

Spline要素法を用いた変厚長方形Mindlin板のせん断座屈解析について

Shear buckling of Rectangular Mindlin Plates with varying Thickness by the Spline Element Method

水澤 富作*

Tomisaku Mizusawa

田中 宏明**

Hiroaki Tanaka

* 工博 大同工業大学教授、建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

** 大同工業大学大学院 建設工学専攻 (〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

This paper presents an application of the spline element method based on the Mindlin plate theory to analyze shear buckling of rectangular plates with varying thickness in the x -direction.

To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods. Good accuracy is obtained. Shear buckling load parameters of rectangular Mindlin plates with varying thickness are analyzed for the different thickness ratios, aspect ratios, the ratio of the width to thickness and boundary conditions.

Key Words: rectangular Mindlin plate, varying thickness, spline element method, shear buckling

1. まえがき

構造物の大型化と薄肉化に伴い、板要素の局部座屈照査が設計上重要な課題になっている。このような平板に関する弾性座屈解析については、古くから多数の研究報告がなされている¹⁻⁴⁾。その多くの研究は、面内圧縮荷重と任意の境界条件を持つ一定厚さの長方形板を対象にしている。面内せん断荷重を受ける板では、関数の直交性が得られなくなるので、Rayleigh-Ritz法、Galerkin法や有限要素法などの数値解析法が古くから適用されている。Wangら⁵⁾はRitz法を用いて、面内せん断荷重を受ける一様厚さの長方形Mindlin板のせん断座屈解析を行っている。

一方、構造物の軽量化や経済性の観点から、変断面性状を有する平板構造が多く用いられるようになってきている。実際に用いられる平板の板厚は、ステップ状またはテーパ状に変化する場合がある⁶⁻⁷⁾。このような変厚を持つ長方形板の座屈解析は、支持される境界条件に関係なく厳密な解を求めることが困難な問題の1つである。面内圧縮荷重を受ける変厚長方形板の座屈解析はこれまでに報告されているが⁸⁻⁹⁾、面内せん断荷重を受ける変厚板のせん断座屈解析に関する研究は、あまり多く報告されていないように思われる。

最近、小林ら¹⁰⁻¹¹⁾は、相対する2辺が単純支持され、他の2辺が任意の境界条件を有する変厚長方形薄板の座

屈特性に与える変厚比、辺長比や弾性回転拘束などの影響について検討を行っている。ここで、面内圧縮荷重は、それぞれ変厚方向に一樣に作用する場合と変厚断面に垂直に作用する場合を仮定している。大賀ら¹²⁾は、伝達マトリックス法を用いて、面内圧縮荷重を受ける相対する2辺が単純支持された変断面薄肉部材の弾性座屈解析を行っている。また水澤¹³⁾は、一様圧縮を受ける、相対する2辺が単純支持された変厚長方形Mindlin板の座屈解析へのSpline帯板法の適用性について検討を行っている。これより、板厚が増大すると、薄板理論により求めた解が、過大評価した結果を示すことを指摘している。

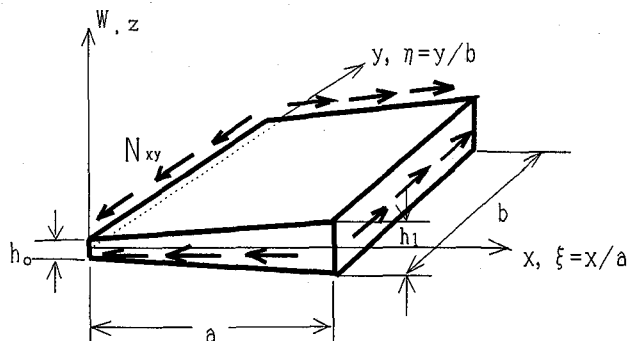


Fig. 1 Rectangular Mindlin plate with linearly varying thickness in the x -direction subjected to shearing load

しかしながら、面内せん断荷重を受ける変厚長方形板の座屈解析については、Klein^{14,15)}は、Ritz法を用いて、周辺単純支持された変厚長方形薄板のせん断座屈解析を行っているが、他に研究報告がされていないようである。

本文では、Mindlin 板理論に基づく Spline 要素法を用いて、一様面内せん断荷重を受ける変厚長方形 Mindlin 板の弾性座屈解析を行っている。本手法の解析精度や収束性に与える要素分割数の影響について検討した。また、任意の境界条件を持つ変厚長方形 Mindlin 板の座屈特性に与える変厚比、幅厚比や辺長比などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化

Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、Fig.1 に示すような一方向に変厚な Spline 要素モデルを導く。ここで、次のような解析仮定を用いる。

- (1) 変厚は、 x 方向に線形的に変化するものと仮定する。
- (2) 板周辺に作用する面内せん断荷重は、変厚断面においても一様なせん断応力流になると仮定する。
したがって、面内せん断荷重は、板周辺で一定である。
- (3) 長方形板は、面外せん断変形を考慮した Mindlin 板理論で理想化する。

式の定式化にあたり、次式で表される無次元直交座標系を用いる。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad W = W/b \quad (1)$$

ここで、 W はたわみであり、 a と b はそれぞれ長方形板の長さ、幅を示す。

横せん断変形の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W' &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、それぞれ正規化された B-spline 関数である^{16,17)}。 W' はたわみであり、 ϕ_x と ϕ_y は回転角である。また、 $i_x = k-1 + M_x$, $i_y = k-1 + M_y$, $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi) N_{1,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi) N_{i_y,k}(\eta)]$ である。未定係数ベクトルは、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \{A_{11} A_{12} \cdots A_{i_x i_y}\}^T \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \{B_{11} B_{12} \cdots B_{i_x i_y}\}^T \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \{C_{11} C_{12} \cdots C_{i_x i_y}\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。

したがって、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (4)$$

ここで、

$$[S]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、 $\{d\} = \{\phi_x, \phi_y, W'\}^T$, $\{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn}, \{\delta_B\}_{mn}, \{\delta_C\}_{mn}\}^T$ である。

次に、Mindlin 板理論で定義される曲げひずみ $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}_s$ を無次元座標系で表せば、それぞれ次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\}_b = z \begin{bmatrix} (1/a) \partial \phi_x / \partial \xi \\ (1/b) \partial \phi_y / \partial \eta \\ (1/b) \partial \phi_x / \partial \eta + (1/a) \partial \phi_y / \partial \xi \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon\}_s = \begin{bmatrix} \phi_x + (b/a) \partial W' / \partial \xi \\ \phi_y + \partial W' / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (7)$$

したがって、式(2)を式(6)と(7)に代入すれば、ひずみベクトル $\{x\}$ は、次式で与えられる。

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_b \\ \{\varepsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (8)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、またひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a)\partial/\partial\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1/b)\partial/\partial\eta & 0 \\ (1/b)\partial/\partial\eta & (1/a)\partial/\partial\xi & 0 \\ 1 & 0 & (b/a)\partial/\partial\xi \\ 0 & 1 & \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[B]_{mn} = [T][S]_{mn}$$

$$= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} (z/a)\dot{N}_m N_n & 0 & 0 \\ 0 & (z/b)\dot{N}_m N_n & 0 \\ (z/b)\dot{N}_m N_n & (z/a)\dot{N}_m N_n & 0 \\ N_m N_n & 0 & (b/a)\dot{N}_m N_n \\ 0 & N_m N_n & N_m N_n \end{bmatrix} \\ = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} [B_b]_{mn} \\ [B_s]_{mn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $\dot{N}_m = \partial N_{m,k}(\xi)/\partial \xi$, $\dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta)/\partial \eta$, $N_m = N_{m,k}(\xi)$, $N_n = N_{n,k}(\eta)$ である。また、 $[B_b]_{mn}$ と $[B_s]_{mn}$ はそれぞれ、曲げによるひずみマトリックスと横せん断ひずみマトリックスである。

長方形板の板厚は、 x -方向に線形的に変化させ、次式で仮定する。

$$h(\xi) = h_0 \{(\delta - 1)\xi + 1\} = h_0 H(\xi) \quad (11)$$

ここで、 δ は変厚比であり、 h_1/h_0 で表され、また $x=0$ と $x=a$ での板厚は h_0 と h_1 とする。

したがって、上式を用いれば、板厚が線形的に変化する場合の長方形板の曲げ剛性は、

$$D(\xi) = Eh(\xi)^3 / [12(1-\nu^2)] = D_0 \{(\delta - 1)\xi + 1\}^3 \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $D_0 = Eh_0^3 / [12(1-\nu^2)]$ 、 E はヤング係数、また ν はポアソン比である。

