# 動的システムの初通過確率における効率化モンテカルロ法の基礎検討

## A Basic Consideration on Advanced Monte Carlo Simulation Procedure for First Passage Probability of Dynamical Systems

須藤 敦史*・星谷 勝**

* 博士(工学) ㈱地崎工業 技術開発部 主任研究員 (〒105-8488 東京都港区西新橋2-23-1)
** Ph.D 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤1-28-1)

Various procedures to extend the applicability and increase the efficiency of Monte Carlo Simulation (MCS) for the analysis of complex dynamical systems are discussed. However direct MCS techniques require too much computational effort for this problem. Hence, several advanced MCS techniques have been applied to structures under dynamic excitation.
The purpose of this paper is to develop the methods, to compute efficiently failure probability of dynamical systems by Double & Clump procedure (D & C). To calculate effectively the probability, several controlled criteria are introduced in the numerical procedure so as to obtain the low probability effectively.

***Key Words:** First Passage Probability , Failure Probability , Monte Carlo Simulation, Importance Sampling Procedure*

## 1．はじめに

風や地震など再現性の無い不規則な動的荷重を受ける構造物（システム）は，将来非常に大きい入力レベルの荷重が作用する可能性を有している．このような大きな荷重が作用した際に，システムは非線形な挙動を示す場合が多く，その安全性を評価するためには非線形不規則振動理論によるシステムの信頼性解析が必要となる．

一般にシステムの動的信頼性解析は，定義する破壊規範によって，1)最大応答値問題もしくは初（閾値）通過問題と 2)繰り返し効果を考える累積損傷問題[1),2)]に大別される．

この中で初通過問題は，外乱が作用している全継続時間中にシステムの応答値が規定した値（限界値）を超過する確率を定量的に評価するものであり，応答値が一定値を越えたら限界状態に達したと考え，システムの安全性を評価するものである．

この初通過確率の算定方法としては， a) Fokker-Planck-Kolmogorovの方程式を初期値・境界値問題として直接的に解く方法[3)]とb) Level•Crossing法[4)]がよく知られる．

まず，a) Fokker-Planck-Kolmogorov方程式を直接解く方法は，応答過程（包絡振幅）のマルコフ性を仮定しStochastic Averaging法[3)]により，この方程式を解く問題に帰着させるもので，システムが線形低自由度でかつ入力がガウス性のホワイトノイズという特殊な場合でのみ理論解が得られる．

一方，b)Level•Crossing法は応答値のpoisson過程が成立するような場合には有効な方法であるが，これが成立しない場合には，異なる時間において変位および速度の同時確率密度関数または初期通過時間の同時確率密度関数を必要とするため解析的に難しくなる．

このように解析的手法では非線形や多自由度のシステムになると，理論的に複雑になり限定された解法となるのが現状である．

そこで非線形や多自由度の影響を受けない一般的な解法としてMonte Carlo Simulation[5)]（以下 MCS)が挙げられ，システムの状態に依存しない汎用性の高い解法であり，広く適用・応用されている．

しかし，MCSを用いても小さい値を示す初通過確率を精度良く求めるには，膨大なサンプル数を必要とするためDouble and Clump (D&C)[6),7)], Russian Roulette and Splitting (RR&S)[8),9)],Importance Sampling Method (ISM)[10),11)]など，計算量を効率化した解析手法が提案されている．

さらに，これらの解法ではサンプル数の操作方法などにおいてGenetic Algorithm:GA[12)]や MCSを基本とした離散最適化手法[13),14)]と共通した考え方が見られる．

したがって，D&C，RR&S や ISMなどのMCSを応用した解法を用いて，小さい値を示す初通過確率を精度良く求めるためにはGAなどの離散最適化手法と同様に，効率化のためのアルゴリズムの考え方やそのプログラムの良否が決定的な影響を与えることになる．

そこで本研究では，効率化 MCS の1解法である Double and Clump (D&C)において，動的信頼性解析の初通過確率を効率良く算定するためのサンプルを操作する判断基準を提案し，数値解析により検証している．

