.99-4.20	0.0322-0.125	0.00778-0.112

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{r \Re_{jk}}{\omega_r h_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1-h_r^2})} + \frac{r \Re_{jk}^*}{\omega_r h_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1-h_r^2})} \right) \quad (27)$$

を得る。さらに、 $r \Re_{jk} = r \ell_{jk} + i m_{jk}$, $r \Re_{jk}^* = r \ell_{jk} - i m_{jk}$ とおくと最終的に伝達関数は、

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{2r \ell_{jk} \omega_r h_r - 2\omega_r m_{jk} \sqrt{1-h_r^2} + 2i\omega_r \ell_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r h_r} \quad (28)$$

となる。

(2) 振動数領域における同定手法

構造物に作用する入力である外力および、ある任意点での出力である応答が計測されているとする。このとき入出力のそれぞれに対するフーリエ変換を $X_k(\omega)$, $Y_k(\omega)$ と表すと、伝達関数 $H_m(\omega)$ は、次式で与えられる。

$$H_m(\omega) = \frac{\sum X_k(\omega) Y_k^*(\omega)}{\sum X_k(\omega) X_k^*(\omega)} \quad (29)$$

ここで振動計測結果からの伝達関数の算出にあたって、入出力間のクロススペクトルをとった。これは、出力の雑音を統計的に取り除くためである¹⁸⁾。同定に関して、式(29)の振動計測結果から得た伝達関数 $H_m(\omega)$ と式(28)の非比例減衰系の伝達関数 $H_i(\omega)$ が、実部および虚部で適合するように、評価関数

$$E = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \left\{ \left[\operatorname{Re}(H_m(\omega) - H_i(\omega)) \right]^2 + \left[\operatorname{Im}(H_m(\omega) - H_i(\omega)) \right]^2 \right\} d\omega \quad (30)$$

を最小とする変数を算出した。ここで、 ω_a , ω_b は同定の対象となる振動数領域であり、未知変数は $h_r, \omega_r, \ell_{jk}, m_{jk}$ である。例えば、最小二乗法により対象とするモード次数 r までの固有振動数と減衰比および留数が算出される。

(3) 地震時の振動計測結果からの動特性の同定

免震橋の上部構造の動特性を同定するため、P5 橋脚天端での地震時の振動計測結果を入力、桁での振動計測結果を出力とした。この非比例減衰系に対して、固有振動数、減衰比と影響係数の同定を行う。式(6)で入力を多径間連続で同時入力の地震動とした場合、運動方程式は、次式で与えられる⁹⁾。

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = -[M] \ddot{z} \quad (31)$$

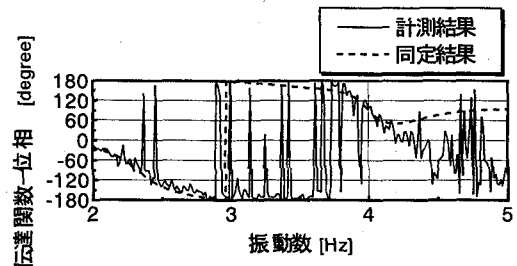
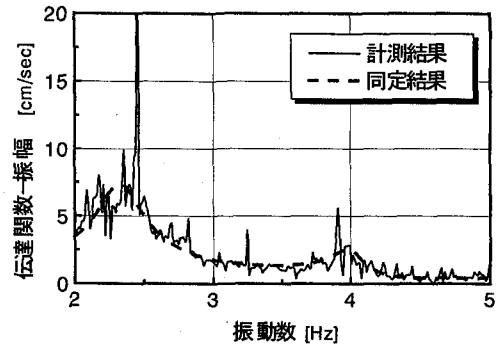


