

多角形リングのたたみ込み手法に関する研究

A STUDY ON FOLDING PROBLEMS OF POLYGONAL RING

井口真一*, 後藤茂夫**, 井嶋克志***, 帯屋洋之****, 川崎徳明*****

Shin-ichi IGUCHI, Shigeo GOTO, Katsushi IJIMA, Hiroyuki OBIYA and Noriaki KAWASAKI

*学生員 修(工) 佐賀大学大学院工学系研究科 (〒840-5802 佐賀市本庄町一番地)

**正会員 工博 (株) フォーラムエイト (〒812-0025 福岡市博多区店屋町 1-31)

***正会員 工博 佐賀大学助教授 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町一番地)

****正会員 博(工) 佐賀大学助手 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町一番地)

*****正会員 佐賀大学技官 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町一番地)

This paper shows various folding ways of polygonal ring by numerical calculations. In a folding problem of ring, only one way was known, so that the cross-section of ring possible to fold had restriction in the aspect. However, the folding ways combining compulsory rotation and translation can fold rings with any cross-section, even if the ring is such a brim of a hat. The method indeed numerically simulates ring folding by hand.

Key Words :folding problem of ring, 3-D geometrically nonlinear analysis, tangent stiffness method

1. まえがき

近年, 宇宙構造物の高効率な輸送や回収・建設に向けて, 構造物のたたみ込みに関する研究¹⁾が注目されている。

なかでもリングのたたみ込みは, 初期半径の $1/3$, 容積 $1/9$ となり, さらに, 外力が完全にゼロの状態でたたみ込みが保持されるため, 最も効率的なたたみ込み手法の一つといえる。

このリングのたたみ込み問題については後藤(芳)²⁾らによって既に弾性座屈現象を利用した畳み込み法として詳しい研究がなされている。ここでは, リングの対蹠点を直径軸まわりの回転のみによるたたみ込み手法を用い, リング断面の縦横比をパラメータとしてたたみ込み可能な断面の領域・不可能な領域を示している。その後, Paiらによっても, たたみ込み可能な断面について同様な結果が報告されている³⁾。

しかしながら, 実際に模型リングを手でたたみ込むような場合には, たたみ込み不可能とされる断面でも可能となる。これは, 純粋に回転のみを制御しているわけではなく, 無意識に手で“押し込む”操作を行うためであり, 円形断面のリングなどでも簡単にたたみ込むことが可能となる。

従って, 数値計算によるたたみ込みを行う際にも, 支点条件, 回転方向, 並進制御などの組み合わせによって,

初期形状よりたたみ込み解を得るまでの制御手順は無限に存在するものと考えられる。著者らの知る範囲では, このことについて言及し, 解析を試みた文献は見あたらない。

本研究では, 既往の文献における, リングの法線軸まわりの回転を与える方法のほかに, リングの接線軸まわりの回転変位制御によってもたたみ込みが可能であることを示し, さらに, 支点条件の変更, 並進変位制御等を組み合わせることによって, 合理的なたたみ込み手法の開発を行っている。

本手法によれば, 数値計算結果と実現象との不整合の一因である“すり抜け”現象を容易に回避でき, これにより, 既往の文献に示されたたたみ込み限界を超えるような断面であっても, 厳密な三重リングとしてのたたみ込み解を得られることが明らかになった。

また, 本研究で用いる接線剛性法は, 文献 7) ~14) で示したように, 要素剛体変位による幾何学的非線形性と 3 次元有限回転を厳密に評価できる合理的な解析理論である。従って, 本理論による解析プログラムを用いれば, 僅か 12 分割の半リングを解析モデルとした場合でも, 200 分割半リングモデルによる有限要素法の解に相当する精度の挙動解析が可能となる。さらに得られるたたみ込み解では, 全節点が厳密な同心円上に配置され, 全部材における軸方向力は完全に 0 となる高精度な解析を効率的に行うことができる。

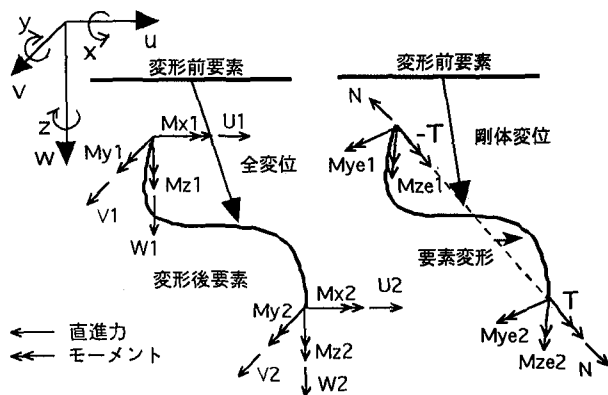


図-1 剛体変位と要素変形

以上により、本研究において提案するリングのたたみ込み手法、及び、数値計算結果は今後のたたみ込み制御法の開発にあたって有効な手段を与えるものと考えられる。

2. 接線剛性法による立体骨組構造解析

リングのたたみ込み挙動のような強い幾何学的非線形性を考慮すべき問題においては、要素自体の変形に起因する非線形性に対して、要素の剛体変位に起因する非線形性の方が遙かに支配的と考えられる。従って、図-1 左図に示した全変位と要素内のひずみの適合条件（厳密な定式化は不可能）の非線形性を評価するよりは、図-1 右図における剛体変位に起因する幾何学的非線形成分（剛体変位成分）を厳密に評価する方が、より効率的で合理的なプログラムを構成することができる。また、図-1 の x, y, z はそれぞれ、座標系の u, v, w 軸まわりの回転を表し、左図は基準座標系における節点力、右図は要素両端を結ぶ弦を第 1 軸とする要素座標系における互いに独立な要素力を示している。