## 2．初通過確率と Monte Carlo Simulation

初通過確率は外乱を受けたシステムの応答が全継続時間内に基準レベルを少なくとも1度は超過する確率と定義されている．

そこで，多自由度システムにおける応答ベクトルを $\mathbf{Z}_n(t)=[\mathbf{x}_n(t),\dot{\mathbf{x}}_n(t)]^T, n=1,2,\cdots,N$ とすると，MCS により求められる初通過確率は式(1)のように表される．

$$P_f(T)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}I[\mathbf{Z}_n(t)] \tag{1}$$

$$I[\mathbf{Z}_n(t)]=\begin{cases}1\,;g(\mathbf{Z}_n(t))\le 0,0\le t\le T)\\0\,;g(\mathbf{Z}_n(t))>0,0\le t\le T)\end{cases}$$

$T$：全継続時間，$I[\mathbf{Z}_n(t)]$：指標関数

$g(\mathbf{Z}_n(t))$：システムの性能関数，$N$：サンプル数

ここで，式(1)よりサンプル数 $N$ が十分大きければ確率は不偏推定値となるが，一般に地震荷重が作用するシステムの初通過確率は，小さな値を示すため，それを正確に求めるには数多くのサンプルが必要となり，その結果多大な計算時間を必要とする．

したがって，少ないサンプル数で小さな初通過確率を正確に求めるためには，MCS の効率化が必要となる．

## 3．D&C(Double and Clump)の概要

### (1)アルゴリズム

$$\begin{cases}\mathbf{Z}_1(t_k) & w_1(t_k) & C_1(t_k)\\ \mathbf{Z}_2(t_k) & w_2(t_k) & C_2(t_k)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{Z}_i(t_k) & w_i(t_k) & C_i(t_k)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{Z}_{nSim}(t_k) & w_{nSim}(t_k) & C_{nSim}(t_k)\end{cases} \tag{2}$$

$w_n(t_k)$：重み(初期値 $w_n(0)=1/nSim, n=1,2,\cdots,nSim$ )

$C_n(t_k)$：選定基準(基準レベルを超過する確率)

まず，システムの破壊基準レベル（本研究では応答変位が許容変位を越えた場合を破壊と定義）を設定し，不規則外乱を *nSim* 組発生させ動的応答解析をおこなう．ここで Markov 性を有するシステムの時刻 $t_k$ における各サンプルの応答ベクトル $\mathbf{Z}_n(t_k), n=1,2,\cdots,nSim$，重み，および各サンプルに対する選定基準を(2)のように定義する．

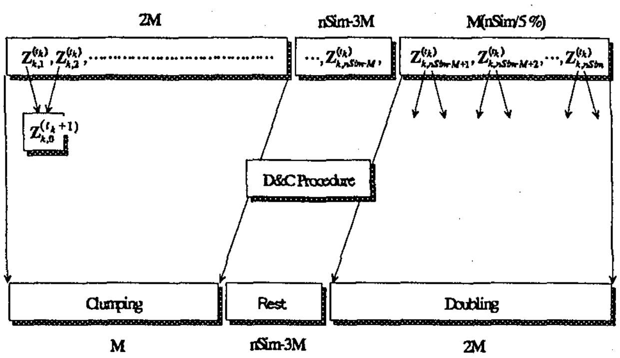
次に，*nSim* 組のサンプル応答ベクトルが基準レベルを通過する可能性の大きさ(選定基準：$C_n(t_k), n=1,2,\cdots,nSim$)を求め，式(3)に示すように大きい順に並び替える．

$$C_{j,1}(t_k)\le C_{j,2}(t_k)\le\cdots\le C_{j,nSim}(t_k)\quad j=1,2,\cdots,nSim \tag{3}$$

そこで図－1に示すように，$t_k$ ステップにおける選定基準値の上位 $M$ 個（通常はサンプル総数の20%以下）のサンプルを $2M$ 個に増加(Doubling)させ，次回の時間ステップ($t_{k+1}$)のサンプルとする．

また，同時にサンプル総数 *nSim* 個を維持するように選定基準の小さい $2M$ 個のサンプルを $M$ 個に減少させる(Clumping).