図-6. 振動数領域における同定結果

4-2.(1)節と同じように展開していくと、最終的に任意点 j における地震動の加速度に対する伝達関数は、次式となる。

$$H_{jk}(\omega) = 1 + \sum_{r=1}^N \frac{\omega^2 (2\ell s_{jk} \omega_r h_r - 2\omega_r m s_{jk} \sqrt{1-h_r^2} + 2i\omega \ell s_{jk})}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r h_r} \quad (32)$$

式中、 ℓs_{jk} と $m s_{jk}$ は、それぞれ $\phi, \phi_r^T [M] \{i\}$ の実部と虚部である。上式と式(29)の振動計測結果から求められる伝達関数に対して、式(30)の評価関数を最小とする最小二乗問題を解いた。同定の対象となる未知数は、図6より2次モードまで考慮すると、式(32)から合計8つとなる。当然ながら、解の収束性が問題となり、さらには解を得るまでの計算に時間を要することが予想できた。そこでガウス-ニュートン法の欠点である収束不安定性を改善し、計算速度を高速化した修正マルカート法¹⁹⁾を用いた。それでも局所最小値が多くなり、同定結果の初期値に対する依存性が高くなった。そのため、異なる初期値をここでは40個与え、試行錯誤の後、グローバルな最小値を決定した。同定の対象とした振動数帯域は、1次と2次モードに着目するため、2Hz~5Hzまでとした。なお、今回は、剰余剛性・剰余

質量の影響を考慮したが、同定結果には有意な差はなかった。図6に1994年10月4日の振動計測結果に対する非比例減衰系の伝達関数の同定結果を示す。絶対値に関しては、精度良く、同定できていることがわかる。位相に関しては、4Hz以上から同定精度が低下している。これは、同定の対象次数による影響であり、構造物を3次モードまで考慮すれば、精度良く、同定できることを確認してある。しかしながら、3次モードは8Hz付近にあり、そのピークも小さいことから、この影響を考慮する必要はないと判断した。各地震波に対する1次と2次の固有振動数と減衰比の同定結果を表3に示す。

4-3. 動特性に含まれる計測における不確定性の算出

同定された各モードの固有振動数と減衰比に対して Bootstrap 法を応用し、同定結果に含まれる計測における不確定性を信頼性区間で算出した。手順は3-3節に示したとおりであり、ここでは、具体的な数値のみを記す。データ総数 8186 の振動計測結果を 1024 個のデータからなる 11 個の小区間に 512 個のオーバーラップを許して分割した。各小区間の長さの選定について述べる。まず、応答が定常とみなせる時系列の相関係数を算出した。このとき時間間隔を長くとっても規準化された相関係数は 0 とならず、0.2 付近で収束することを確認した。そこで、非定常な応答を含む小区間に関しても自己相関係数 0.2 以下を無相関が保証される長さとして決定した。また、Bootstrap 標本数は信頼性区間の収束性から 2000 個として計算した²⁰⁾。

Bootstrap 法により求められた1次の固有振動数と減衰比のヒストグラムを図7に示す。振動計測結果は、1994年10月4日のものである。これより特に減衰比に関しては、分布形が正規分布とならないことが確認できる。また、表3には各振動計測結果に対する1次と2次の固有振動数および減衰比の99%信頼性区間の上限値と下限値を示す。振動数よりも減衰比で不確定性が大きいことがわかる。これより、一般的にいわれるように減衰に対する同定が困難であることが、Bootstrap 法による信頼性区間でも示唆される。また、図8には式(5)をもとに算出した伝達関数の99%信頼性区間を示す。ここでは各振動数における $\hat{H}_b(\omega)$ が Bootstrap 複製推定値に対応する。

以上より、地震時の振動計測結果のように、唯一の振動計測結果しか得られない場合でも、Bootstrap 法により伝達関数および動特性に含まれる不確定性を信頼性区間で算出することが可能となる。