本研究で用いる接線剛性法では、前述の剛体変位成分を、節点における節点力と要素力の釣合関係の非線形性として厳密に評価することが可能となる。また、厳密な適合条件を経由する反復手法により、弾性屈後の極端な大変形域においても、非線形剛性方程式を定式化することなく、高精度な収束解が得られることが、著者らの文献 7)~14) 等で明らかになっている。

さらに、立体構造解析においては、ベクトル則の成立しない有限回転の厳密な評価が必要となり、これまでも、座標変換マトリックスを用いる手法¹⁵⁾、オイラー角による定式化¹⁶⁾、退化型要素を用いる手法¹⁷⁾などが提案されている。著者らのこれまでの研究^{11), 12), 13), 14)}においても、要素端におけるたわみ角の算定と、反復段階ごとの節点（回転）変位ベクトルの更新を行う部分について、座標変換マトリックスを用いた回転の合成により、厳密な有限回転処理を行っている。実際の演算は以下の

ようになる。

座標変換マトリックス $\Phi(r)$ は、 r を有限回転ベクトルとし、

$$\Phi(r) = \frac{rr^T}{r^2} (1 - \cos r) + e \cos r - \frac{r}{r} \times \sin r$$

$$r^2 = r^T r \quad (1), (2)$$

として表され、回転 r_1 に続いて r_2 が発生した場合の厳密な合成回転 r は、

$$r = r_1 \oplus r_2 = \Phi^{-1} \left\{ \Phi(r_1) \Phi(r_2) \right\} \quad (3)$$

のように表すことができる。

なお、定式化過程の詳細については、文献 7), 8), 11), 13) を参照されたい。

3. 多角形リングのたたみ込み解析

接線剛性法によるリングのたたみ込み解析では、例えば、12 要素よりなる半リングモデルを用いた場合、初期状態に対して非常に大きな変位増分を一時に与えても、 $\pi(\text{rad})$ 以下の範囲であれば確実に収束し、荷重漸増による経路追跡によって得られた荷重-変位曲線上の解に完全に一致する。また、部材相互の交差・接触を考慮せず、自由な変形を許す仮想的なリングモデルとした場合には、変位増分 $\pi(\text{rad})$ の一時載荷による収束解は、全部材における端モーメントが均一で軸力は完全に 0 となる厳密な 3 重リングとなる¹³⁾。

多角形リングを合理的にたたみ込むためには、たたみ込みの過程において、できるだけ交差・接触を発生させないことが重要となる。本論文では前述のように接触現象そのものを取扱っていないわけではないので、実現象としての交差・接触が発生する時点で、数値計算上では、“すり抜け”現象が起こることになる。本章では、たたみ込みが完了する直前まで、すり抜けを発生させずに多角形リングをたたき込むために、載荷方向、支点条件等の違いによる 6 通りのたたみ込み手法について検討し、それぞれの方法について、たたみ込み可能な断面形状の制約条件、収束性、解析精度についての検証を行う。

3.1 解析モデルと諸元

解析モデルは、図-2 に示すような、半径 $R=12\text{m}$ の円に内接する 2 節点剛節要素で構成された正多角形リングとし、 I_{xx}, I_{yy} を xx 及び yy 軸まわりの断面 2 次モーメント、 J をねじり抵抗とする。文献 2) にならい、リング半径と部材断面の幅の比を $R/b=20$ とした。また、矩形断面の形状を表すパラメータとして、 b/h を用いることとする。

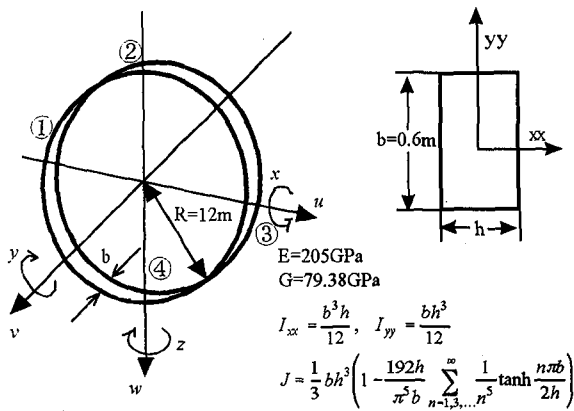


図-2 リングの設定と部材断面・断面諸値

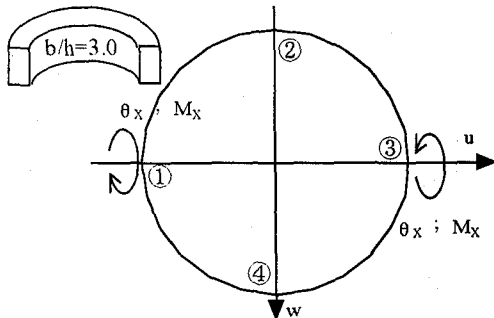


図-3 法線ねじりのリングモデル

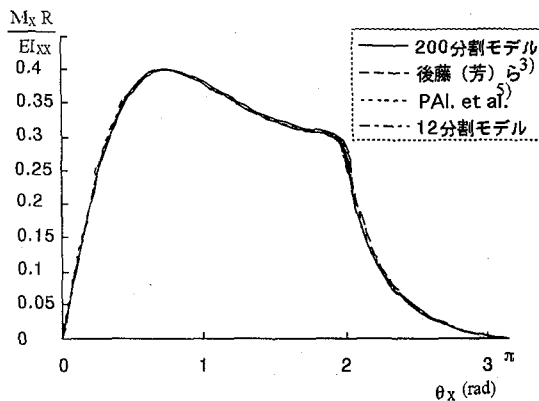


図-4 荷重-回転変位曲線

外力の作用方向については、図-2 における①,③点における法線軸まわりの回転を与える場合（以下、法線ねじりと呼ぶ）、②,④点における接線軸まわりの回転を与える場合（以下、接線ねじりと呼ぶ）の二つの载荷パターンを設定する。また、座標軸上の x, y, z はそれぞれ、 u, v, w 軸まわりの回転を表すものとする。なお、本研究では、非対称モード等の分岐経路は対象としていないので、モデルの対称性を考慮して半解析としている。