これにより，破壊基準レベルを通過する確率の高いサンプルを増加させる操作を行うことで，MCS より少ないサンプル総数で効率かつ正確に初通過確率の推定しようとする方法である．




図－1　D&C のｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ

### (2) サンプルの統計量修正

上記操作により破壊基準レベルを通過する確率の高いサンプルは多くなるが，サンプル全体の統計量が変化する．そこで Doubling したサンプルには式(4)のように重みを 1/2 に減少させる．

$$w_{k,nSim-M+1}^{(t_k)}\Rightarrow\frac{1}{2}w_{k,nSim-M+1}^{1(t_k+1)},\ \frac{1}{2}w_{k,nSim-M+1}^{2(t_k+1)} \tag{4}$$

また，Clumping されたサンプルの重みは式(5)のように Clumping 以前に有していた重みの和とする．

$$w_{k,0}(t_k+1)=w_{k,1}(t_k)+w_{k,2}(t_k) \tag{5}$$

ここで，改めて D&C による全継続時間 $T$ における破壊確率すなわち初通過確率を表すと式(7)のよう

になる．

$$P_f(T)=CDF(T)=\sum_{n=1}^{nSim} I[\mathbf{Z}_n(T)]\cdot w_n(T) \qquad (6)$$

$w_n(T)$：全時刻$T$における各サンプルの重み

しかし，式(6)ではサンプル全体の統計量の変化に対する修正は不十分である．そこで影響を極力与えないような Clumping サンプルの組み合わせを探し出すために，式(7)に示すサンプル間の正規化した距離を用いる．

$$d_{j1,j2}(t_k)=\sqrt{\sum_{m=1}^{nState}(\mathbf{Y}_{j1,m}(t_k)-\mathbf{Y}_{j2,m}(t_k))^2} \rightarrow \min \qquad (7)$$

$$\mathbf{Y}_{j,m}(t_k)=\frac{\mathbf{Z}_{j,m}(t_k)-\hat{\mathbf{z}}_m(t_k)}{\sigma_m(t_k)}\cdot q(m)$$

$m$：ﾍﾞｸﾄﾙ構成要素，　$j1, j2$：異なるｻﾝﾌﾟﾙ実現値，
$\sigma_m(t_k)$：残存ｻﾝﾌﾟﾙ標準偏差，$\hat{z}_m(t_k)$：残存ｻﾝﾌﾟﾙ平均値，
$q(m)$：相対的重要度（$q(m)=1$，$m=1,2,\cdots,nState$）

よって，式(7)により距離差が最小となるサンプルを見つけだして Clumping することで，サンプル全体の統計量の変化を最小限に止めることが可能となる．

## 4．選定基準の設定

### (1)サンプル選定の基準

MCSを基本とした方法では，離散最適化手法と同様に操作を施すサンプルを選定する基準が初通過確率を正確に算定する上で重要となる．そこで以下のような選定基準を設定する．

a)選定基準1

まず，単純に式(8)に示すように絶対応答変位（破壊基準レベルまでの距離）を選定基準とする．

$$C_n(t_k)=|z_n(t_k)| \quad n=1,2,\cdots,nSim \qquad (8)$$

b)選定基準2

次に，基準レベル通過の可能性をサンプルの絶対応答変位とその勾配すなわち速度を加えたものを選定基準とする．

$$C_n(t_k)=\left| a\cdot\left(\frac{z_n(t_k)}{\sigma_{x(t_k)}}\right)^2+b\cdot\left(\frac{\dot{z}_n(t_k)}{\sigma_{\dot{x}(t_k)}}\right)^2\right| \quad ,n=1,2,\cdots,nSim \qquad (9)$$

$z_n(t_k)$：応答変位，$\dot{z}_n(t_k)$：応答速度，
$\sigma_{x(t_k)}$：残存ｻﾝﾌﾟﾙ応答変位の標準偏差，
$\sigma_{\dot{x}(t_k)}$：残存ｻﾝﾌﾟﾙ応答速度の標準偏差

$$a=\begin{cases}1; x_n(t_k)>0\\-1; x_n(t_k)<0\end{cases},\quad b=\begin{cases}1; \dot{x}_n(t_k)>0\\-1; \dot{x}_n(t_k)<0\end{cases}$$

ここで式(9)は各サンプルの変位が破壊基準レベルからどれだけ離れているか，またどれだけの速度で基準レベルに近づいているかを表している．加えて，変数$a,b$は変位・速度の方向を表している．