4-4. 支承の剛性と減衰の算出

山あげ大橋の免震支承の地震時における動的性能を評価するために、支承の剛性および減衰を算出する。前節までで各モードの固有振動数と減衰比は同定された。次に、これらを物理量である支承の剛性および減衰に変換する必要がある。しかしながら、2次モード系に対し、入力1点、出力1点しか得られていないため、完全なモード形を得ることはできない。したがって、このままでは支承の剛性と減衰を算出することは不可能である。

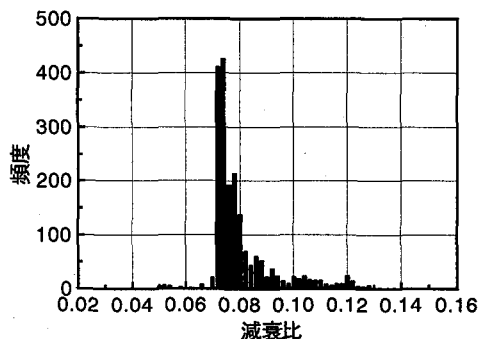
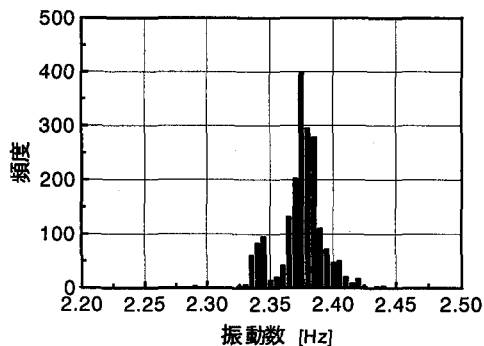


図-7. 固有振動数と減衰比の99%信頼性区間

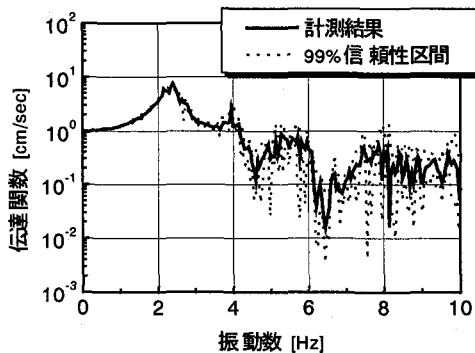


図-8. 伝達関数の99%信頼性区間

そこで、まず、付録の手順により、桁と支承の物理量から、動特性を算出することを考える。しかしながら、このとき、支承の物理量は未知である。したがって、振動計測結果から得た動特性と比較し、その誤差が最小となるように、物理量を決定した。具体的な手順は次のようになる。

桁と支承が別要素であると考え、桁の諸元は設計図をもとにした既知量である。振動モード形についても支承による拘束がない条件下では、両端自由支持梁と仮定し、次式のモード形を与える。

$$i=1 \text{ のとき} \quad \phi_1(x) = \beta \quad (33)$$

$i \geq 2 \text{ のとき}$

$$\phi_i(x) = \beta \left[\cos\left(\frac{e_i x}{\ell}\right) + \cosh\left(\frac{e_i x}{\ell}\right) - \frac{\cos(e_i) - \cosh(e_i)}{\sin(e_i) - \sinh(e_i)} \left(\sin\left(\frac{e_i x}{\ell}\right) + \sinh\left(\frac{e_i x}{\ell}\right) \right) \right] \quad (34)$$

ただし、 β は定数で、 e_i は固有値ある。付録の手順にしたがって展開すると、最終的に次式の固有値問題を得る。

$$[s[A]+[B]]\{\phi\}=0 \quad (35)$$

$$M_{ij} = \sum_{\alpha=1}^J M_{\alpha} \phi_i(x_{\alpha}) \phi_j(x_{\alpha}) + \int_0^{\ell} \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (36)$$

$$C_{ij} = \sum_{\alpha=1}^J C_{\alpha} \phi_i(x_{\alpha}) \phi_j(x_{\alpha}) \quad (37)$$

$$K_{ij} = \sum_{\alpha=1}^J K_{\alpha} \phi_i(x_{\alpha}) \phi_j(x_{\alpha}) + \int_0^{\ell} EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx \quad (38)$$