等方性変厚長方形板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは、それぞれ次式で与えられる。

$$[D]_b = Eh(\xi)^3 / 12(1-\nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[D]_s = Gh(\xi)\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 $G=E/2(1+\nu)$ はせん断弾性係数であり、また κ はせん断修正係数であり、 $5/6$ に仮定している。

変厚 Mindlin 長方形板のひずみエネルギー、 U は、

$$U = (ab/2) \int_0^1 \int_0^1 \{ \epsilon \}_b^T [D]_b \{ \epsilon \}_b \\ + \{ \epsilon \}_s^T [D]_s \{ \epsilon \}_s \} d\xi d\eta \\ = (D_0/2)(a/b) \int_0^1 \int_0^1 H(\xi)^3 \{ \partial\phi_x/\partial\xi \\ + (a/b)\partial\phi_y/\partial\eta \}^2 \\ - (1-\nu) \{ 2(a/b)(\partial\phi_x/\partial\xi)(\partial\phi_y/\partial\eta) \\ - (1/2) \{ (a/b)\partial\phi_x/\partial\eta + \partial\phi_y/\partial\xi \}^2 \} \\ + 6(1-\nu)\kappa(b/h_0)^2 (a/b)^2 H(\xi) \{ \phi_x \\ + (b/a)(\partial W'/\partial\xi) \}^2 \\ + \{ \partial W'/\partial\eta + \phi_y \}^2 \} d\xi d\eta \quad (15)$$

また、この板に作用する面内せん断荷重、 N_{xy} による外力ポテンシャル、 V は

$$V = (N_{xy}/2)b^2 \int_0^1 \int_0^1 \{ \partial W'/\partial\xi \partial W'/\partial\eta \\ + \partial W'/\partial\eta \partial W'/\partial\xi \} d\xi d\eta \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 $N_{xy}=h(\xi)\tau_{xy}$ 一定である。

変厚長方形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で示される。

$$\Pi = U - V \quad (17)$$

したがって、式(2)を式(17)に代入し、 Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。

$$\partial\Pi/\partial\{\Delta\}_{rs} = 0 \quad (18)$$

式(18)をマトリックス表示すれば、次式のようになる。

$$\sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{r=1}^{i_x} \sum_{s=1}^{i_y} \left([K]_{mnr s} \{\Delta\}_{mn} - k^* [G]_{mnr s} \{\Delta\}_{mn} \right) = 0 \quad (19)$$

ここで、 k^* はせん断座屈荷重 Λ^2 パラメータであり、 $N_{xy}b^2/(D_0\pi^2)$ で表している。

剛性マトリックス $[K]_{mn}$ と幾何剛性マトリックス

$[G]_{mn}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$[K]_{mnr s} = D_0(a/b) \begin{bmatrix} [K\phi_x\phi_x] & [K\phi_x\phi_y] & [K\phi_xW'] \\ [K\phi_y\phi_x] & [K\phi_y\phi_y] & [K\phi_yW'] \\ [KW'\phi_x] & [KW'\phi_y] & [KW'W'] \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[G]_{mnrs} = N_{xy} b^2 \begin{bmatrix} [G\phi_x\phi_x] & 0 & 0 \\ 0 & [G\phi_y\phi_y] & 0 \\ 0 & 0 & [GWW] \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[G]_{mnrs}$ マトリックスの大きさは、 $3 \times (k+M_x-1)(k+M_y-1)$ で与えられる。ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。Appendix には、これらのマトリックスの要素が示してある。

3. 数値計算例および考察

ここでは、Spline 要素法を用いて一方向に線形的な変断面性状を有する長方形 Mindlin 板のせん断座屈解析を行い、本手法の解の収束性及精度について示し、また周辺を固定または単純支持された変厚長方形板のせん断座屈特性に与える変厚比 h_1/h_0 、幅厚比 b/h_0 や辺長比 a/b などの影響について検討する。ただし、長方形板の境界条件は CF-SC のように表し、それぞれ y 軸方向に平行な 2 つの辺 ($\xi=0,1.0$) が、固定辺 (C) と自由辺 (F) であり、他の 2 つの辺 ($\eta=0,1.0$) が単純支持辺 (S) と固定辺 (C) に相当している。また数値計算例では、ポアソン比は 0.3 に仮定している。