### (2)重みの上・下限値

MCS では，サンプルに重みを付加しないため，サンプル数が多くなれば破壊確率は正確に求めることができる．しかし D&C では Doubling もしくは Clumping されたサンプルの重みは時刻とともに変化するため，どのサンプルがどの時刻で破壊基準レベルを超過するかで初通過確率に大きな影響を与えることになる．

そこで，サンプルに付加する重みの上・下限値を式(10)，(11)のように設定し，これによりのサンプルの Doubling，Clumping 操作の制限を設ける．

上限値：$w_{max}=2/nSim=2\cdot w_n(0)$　　(10)

下限値：$w_{\min}=w_f\times 10^{-3}$　　(11)

$w_f$：最初に破壊基準ﾚﾍﾞﾙを超過したｻﾝﾌﾟﾙの重み

ここで，式(11)ではサンプルの重みの下限値を設定したが，本手法では最初に破壊基準レベルを超過した重みの値$w_f$によって算定する初通過確率の精度にバラツキが生じる．

そこで，この重みの値$w_f$をパラメータとして，サンプルに与える下限値を変化させることで初通過確率の安定化を図る．

$(CDF(t_k)-CDF(t_{k-1}))\neq 0\cap w_f\neq 0\cap CDF(t_{k-1})\neq 0$のとき，

初期の重みの下限値；$w_{\min}=w_f\times 10^{-3}$

$|\log_{10}(CDF(t_k)-CDF(t_{k-1}))-\log_{10}(w_f)|>1.5$ならば，

$w_f=w_f/10$（下限値を下げる）

$|\log_{10}(CDF(t_k))-\log_{10}(w_f)|>1.5$　ならば，

$w_f=w_f\times 15$（下限値を上げる）　　(12)

以上より，重みに限界値を設けて D&C を実施するサンプルの選定基準を設定し，同時にその重みを制限することで，安定した初通過確率を求めることを目標とする．

## 5．数値解析

提案したサンプルの選定基準や重みの限界値等のの有効性を線形 1 自由度と非線形（バイリニア）モデルを用いて，Monte Carlo Simulation により算定した初通過確率と比較することで，その精度を検証する．

### (1) ホワイトノイズ入力を受けた線形1自由度系モデル

線形 1 自由度系モデルの振動方程式は式(13)で表される．

$$\ddot{x}(t)+2\beta_s\omega_s\dot{x}(t)+\omega_s^2x(t)=-F(t) \qquad (13)$$

ここで，モデルの減衰定数$(\beta_s)$：0.05，固有円振動

数$(\omega_s)$: 6.28 $(rad/\mathrm{sec})(\approx 1Hz)$とし，また入力モデルは式(14)を用いている．

$$F(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(\omega_k\cdot t+\phi_k) \qquad (14)$$