ここで N : モード数, J : 支承の数, q_i : i 次モード変位, ρ : 桁の質量密度, A : 桁の断面積, EI : 桁の曲げ剛性, ℓ : 桁の長さ, M_{α} : α 番目の支承質量 ($\alpha=1 \sim J$), C_{α} : α 番目の支承減衰, K_{α} : α 番目の支承剛性, Z_{α} : α 番目の支承変位である。

したがって、式(35)の固有値問題を解くことで、固有値および固有ベクトルを得る。これより、動特性を新たに算出することができる。そこで、次式の評価関数が最小となるように、支承の質量 M_{α} 、減衰 C_{α} 、剛性 K_{α} を決定した。

$$P = \sum_{r=1}^N \left(\left| \frac{\omega_r^m - \omega_r^p}{\omega_r^m} \right| + \left| \frac{h_r^m - h_r^p}{h_r^m} \right| \right) \quad (39)$$

式中、添え字の r はモード次数, m は振動計測結果から同定された動特性を, p は付録に示す手法から算出された動特性を示す。

得られた構造モデルに対して、橋脚天端での地震時の振動計測結果を入力として、下式に代入し、線形加速度法により桁の応答を算出した。

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = -[M]1\ddot{z} \quad (40)$$

各行列の i 行 j 列の要素は、式(36)から式(38)で与えたとおりである。

図9に地震時の振動計測結果と、同定結果より算出された応答を示す。また、図10はそれぞれのスペクトルである。両者を比較すると、同定した構造モデルにより上部構造の地震時の挙動が再現できていることがわかる。

4-5. 免震支承の性能評価

地震時の振動計測結果より算出された支承の剛性および減衰と、物理モデルをもとに算出した支承の剛性および減衰とを比較する。

前節において、各支承の剛性および減衰は算出された。全支承の剛性に関しては、

$$K_{all} = \sum_{\alpha=1}^J K_{\alpha} \quad (41)$$

で算出される。一方、免震支承が桁に対して並列に取り付けられているとし、各免震支承が受け持つ水平方向の慣性力は、その免震支承が持つ水平方向の剛性に比例すると考えれば²²、

$$M_{\alpha} = wK_{\alpha} \quad (42)$$

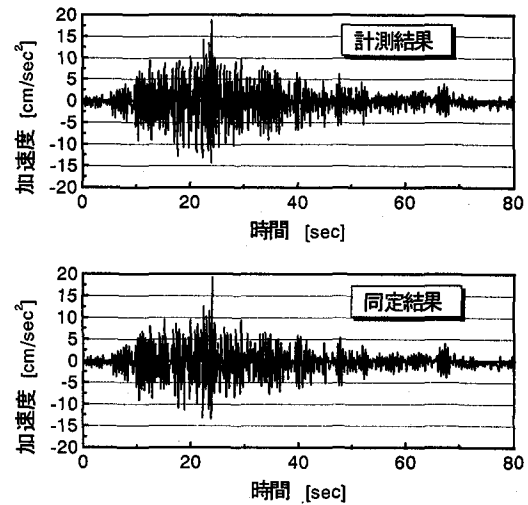


図-9. 時間領域における応答比較

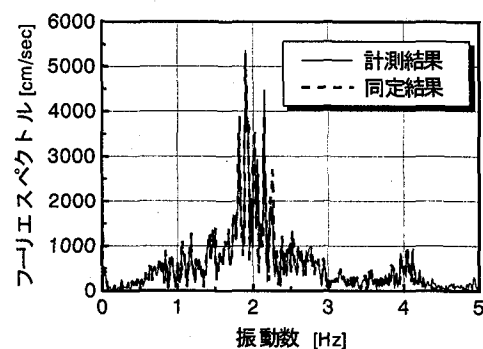


図-10. 振動数領域における応答比較

で表される。ここで、 w は比例定数である。これより、上部構造全体の等価減衰係数 ζ_{all} は、各免震支承の等価減衰定数を ζ_{α} とすると、

$$\zeta_{all} = \sum_{\alpha=1}^J \zeta_{\alpha} K_{\alpha} / \sum_{\alpha=1}^J K_{\alpha} \quad (43)$$