Table 1 には、 x -方向に、直線的な変断面性状を有する正方形 Mindlin 板のせん断座屈荷重パラメータ $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ の収束性に与える要素分割数の影響が示されている。ここで、 $k-1=3$ 、幅厚比は $b/h_0=100$ と 10 にとり、変厚比は $h_1/h_0=1.0$ と 2.0 に仮定している。要素分割数 $M_x=M_y$ は 4 分割から 14 分割まで変化させている。また、比較のために、Wang ら⁹⁾により求められた等厚断面を持つ正方形薄板の解も示してある。

これより、幅厚比、変厚比や境界条件に関係なく、要素分割数の増大に従って、一定値への安定した収束状態が得られている。また、幅厚比を 100 程度にとれば、薄板理論による値と比較して、0.5% 以内の精度で一致した結果が得られている。

Table 2 には x -方向に、直線的な変断面性状を有する長方形薄板 ($b/h_0=1000$) のせん断座屈パラメータ $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ の精度比較が示してある。ここで、せん断修正係数は $\pi^2/12$ を使い、また剛性マトリックスの数値積分には低減積分を用いている。境界条件として、SS-SS、SS-CC と CC-CC を選び、また辺長比 a/b は 0.5、1.0 と 2.0 に仮定している。 h_1/h_0 は、1.0、1.5、2.0 に変化させている。等厚の場合 ($h_1/h_0=1.0$) には、Ritz 法を用いた Wang らの薄板理論による解⁹⁾も示してある。これより、本手法で幅厚比を 1000 にすると、境界条件や辺長比に関係なく、薄板理論による値と完全に一致した結果が得られている。

以下の数値計算例では、これまで示した解析結果を踏

Table 1. Convergence study of the shear buckling load parameters, $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness subjected to shearing load, N_{xy} ; $a/b=1.0$ and $k-1=3$

b/h ₀	h ₁ /h ₀	M _x =M _y	Boundary conditions		
			SS-SS	CS-CS	CC-CC
100	1.0	4	10.63	15.32	27.76
		8	9.367	11.83	14.93
		12	9.308	11.70	14.61
		14	9.304 (9.324)	11.69 (11.72)	14.59 (14.64)
	2.0	4	30.72	47.73	72.60
		8	27.15	36.02	43.24
		12	26.89	35.26	41.79
		14	26.87	35.21	41.68
	1.0	4	7.306	8.830	10.61
		8	7.718	9.140	10.68
		12	7.787	9.168	10.69
		14	7.801	9.172	10.69
10	2.0	4	17.22	20.27	22.43
		8	18.67	21.55	23.73
		12	18.99	21.78	23.83
		14	19.06	21.82	23.83

() is the results of square thin plates obtained by Wang et al.⁹⁾

Table 2. Comparison of accuracy of the present method : $k-1=3$, $M_x=M_y=14$ and $b/h_0=1000$

Boundary conditions	a/b	h ₁ /h ₀		
		1.0	1.5	2.0
SS - SS	0.5	26.18 (26.18)	48.57	77.45
	1.0	9.324 (9.324)	17.20	26.87
	2.0	6.546 (6.546)	11.06	15.67
SS - CC	0.5	26.84 (26.84)	49.96	79.86
	1.0	12.57 (12.57)	22.79	34.71
	2.0	10.01 (10.01)	16.52	22.55
CC - CC	0.5	40.99 (40.99)	76.57	121.7
	1.0	14.64 (14.64)	27.00	41.96
	2.0	10.25 (10.25)	17.54	24.65

() are the results obtained by Wang et al.⁹⁾ using Ritz method.

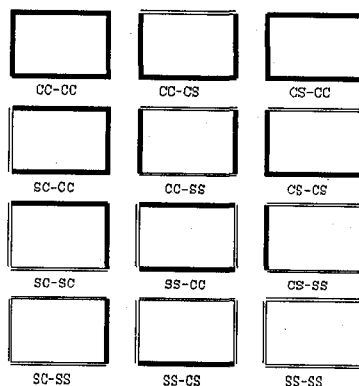
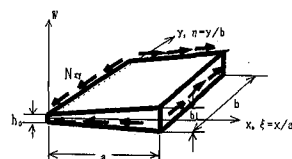


Fig. 2 Boundary conditions of rectangular plates with varying thickness in the x -direction

Table 3. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 and b/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: CC-CC