$a_k=\sqrt{2S_x(\omega_k)\Delta\omega}$（$S_x(\omega_k)$：片側ﾊﾟﾜｰｽﾍﾟｸﾄﾙ）

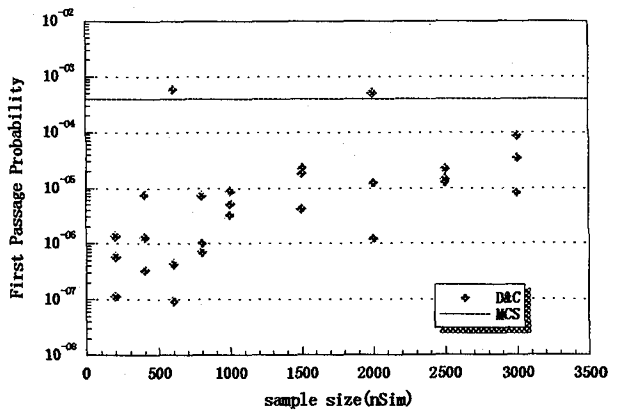
$\phi_k=U\,(0,2\pi)$

$\Delta\omega=(\omega_u-\omega_l)/256=0.2453,\ (rad/\mathrm{sec})$

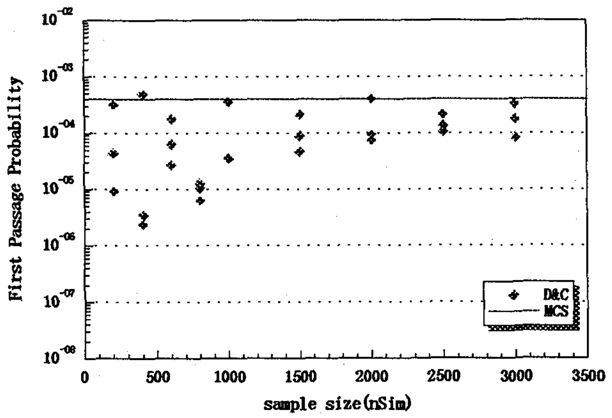
ここで$F(t)$は$\omega_l=0Hz$，$\omega_u=10Hz\,(\approx 62.8rad/\mathrm{sec})$の周波数帯域をもつホワイトノイズとし，そのときの$F(t)$の標準偏差が$100gal(=cm/\mathrm{sec}^2)$となるよう計算している．

以上の条件の下で全継続時間$T=20(\mathrm{sec})$，時間刻み$\Delta t=0.1(\mathrm{sec})$の$200step$で応答解析を行っている．ここでは MCS は十分に安定するシミュレーション結果 60 万回を使用している．

（Case1）式(8)に示したサンプルを選定する基準を絶対変位のみとし，重みに対する制限を加えない場合のサンプルサイズ数と初通過確率の精度を図-2 に示す．ここで，安全レベルは応答変位の標準偏差の 4.75 倍（後述，式(15)）とし両側に設定している．




図－2　初通過確率（Case 1）



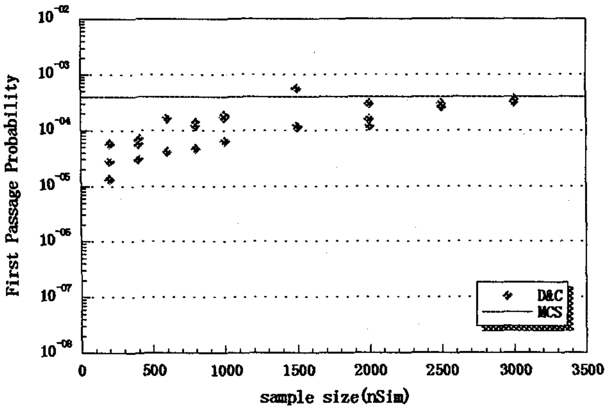

図－3　初通過確率（Case 2）

図-2 より，D&C による初通過確率の算定値はサンプルサイズが 3,000 以内では安定しておらず，加えて初通過確率の精度も良くない．

（Case2）次にサンプルを選定する基準は同様に絶対変位（式(8)）のみとし，重みに対する制限を式(10),(11)のように上･下限値のみ設定した場合のサンプルサイズ数と初通過確率の精度を図-3 に示す．

図-3 より，初通過確率の算定値は安定してきているものの，まだ初通過確率の精度向上は見られない．

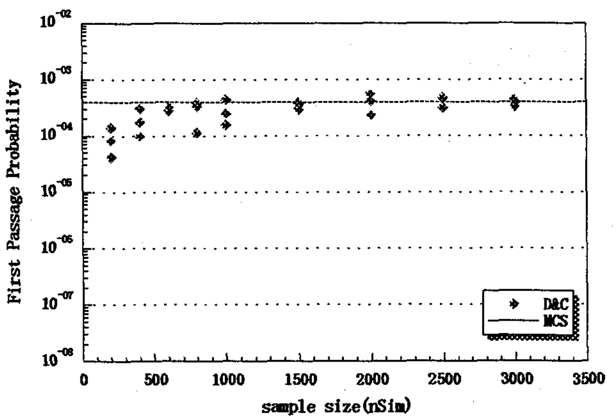
（Case3）そこで，サンプルを選定する基準は替えずに絶対変位とし，重みに対する制限を上・下限値の設定に加えて，式(12)に示した基準重みの値$w_f$により下限値を変化させた場合のサンプルサイズ数と初通過確率の精度を図-4 に示す．