3.2 法線ねじりによるたたみ込み

法線ねじりは、既往の文献²⁾⁻⁶⁾においても、採用され

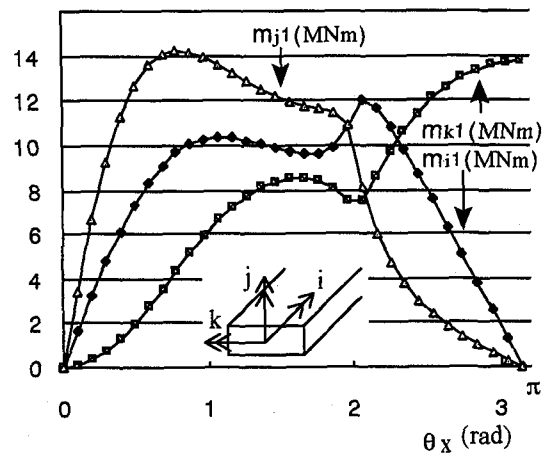


図-5 要素座標系における荷重-回転変位曲線

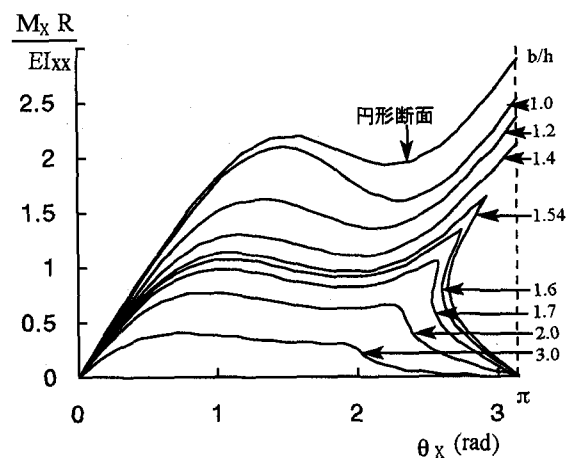


図-6 荷重-回転変位曲線

ているたたみ込み手法であるが、著者らの論文 12)および 13) においてねじり剛性の値の設定にミスがあったため、ここで再び文献 3), 5) との比較を行い、検証する。なお、文献 2) と同様に $b/h=3.0$ 、200 要素の半リングモデルを用いる（図-3）。

図-4 から、本解析における 200 分割モデルは文献 3), 5) の解とよく一致している。また、一般に円とは異なった構造と考えられる 24 角形リング（24 要素）の半リングモデルの解析結果を併せて示しているが、支点反力としてのモーメントの最大値に関して 1.6 パーセントの差しか生じないため、以後の計算例では計算時間が大幅に短縮される 24 角形すなわち 12 分割の半リングモデルを用いることにする。また、この 12 分割の半リングモデル解析時の①点における要素座標系表示の曲げモーメント-回転変位曲線を図-5 に示している。◆, △, □ は、それぞれ、ねじれモーメント m_{ii} 、 j 軸まわりのモーメント m_{ji} 、 k 軸まわりのモーメント m_{ki} を示している。たたき込まれた後で、 m_{ii} 、 m_{ji} は完全に 0 になるが、 m_{ki} が存在しているため、リングは自己釣合状態であることがわかる。

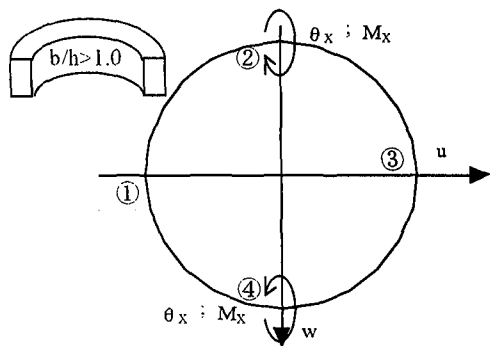


図-7 接線ねじりのリングモデル

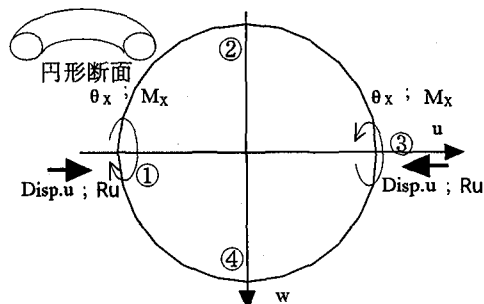


図-9 リングモデル

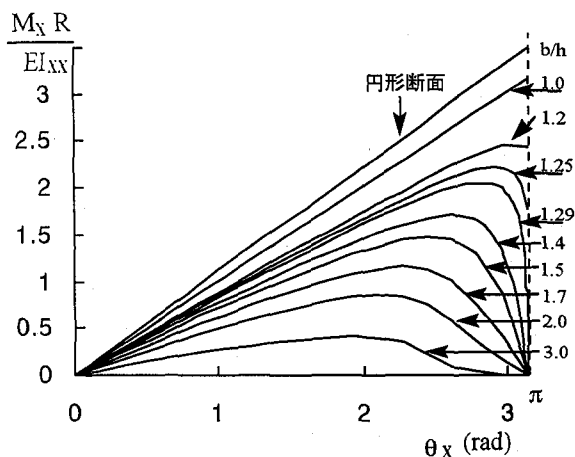


図-8 荷重-回転変位曲線

また、図-6 に矩形断面の縦横比をパラメーターとしたときのたたみ込みが可能な領域についての検討の結果を示している。すり抜けない範囲でたたみ込み可能であるのは b/h が 1.54 以上であり、文献 3) の $b/h \geq 1.54$ 、文献 4) の $b/h > 1.55$ 、文献 5) の $b/h \geq 1.542$ と比較しても有意な差は認められなかった。