で与えられる。

一方、物理モデルからの支承の剛性と減衰の算出に関して、地震時の上部構造に作用する復元力と減衰力は、免震支承の履歴特性と移動制限装置に働く摩擦力により生ずると考えた。

免震支承の復元力-変位特性の工場載荷試験結果を図11に示す。免震支承の復元力特性は非線形である。そのため、荷重載荷試験の最大点剛性を利用した等価線形化法を適用し、等価剛性および等価減衰を求めた。とくに、ここでは微小振幅域で等価剛性と等価減衰を算出する必要がある。そのために、Ozdemirの提案する微分方程式モデル²¹⁾で、モデル化を行った。履歴が安定した3サイクル目のループについてモデル化を行った結果を図12に示す。これより、剛性および減衰ともに強い振幅依存性があることが確認できる。また、載荷試験の1サイクル目の履歴曲線は図11のとおり、不安定な挙動を示す。微小振幅においては、剛性は他のサイクルに比べ大きな値を取り得る。したがってこのサイクルで求められる等価剛性を支承剛性の上限値とした。各支承に対し、等価剛性と減衰をそれぞれ

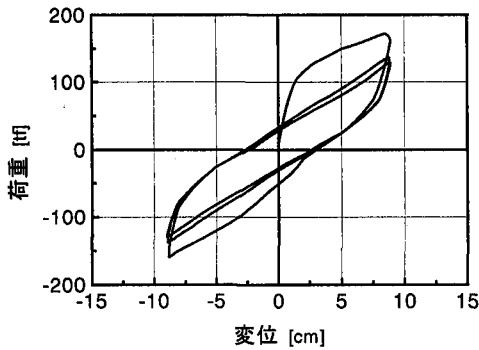


図-11. 免震支承の復元力-変位特性

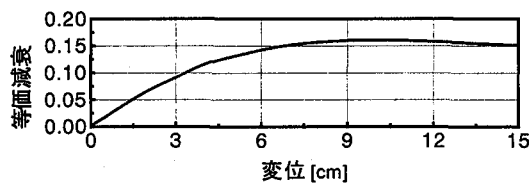
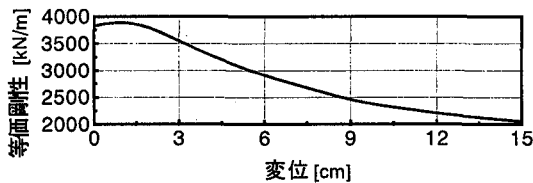


図-12. 履歴曲線のモデル化

算出し、式(42)から式(44)より全支承の剛性と減衰を求めた。

また、移動制限装置に働くと考えられる摩擦力についても等価線形化法により等価剛性および等価減衰を算出し、摩擦力の不確定性の範囲とした。このとき摩擦係数と摩擦力はスペースパッキンの摩擦係数と垂直抗力より妥当性を考慮し、0.005～0.15 および0～50tf と定めた²⁰⁾。

振動計測結果と物理モデルより同定された全支承の剛性および減衰の比較結果を橋軸方向および橋軸直角方向に関して、それぞれ図 13、14、15、16 に示す。振動計測結果からの同定値に含まれる計測における不確定性を動特性に含まれる計測における不確定性をもとに算出した。しかしながら、その範囲は約1%と非常に小さいものであった。いずれの図においても、不確定性の範囲は大きいものの整合性が見られる。これより、山あげ大橋の免震支承の剛性および減衰は、工場での載荷試験結果による性能に矛盾しないことが確認できた。