図－4　初通過確率（Case 3）

図-4 より，初通過確率の算定値は安定し，加えて精度はサンプル数 2,500 程度で MCS（60 万回）の結果とほぼ同じになっている．

（Case4）最後に，サンプルを選定する基準を絶対変位と速度とし，同様に重みに制限を上・下限値と基準重みの値$w_f$により下限値を変化させた場合のサンプルサイズ数と初通過確率の精度を図-5 に示す．




図－5　初通過確率（Case 5）

図-5より，初通過確率の算定値は安定し，加えて推定精度はサンプル数 1,500 程度で MCS（60 万回）の結果とほぼ同じになっていることが確認できる．

これより，サンプルの選定基準と重みに対する制限を設けることの有効性が示され，D&C は効率的な MCS 手法と言える．

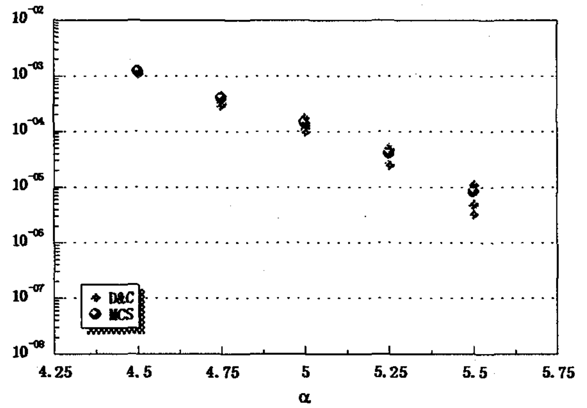
さらに小さいレベルの初通過確率を設定し，同様に D&C と MCS により算定した確率と比較して，その精度を比較した．

この結果を図-6 に示す．ここで，D&C におけるサンプルサイズはすべて 3000 とし，図中の $\alpha$ は算定する初通過確率の破壊基準レベル $\lambda$ を段階的に設定する．各破壊基準レベル $\lambda$ は式(15)に示すように，100 サンプル応答変位の標準偏差の任意倍数として設定する．したがって倍数が大きくなるに従い，設定する初通過確率は確率分布のすその部分の小さい確率を求めることになる．

$$\lambda = \alpha \cdot \sigma_{z(t_k)} \tag{15}$$

$\sigma_{z(t_k)}$ :応答波形の標準偏差，$\alpha$ :任意定数

また，D&C を実施したサンプル数はサンプル全体の約 20%で行っている．




図－6　各レベルの初通過確率

図－6より，小さい初通過確率を 60 万回の MCS と同程度に精度良く推定している．

**(2) バイリニア系モデルの破壊確率の推定**

次に，バイリニア系モデルの振動方程式は式(16)で表される．

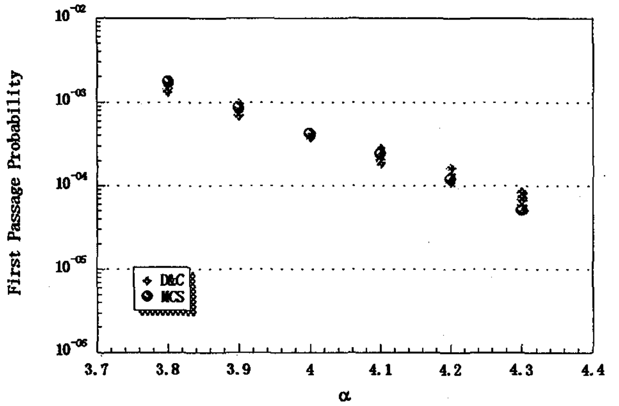
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\eta(x(t)) = -mF(t) \tag{16}$$

$$\eta(x(t)) = \begin{cases} x(t)\ ;\ |x(t)| < X_e \\ \gamma x(t) - X_e\ ;\ |x(t)| < X_e \cap x(t) \geq 0 \\ \gamma x(t) + X_e\ ;\ |x(t)| < X_e \cap x(t) < 0 \end{cases}$$

ここで，減衰定数 $(\beta_s)$; 0.05，固有円振動数 $(\omega_s)$; 7.07 $(rad/\mathrm{sec})$，$X_e = 3.0\ (cm)$，$\gamma = 2.0$ としている．

以上の条件で全継続時間 $T = 10(\mathrm{sec})$，時間刻み $\Delta t = 0.01(\mathrm{sec})$ の計 1000*step* で応答解析を行い，MCS は 10 万回におけるシュミレーション結果を用いた．