3.3 接線ねじりによるたたみ込み

リングの対蹠点における接線ねじりによるたたみ込みを行い、3.2 節と同様に検討する (図-7)。

この接線ねじりによるたたみ込み解析は、断面形状に関わらず、すり抜ける現象が発生しない有効なたたみ込み手法である。

図-8 に断面比に関する検討の結果を示しているが、たたみ込み可能であるのは b/h が 1.29 以上であり、法線ねじりによる手法よりたたみ込める部材断面の領域が増す結果となっている。

また、このたたみ込み手法は、如何なる断面であっても変位制御時における飛び移りが発生しない特徴を持つことがわかる。

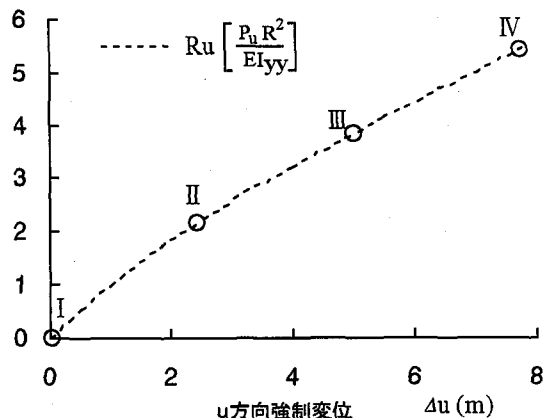


図-10 並進過程での荷重-変位曲線

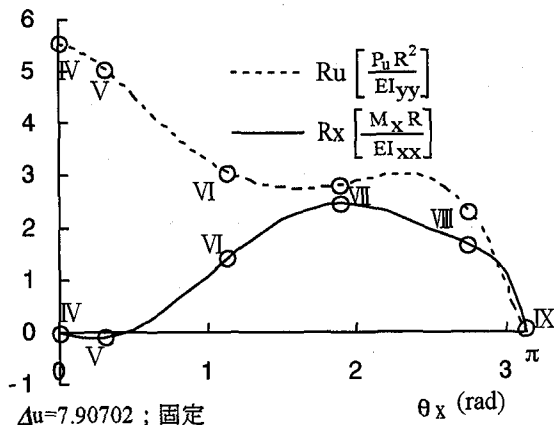


図-11 回転過程での荷重-回転変位曲線

3.4 法線軸まわり回転+支点的並進移動

法線ねじりにおいてたたみ込み不可能な断面になると回転を与える支点部 (図-9①,③) が、大きく遠ざかる挙動を示す。これにより、②,④点が中心方向に大きく変位し、すり抜けが発生する。

ここでは、一旦①-③点間の距離を、たたみ込み後の理論解に一致するまで u 方向に強制変位させた後、①,③点に図のように回転を与えることにより、すり抜けを全く発生させずにたたみ込む方法により解析を行った。