5. 結論

本研究では、振動計測結果をもとにした構造物の性能評価について、不確定性を定量的に考慮して、構築を行った。得られた知見を以下に示す。

- 1) 同定結果に含まれる計測における不確定性を Bootstrap 法により信頼性区間で定量的に算定した。地震時の振動計測結果のように唯一の標本しか得られない場合でも、Bootstrap 法によ

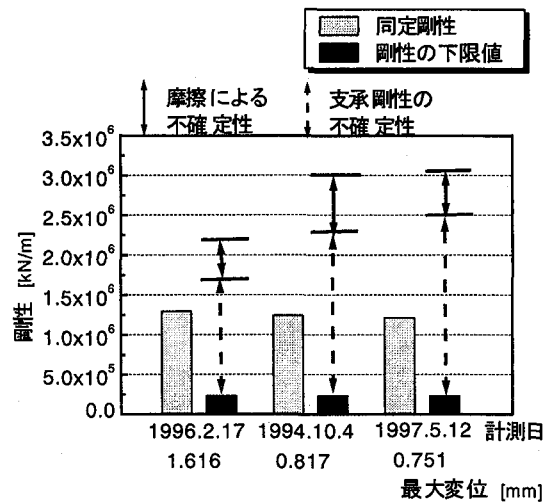


図-13. 免震支承剛性の性能比較 (橋軸方向)

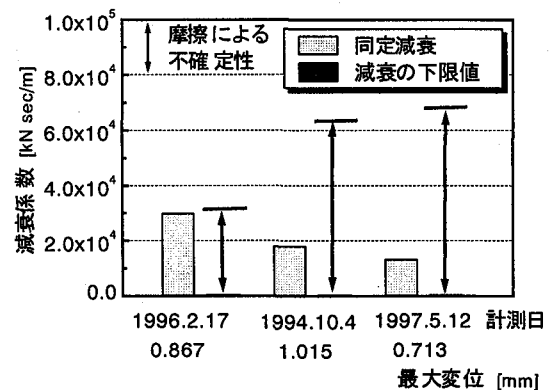


図-14. 免震支承減衰の性能比較 (橋軸方向)

り伝達関数および同定結果に含まれる計測における不確定性を算出することが可能であることを示した。

- 2) 不確定性を考慮した構造物の性能評価手法を、一例として地震時における免震橋の免振支承の性能評価に対して応用した。その結果、提案した性能評価手法により構造物の性能を定量的に評価ができることがわかった。
- 3) 多自由度非比例減衰系の任意外力に対する伝達関数を導出した。振動計測結果から算出される伝達関数とを適合させることで構造物の動特性を同定する手法を構築した。

また、今後の課題として、モデル化における不確定性の範囲を判断基準とした、最適モデルの選択法を構築することあげられる。

付録. 制振装置付加による構造物の動特性変化の算出法

ある構造物に、制振装置が設置され、局所的に質量、減衰および剛性が付加される場合を考える。この場合、制振装置が付加された新たな構造系の動特性を、有限要素法などにより算出することは可能である。しかしながら、この際には、構造系全

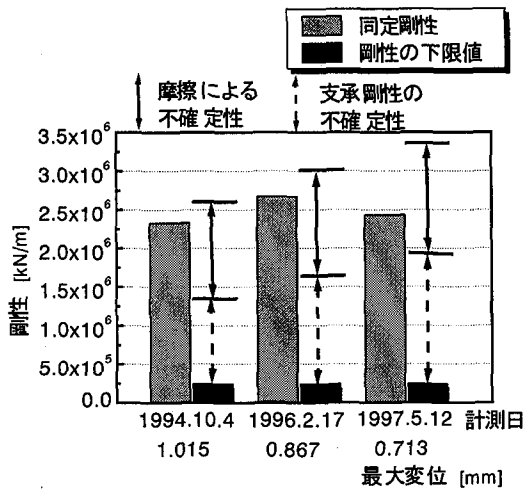


図-15. 免震支承剛性の性能比較 (橋軸直角方向)