また，前記同様にサンプル個数 3,000 個として，D&C を実施するサンプル数を全体比率の L=20%として解析を行った結果を図－7 に示す．




図－7　各レベルの破壊確率

図-7 よりバイリニア系モデルにおいても 10 万回の MCS と同程度の初通過確率が求められている．

以上より，サンプルを選定する基準と重みの限界値を適切に設定することで，D&C による効率的な初通過確率の算定が可能なことを示すことができた．

## 6. 結　論

不規則な外乱を受ける構造物の信頼性を評価する上で初通過確率を正確に推定することは重要な問題である．

そこで効率化 Monte Carlo Simulation の 1 解法である D&C において，サンプルを制御する際に適用される選定基準を提案し，その有効性と D&C による初通過確率の推定精度を MCS により得られた確率と比較することにより検証した結果，以下に示す結論が得られた．

1) 線形 1 自由度モデルでは，提案した選定基準を用いた初通過確率の算定値は安定しており，1,500 程度のサンプル数で，シミュレーション回数 60 万回の MCS と同程度の初通過確率を示した．

2) バイリニア（非線形）モデルにおいても，提案した選定基準を用いた算定値は安定しており，3,000 個程度のサンプル数でシミュレーション回数 10 万回の MCS と同程度の初通過確率が求められた．

3) D&C では，サンプル個数を制御する際に適切な選定基準を設定することにより，精度の高い初通過確率が得られ，加えて提案した選定基準の D&C に対する有効性が示された．

## 参考文献


1)髙橋利恵, 濱本卓司:ﾏﾙｺﾌ過程を用いた構造物の確率的損傷予測ﾓﾃﾞﾙ, JCOSSAR'91 論文集, Vol. 2, pp. 37-41, 1991.

2)持尾隆士:荷重組合せを考慮した履歴系構造物の疲労損傷評価, JCOSSAR'95 論文集, Vol. 3, pp. 269-276, 1995.

3)Lin,Y.K. and Cai,GQ.,:Probabilistic Structural Dynamics, Advanced Theory and Applications. McGraw-Hill,Inc.,New York,1995.

4)Rice,S.O.:Mathematical Analysis of Random Noise,Selected Papers on Noise and Stochastic Processes,Pover,pp.133-294, 1954.

5)Rubinstein,R.Y.,:Simulation and Monte Carlo Method,John Wiley & Sons,New York,1981.

6)Pradlwarter,H.J.,Schueller,G.I., P.M.Melnikov:Reliability of MDOF-Systems,J.*Probabilistic Engineering Mechanics*, pp. 235-243.1994.

7) Pradlwarter,H.J.,: A Selective MC Simulation Technique for Nonlinear Structural Reliability Assessment,Proc.ASCE Specially Conference, pp.451-454,1992.

8)Pradlwarter, H.J.and Schueller, G.I,: Assessment of Low Probability Evens of Dynamical Systems by Controlled Monte Carlo Simulation, *Applied Mechanics Review*, 1997

9) Pradlwarter,H.J., and Schueller,G.I.,: On Advanced MCS Proceduers in Stochastic Structural Dynamics, Journal of Non-Linear Mechanics,1996.

10)Bayer,V.and Bucher,C.:An Importance Sampling Procedure For First Passage Problem, *Proc. of ICOSSAR*, Kyoto,1997.

11) Bayer,V.and Bucher,C.:A Simulation Procedure for First Passage Problem of Nonlinear Structures, Proc. ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability,pp.816-819,1996.

12) D.E.Goldberg: Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning, Addison-Wesly,1983.

13) M.Hoshiya and A Sutoh: Optimization Analysis by Importance Sampling, GA procedure and other MCS-Based Algorithms,Jour. of Probabilistic Engineering Mchanices, Vol.12,No.14,pp.221-223

14) 須藤敦史,星谷勝,宮沢和樹:遺伝的要素を考慮したｲﾝﾎﾟｰﾀﾝｽｻﾝﾌﾟﾘﾝｸﾞによる離散型変数を有するｼｽﾃﾑの最適化,土木学会論文集,第519号, I -32, pp.223-232,1995.


(1998. 9. 18 受付)