なお、ここでは前節までの解析ではたたみ込み不能であった円形断面を用いている。その結果を、並進過程と

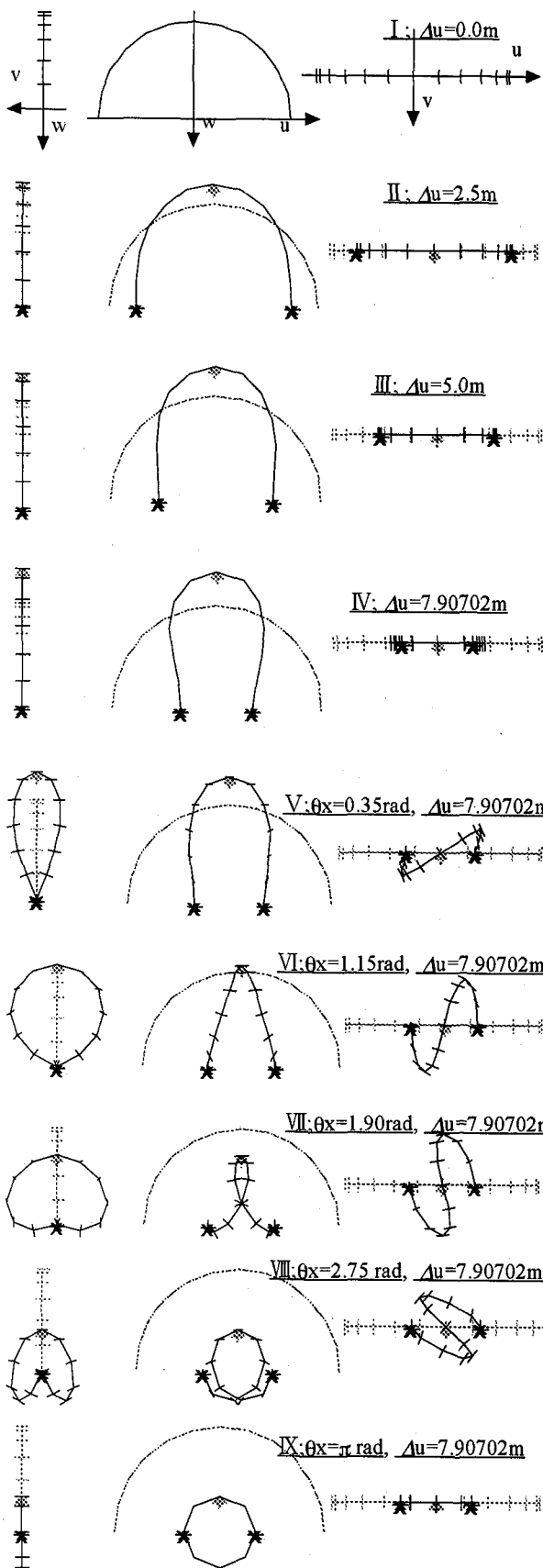


図-12 変形過程

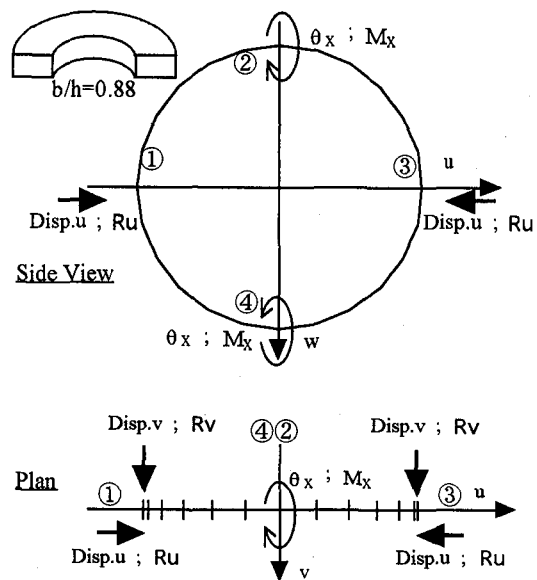


図-13 リングモデル

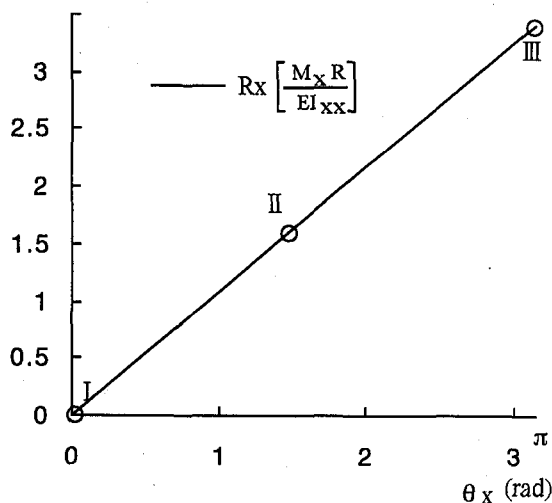


図-14 並進過程での荷重-回転変位曲線

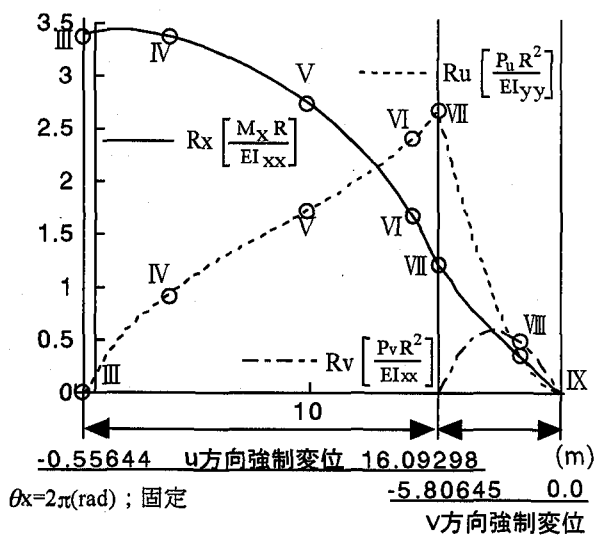


図-15 回転過程での荷重-回転変位曲線

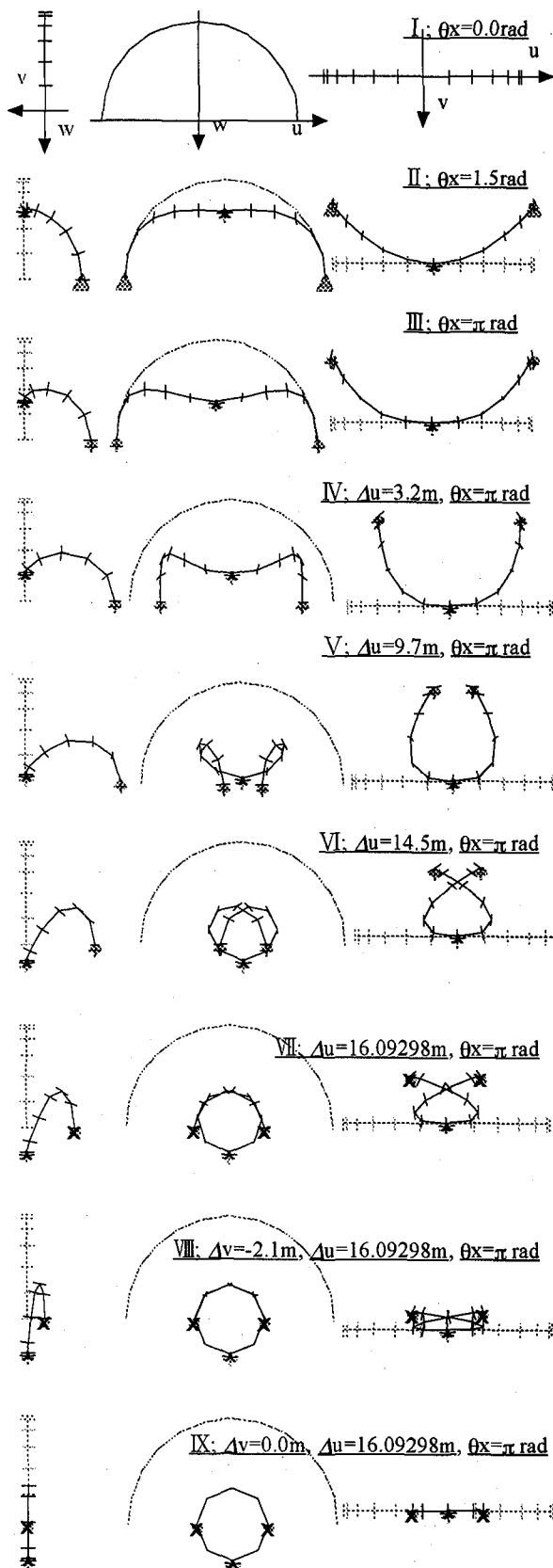


図-16 変形過程

回転過程とに分けて図-10、図-11 に示し、それぞれの図中、ローマ数字と共にあるドットに対応する変形図

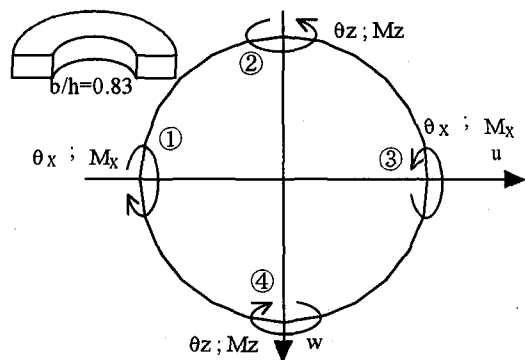


図-17 リングモデル

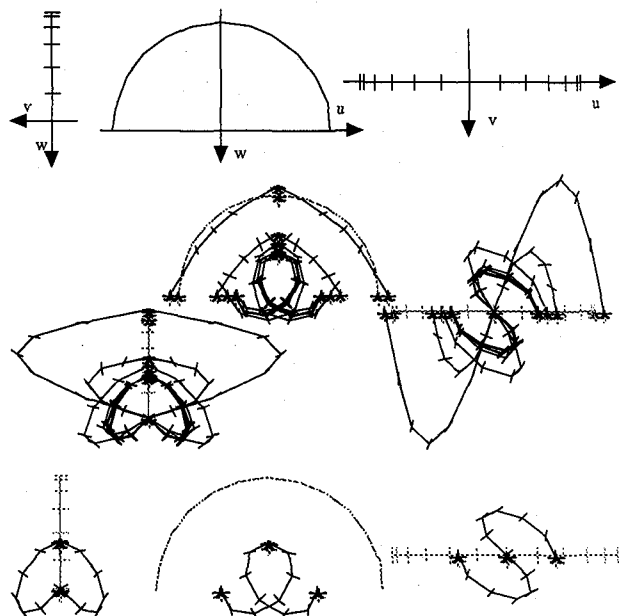


図-18 反復過程と収束後の変形図 (0~2.5(rad))

を、図-12 に示す。また、並進変位は、初期状態の支点①、③の座標値からリング中心へ向う増分を、 Δ を用いて表記する。