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	40.57	56.81	75.32	96.05	119.0	114.1	171.3
	0.75	21.16	29.64	39.25	49.96	61.75	79.66	88.52
	1.0	14.59	20.13	26.86	33.96	41.68	50.02	58.96
	1.25	12.32	17.13	22.33	27.90	33.84	40.16	46.86
	1.5	11.79	15.74	20.18	24.83	29.72	38.68	40.29
	1.75	10.77	14.73	18.69	22.75	26.96	31.36	35.96
	2.0	10.25	14.00	17.63	21.27	25.02	28.90	32.96
	2.5	9.898	13.26	16.38	19.48	24.44	25.89	29.28
	3.0	9.646	12.87	15.73	18.53	21.38	24.31	27.34
2 0	0.5	32.28	43.09	54.48	66.28	78.36	90.60	102.9
	0.75	18.69	25.45	32.75	40.48	48.58	56.97	65.58
	1.0	13.35	18.27	23.57	29.16	35.01	41.09	47.36
	1.25	11.42	15.60	19.96	24.48	29.14	33.92	38.83
	1.5	10.66	14.42	18.18	21.98	25.85	32.62	33.83
	1.75	10.04	13.52	16.88	20.20	23.54	26.92	30.35
	2.0	9.580	12.87	15.93	18.90	21.84	24.80	27.79
	2.5	9.237	12.15	14.71	17.14	19.53	21.92	24.33
	3.0	8.951	11.67	13.91	16.00	18.05	20.09	22.14
1 0	0.5	20.30	25.34	30.14	34.62	38.66	41.85	43.85
	0.75	13.92	17.99	22.02	25.93	29.69	33.26	36.59
	1.0	10.69	14.03	17.36	20.64	23.83	26.93	29.91
	1.25	9.405	12.37	15.25	18.05	20.76	23.38	25.92
	1.5	8.883	11.58	14.11	16.53	18.87	21.13	23.32
	1.75	8.398	10.94	13.25	15.42	17.48	19.48	21.42
	2.0	8.070	10.49	12.62	14.58	16.43	18.22	19.96
	2.5	7.804	9.974	11.77	13.41	14.95	16.44	17.88
	3.0	7.598	9.621	11.20	12.61	13.95	15.23	16.48

Table 4. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: CC-CS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	39.96	55.95	74.18	94.61	117.2	141.9	168.8
	0.75	20.58	28.81	38.12	48.51	59.95	72.42	85.90
	1.0	13.34	18.65	24.60	31.17	38.34	46.12	54.50
	1.25	10.57	14.73	19.30	24.27	29.62	35.35	41.47
	1.5	9.405	13.05	16.94	21.06	25.43	30.05	34.94
	1.75	9.257	12.24	15.65	19.20	22.92	30.18	30.93
	2.0	8.539	11.63	14.70	17.86	21.13	24.55	28.14
	2.5	7.908	10.75	13.43	16.09	18.82	21.64	27.50
	3.0	7.745	10.35	12.75	15.11	17.52	20.01	22.59
2 0	0.5	31.91	42.60	53.86	65.51	77.42	89.41	101.4
	0.75	18.26	24.86	31.97	39.51	47.38	55.52	63.85
	1.0	12.32	16.89	21.84	27.12	32.68	38.48	44.48
	1.25	9.926	13.62	17.57	21.72	26.05	30.54	35.18
	1.5	8.912	12.20	15.59	19.08	22.67	26.36	30.14
	1.75	8.459	11.48	14.47	17.48	20.55	23.67	26.86
	2.0	8.109	10.91	13.60	16.28	20.79	21.69	24.46
	2.5	7.536	10.09	12.40	14.61	16.79	18.97	21.18
	3.0	7.359	9.665	11.65	13.54	15.38	17.23	19.08
1 0	0.5	20.16	25.16	29.88	34.23	38.03	40.88	42.88
	0.75	13.70	17.69	21.62	25.42	29.05	32.48	35.65
	1.0	10.06	13.24	16.45	19.64	22.76	25.80	28.72
	1.25	8.429	11.17	13.91	16.62	19.27	21.86	24.37
	1.5	7.716	10.22	12.65	15.00	17.29	19.51	21.67
	1.75	7.394	9.719	11.88	13.95	15.95	17.89	19.78
	2.0	7.079	9.272	11.26	13.12	14.92	16.65	18.34
	2.5	6.660	8.676	10.39	11.96	13.45	14.88	16.27
	3.0	6.507	8.344	9.833	11.18	12.45	13.67	14.86