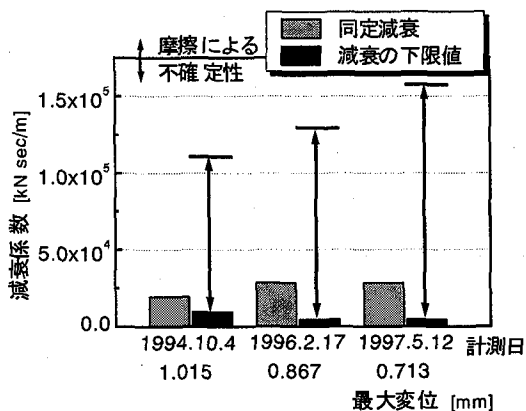


図-16. 免震支承減衰の性能比較 (橋軸直角方向)

体を解き直さなければならない。一方、Dowell²³⁾の考え方をいれれば、動特性の変化を、もとの構造物の動特性を用いて算出することができる。なお、構造物および制振装置の物理量は、全て既知である。その手順を以下に示す。

構造物と J 個の制振装置が、別要素であると考えれば、全体の運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー V は、次式で表される²⁴⁾。

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) \right)^2 dv + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^J M_{\alpha} \dot{Z}_{\alpha}^2 \quad (44)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_V L \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 dv + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^J K_{\alpha} Z_{\alpha}^2 \quad (45)$$

ここで N : モード数, J : 制振装置の数, q_i : i 次モード変位, ρ : 質量密度, L : 剛性演算子, M_{α} : α 番目の制振装置の質量 ($\alpha=1 \sim J$), K_{α} : α 番目の制振装置の剛性, Z_{α} : α 番目の制振装置の変位である。このとき、構造物のモード形は、制振装置設置前のモード形を与える。

しかしながら、実際には構造物と制振装置の間には、制振装置の α 番目の付加位置について

$$f_{\alpha} = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x_{\alpha}) - Z_{\alpha} = 0 \quad (46)$$

の拘束条件が加わる。ここでラグランジュ関数は、次式で表される。

$$L = T - V + \sum_{\alpha=1}^J \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \quad (47)$$

ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (48)$$

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^J C_{\alpha} \dot{Z}_{\alpha} \quad (49)$$

となる。ここで C_{α} は α 番目の制振装置の減衰である。同様に Z_{α} , λ_{α} についても偏微分し、さらに $\bar{q}_i, \bar{Z}_{\alpha}, \bar{\lambda}_{\alpha}$ を定数とし、 $q_i = \bar{q}_i e^{i\omega t}$, $Z_{\alpha} = \bar{Z}_{\alpha} e^{i\omega t}$, $\lambda_{\alpha} = \bar{\lambda}_{\alpha} e^{i\omega t}$ とおき、それぞれ式(47)に代入し、 Z_{α} と λ_{α} を消去して、

$$[s[A] + [B]]\{\Phi\} = 0 \quad (50)$$

を得る。ここで $[A]$, $[B]$ は式(3)で定義したものである。質量行列、減衰行列、剛性行列の要素 M_{ij} , C_{ij} , K_{ij} はそれぞれ、次式で表すことができる。

$$M_{ij} = \sum_{\alpha=1}^J M_{\alpha} \phi_i(x_{\alpha}) \phi_j(x_{\alpha}) + \int_V \rho(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dv \quad (51)$$

$$C_{ij} = \sum_{\alpha=1}^J C_{\alpha} \phi_i(x_{\alpha}) \phi_j(x_{\alpha}) \quad (52)$$

$$K_{ij} = \sum_{\alpha=1}^J K_{\alpha} \phi_i(x_{\alpha}) \phi_j(x_{\alpha}) + \int_V L(\phi_i(x) \phi_j(x)) dv \quad (53)$$