図-11 から判るように、並進過程が終了したIVの時点では、 u 方向に対して非常に大きな反力が作用しているが、たたみ込み終了時 (IX) には、回転 (x) 方向、並進 (u) 方向の反力とともに、全部材における軸方向力も完全に 0 となる厳密な三重リングとなる。

3.5 接線軸まわり回転+支点の並進移動 (u, v 方向)

3.4 節では、支点の並進移動を用いることによってたたみ込みやすさとしてのたたみ込み性能が大きく向上した。そこで、接線ねじりにもこの方法の採用を試みる。接線ねじりでは、元々すり抜ける現象が発生しないたたみ込み法であるため、図-13 の支点部②、④を接線まわりに π (rad)回転させた後に、支点①、③の並進移動を行う。

本たたみ込み手法では、3.4 節のように、 u 方向のみの並進移動ではたたみ込むことができない。そのため、 v 方向の並進移動も用いる。

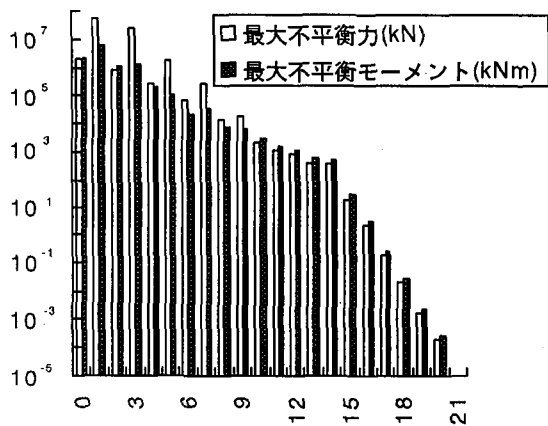


図-19 最大不平衡力の推移図 (0~2.5(rad))

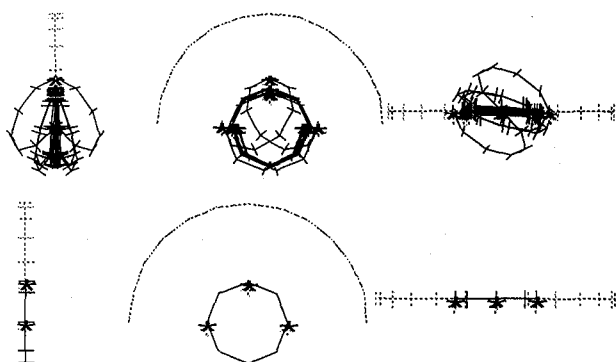


図-20 反復過程と収束後の変形図 (2.5~ π (rad))

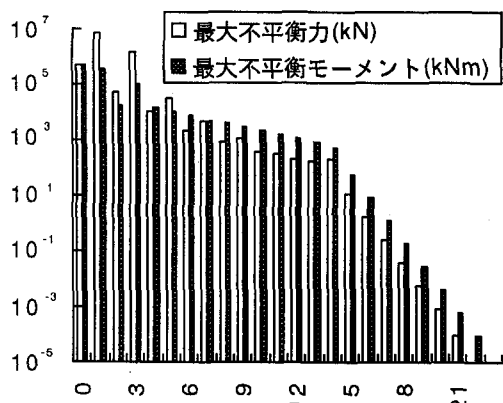


図-21 最大不平衡力の推移図 (2.5~ π (rad))

ここでは、 $b/h=0.88$ の部材を用いてたたみ込みを解析した。その結果を、回転過程と並進過程とに分けて図-14、図-15 に示し、それぞれの図中、ローマ数字と共にあるドットに対応する変形図を、図-16 に示す。また、並進変位は、初期状態の支点①、③の座標値からリング中心へ向う増分を、 Δ を用いて表記する。

本手法では、まず、支点②、④を π まで回転させ、その後、支点①、③の u 方向、 v 方向への変位制御を行うため、 R_x 、 R_u 、 R_v の3つの反力が発生するが、たたみ込んでゆくと、支点部に発生する反力全てが同時にゼロになるのがわかる。

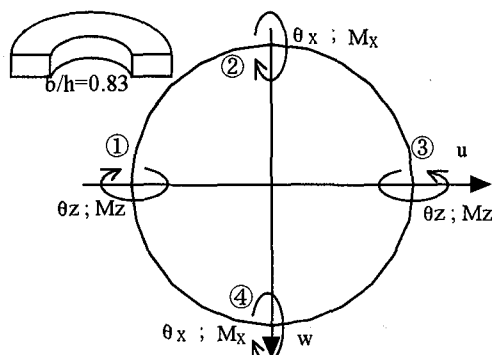


図-22 半リングモデル

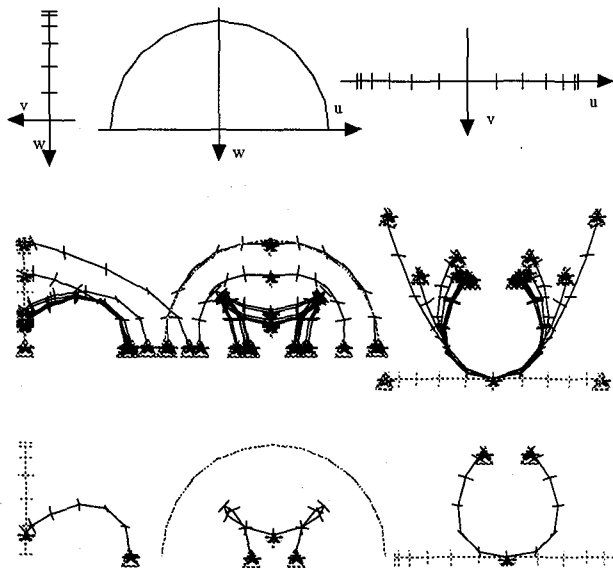


図-23 反復過程と収束後の変形図 (0~2.5(rad))

3.6 単純な支点増加によるたたみ込み

支点を基準として中心角 $\pi/2$ (rad)ごとのリング周上（例えば 3.2 節、①、③支点对する②、④点）の挙動をよく観察すれば、変位を与えている支点と同じような挙動をしていることが判る。そこで、収束性、たたみ込み安さが向上するように①、②、③、④全点に回転が与えられるような支点条件を施し、解析を行う。

(1) 法線軸まわり回転

図-17 のように $\theta_x=\theta_z$ となるように4支点すべてにトルクを与える。

ここでは、 $b/h=0.83$ とした。支点が増えたことによってたたみ込み性能が急激に良くなり、2支点による回転ではたたみ込み不能であった断面を、荷重漸増により得られるたたみ込み解と全く同じとなる釣合解を、僅か2回の変位制御で得ることが可能となった。図-18、図-19 に 0~2.5(rad)、図-20、図-21 に 2.5~ π (rad)までの、反復過程の変形図及び不平衡力の推移を示す。

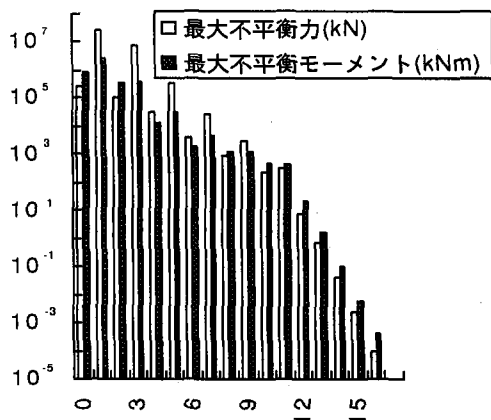


図-24 最大不平衡力の推移図 (0~2.5(rad))

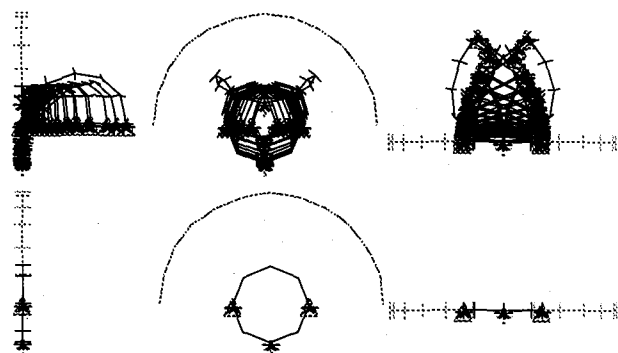


図-25 反復過程と収束後の変形図 (2.5~ π (rad))