したがって、最終的に式(50)で表される s に関する固有値問題となる。この固有値問題を解き、新たに得られる固有値と固有ベクトルより、制振装置が付加された構造物の動特性を得ることができる。

謝辞

山あげ大橋に関連して建設省土木研究所耐震研究室室長の運上茂樹氏、栃木県土木部道路建設課橋梁係の戸田英次氏には多大な御協力を頂いた。また本研究を遂行するにあたり、東京大学大学院生の Muhammad Tariq Amin Chaudhary 氏と山之内宏安氏とは幾度となく議論をさせて頂いた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 橋梁振動研究会編：橋梁振動の計測と解析、技報堂出版、1993.10
- 2) M.Abe: Structural Monitoring of Civil Structures using Vibration Measurement - Current Practice and Future, *LNAI 1454 Artificial Intelligence in Structural Engineering*, pp1-18, 1998.7

- 3) 振動制御小委員会：振動制御コロキウム PartA, 1991
- 4) 建設省土木研究所 地震防災部耐震研究室：土木研究資料 免震橋梁の地震時振動特性に関する研究, 1994.8
- 5) 建設省土木研究所 地震防災部耐震研究室：土木研究資料 実測記録に基づく免震橋の地震時振動特性に関する研究, 1995.11
- 6) 阿部雅人, 藤野陽三, 吉田純司：1995 年兵庫県南部地震における阪神高速湾岸線松の浜免震橋の地震時挙動と免震効果の検証, 土木学会論文集投稿中
- 7) 山之内宏安, 吉田純司, 藤野陽三, 阿部雅人：実測記録に基づく山あげ大橋の免震性能評価, 第 53 回年次学術講演会概要集, 1998.10
- 8) 山口宏樹：構造振動・制御, 共立出版, 1996
- 9) B.Efron, R.Tibshirani : *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, 1993
- 10) 日本機械学会編：計測の不確かさ, 1987.11
- 11) 小西貞則：ブートストラップ法と信頼性区間の構成, 応用統計学 Vol.19, No.3, pp137-162, 1990.3
- 12) P.Hall : *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag, 1992
- 13) N. F. Hunter, T. L.Paez : Application of the Bootstrap to the Analysis of Vibration Test Data, *Proceedings of the 66th Shock and Vibration Symposium*, pp99-108, 1996.11
- 14) 岩本政巳, 阿部雅人：損傷・構造同定, 橋梁振動コロキウム'97 論文集, pp45-54, 1997.10
- 15) N.M.M.Maia, J.M.M.Silva : *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press LTD, 1997
- 16) T.Igusa : A Unified Mode Combination Theory for Stationary Response of Structural Systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.21, pp109-126, 1992
- 17) A.S.Veletsos, C.E.Ventura : Modal Analysis of Non-Classically Damped Linear Systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol.14, pp217-243, 1986
- 18) 長松昭男：モード解析入門, コロナ社, 1993
- 19) 佐藤郁郎：最小二乗法その理論と実際, 観測データの非線形解析, 山海道, 1998
- 20) 貝戸清之, 阿部雅人, 藤野陽三, 吉田純司：観測データから得られる推定値の信頼性区間評価, 第 53 回年次学術講演会概要集, 1998.10
- 21) H.Ozdemir : *Nonlinear Transient Dynamic Analysis of Yielding Structures*, Ph.D.Dissertation, U.C.Berkeley, 1976
- 22) 山之内宏安：実測記録に基づく免震橋の性能評価, 東京大学工学部土木工学科卒業論文, 1998.3
- 23) E.H.Dowell : On Some General Properties of Combined Dynamical System, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.46, pp206-209, 1979.3
- 24) M.Abe, T.Igusa : Tuned Mass Dampers for Structures with Closely Spaced Natural Frequencies, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol.24, pp247-261, 1995

(1998 年 9 月 18 日受付)