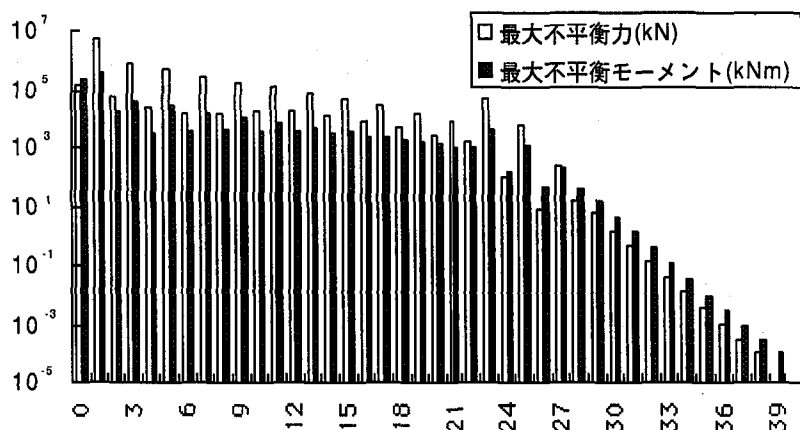


図-26 最大不平衡力の推移図 (2.5~ π (rad))

(2) 接線軸まわり回転

図-22 のように $\theta_x = \theta_z$ となるように 4 支点すべてにトルクを与える

ここでも、4.6 (1) 項と同様に $b/h=0.83$ の部材を用い、2 回の変位制御でたたみ込む。図-23、図-24 に 0~2.5(rad)、図-25、図-26 に 2.5~ π (rad)までの、反復過程の変形図及び不平衡力の推移の過程を示す。2.5~ π (rad)までの、反復過程は、収束が悪くなり 40 回の反復計算を必要とした。

4. まとめ

厳密な有限回転演算を導入した接線剛性法を用いて、6 通りの載荷手法により、多角形リングのたたみ込み解析を行った。

本手法によれば、一般には相当に粗い要素分割と考えられる 12 分割半リングをモデルとした場合でも、200 分割モデルと比べ最大値に関し 1.6 パーセント大きくなったが、リング挙動の力学的な特性を知るのに十分な解が得られ、最終解においては、完全な三重リングを形成する。これによって、要素分割に関する制約が大幅に緩和され、接線剛性法特有の高収束性により、短時間で精

度の高いたたみ込み解析が可能となった。

リングを手でたたみ込む場合の“押し込む”操作を、数値計算に取り込んだ手法、すなわち、複数の載荷条件を組合せるのみの手法によって、リング対蹠点の回転のみによるたたみ込みでは不可能な矩形断面の縦横比であってもたたみ込みが可能となり、断面の縦横比が 1 より小さな部材や、円形断面で構成されたリングであっても、安定してたたみ込むことが可能であった。さらに、中心角 $\pi/2$ (rad)ごとのリング周上に回転制御できる支点を設ければ、たたみ込み性能が格段に向上した。

また、リング構造が実際に機械によって折り畳まれる場合に、並進方向の拘束が働くと思われ、本手法で明らかにした折り畳み手法は工学的な見地からも有用であると考えられる。

参考文献

- 1) 名取通弘：宇宙構造物工学の概要，土木学会論文集，No.410, pp.1-16
- 2) 後藤芳顯，渡辺康人，春日井俊博，松浦聖：空間での有限回転を伴う弾性座屈現象を利用したリングのたたみ込み，土木学会論文集，No.428/I-15, pp.117-125, 1991

- 3) Goto, Y., Watanabe, Y., Kasugai, T. and Obata, M. : Letter to the Editor, *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.9, pp.1369-1370, 1996
- 4) 後藤芳顯, り暁松 : 不安定現象を利用したリングのたみ込みについて, 計算工学講演会論文集, Vol.3, pp.769-772, 1998
- 5) Pai, P.F. and Plazotto, A.N. : Authors' Closure, *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.9, pp.1371-1373, 1996
- 6) 西村督, 森迫清貴 : 増分摂動法を用いた立体骨組解析法によるリングのたみ込み過程の解析, 計算工学講演会論文集, Vol.3, pp.765-768, 1998
- 7) 後藤茂夫 : 立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化, 土木学会論文報告集, No.335, pp.1-11, 1983
- 8) 後藤茂夫, 荒牧軍治, 井嶋克志 : 要素剛性分離の手法による構造物の幾何学的非線形解析, 土木学会構造工学論文報告集, Vol.37A, pp.315-328, 1991
- 9) 後藤茂夫, 井嶋克志, 古賀勝喜, 帯屋洋之 : 接線剛性法による要素力式の設定と解の精度, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集 Vol.18, pp.121-126, 1994
- 10) 後藤茂夫, 井嶋克志, 帯屋洋之, 劉磊 : 接線剛性法による平面骨組の分岐釣合系の解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集 Vol.18, pp.127-132, 1994
- 11) 井口真一, 後藤茂夫, 井嶋克志, 帯屋洋之 : 空間有限回転を伴う立体骨組大変形解析, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.451-454, 1997
- 12) 井口真一, 後藤茂夫, 井嶋克志, 帯屋洋之 : リングの折り畳みに関する断面形状変化の影響について, 土木学会第 52 回年次学術講演会概要集, I-A, pp.38-39, 1997
- 13) 後藤茂夫, 井嶋克志, 帯屋洋之, 井口真一 : 立体大変位解析における有限回転の合成法と解の収束性, 計算工学講演会論文集, Vol.3, pp.757-760, 1998
- 14) 帯屋洋之, 後藤茂夫, 井嶋克志, 井口真一 : 接線剛性法による薄板構造の大変形挙動解析, 土木学会論文集, No.598, pp.347-358, 1998
- 15) 前田幸雄, 林正 : 立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集 No.253, pp.13-27, 1976
- 16) 後藤文彦, 小林裕, 岩熊哲夫 : オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析法, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.333-338, 1997
- 17) Yamaguchi, E., Hammadeh, M. and Kubo, Y. : A degenerate formulation for large displacement analysis of Three-dimensional solid beams, *Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE*, Vol.15, 165s-173s, 1998

(1998 年 9 月 18 日受付)