Table 5. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: CS-CC

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	33.87	48.12	64.49	82.99	103.6	126.4	151.4
	0.75	17.85	25.37	33.98	50.59	54.42	66.22	79.06
	1.0	13.34	19.01	25.37	32.36	39.97	48.19	57.00
	1.25	11.86	16.81	22.09	27.70	33.67	40.00	46.71
	1.5	11.21	15.56	20.06	24.75	29.66	34.83	40.26
	1.75	10.45	14.54	18.58	22.68	26.91	31.32	39.91
	2.0	10.09	13.94	17.60	21.25	27.19	28.89	32.95
	2.5	9.776	13.24	16.38	19.47	22.63	25.89	29.28
	3.0	9.589	12.87	15.73	18.53	21.38	24.31	27.34
2 0	0.5	28.32	38.58	49.61	61.22	73.25	85.56	98.04
	0.75	16.15	22.38	29.20	36.54	44.31	52.45	60.88
	1.0	12.32	17.19	22.44	28.01	33.84	39.89	46.14
	1.25	11.04	15.35	19.79	24.35	29.02	33.82	38.74
	1.5	10.44	14.27	18.07	21.91	25.81	29.77	33.81
	1.75	9.768	13.36	16.79	20.15	23.51	26.90	30.33
	2.0	9.448	12.82	15.91	18.88	21.83	24.79	27.79
	2.5	9.124	12.13	14.71	17.14	19.53	21.92	24.33
	3.0	8.977	11.67	13.91	16.00	18.05	21.58	22.14
1 0	0.5	19.02	24.18	29.14	33.83	38.15	41.67	43.77
	0.75	12.62	16.61	20.63	24.61	28.49	32.23	35.78
	1.0	10.06	13.42	16.79	20.11	23.34	26.47	29.48
	1.25	9.159	12.23	15.16	17.98	20.70	23.33	25.87
	1.5	8.700	11.48	14.05	16.50	18.85	21.12	23.32
	1.75	8.210	10.84	13.20	15.38	17.46	19.47	21.41
	2.0	7.979	10.47	12.61	14.57	16.43	18.22	19.96
	2.5	7.722	9.963	11.77	13.41	14.95	16.44	17.88
	3.0	7.575	9.620	11.20	13.20	13.95	15.23	16.48

Table 6. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy} b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: SC-CC

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	33.87	46.81	61.44	77.76	95.76	115.4	136.8
	0.75	17.85	24.67	32.33	46.04	50.12	60.23	71.15
	1.0	13.34	18.25	23.60	29.38	35.59	42.25	49.34
	1.25	11.86	16.05	20.42	24.99	29.80	34.87	40.20
	1.5	11.21	14.93	18.68	22.52	26.49	30.62	34.92
	1.75	10.45	14.01	17.40	20.77	24.20	27.71	31.34
	2.0	10.09	13.45	16.53	19.54	22.56	25.64	28.80
	2.5	9.776	12.81	15.43	17.93	20.42	22.92	25.47
	3.0	9.589	12.44	14.78	16.97	19.13	23.49	23.47
2 0	0.5	28.32	37.73	47.75	58.27	69.19	80.40	91.82
	0.75	16.15	21.86	28.05	34.66	41.64	48.94	56.52
	1.0	12.32	16.58	21.10	25.85	30.81	35.97	41.32
	1.25	11.04	14.72	18.45	22.27	26.19	33.83	34.36
	1.5	10.44	13.73	16.96	20.18	23.44	26.76	30.15
	1.75	9.768	12.92	15.84	18.67	21.49	24.32	27.20
	2.0	9.448	12.41	15.06	17.57	20.05	22.53	25.03
	2.5	9.124	11.79	14.00	16.06	18.07	20.06	22.05
	3.0	8.977	11.36	13.28	15.05	16.75	18.43	20.11
1 0	0.5	19.02	23.89	28.59	33.08	37.27	40.78	43.06
	0.75	12.62	16.36	20.13	23.88	27.55	31.12	34.53
	1.0	10.06	13.07	16.09	19.08	22.03	24.94	27.78
	1.25	9.159	11.83	14.39	16.88	19.32	21.71	24.06
	1.5	8.700	11.12	13.37	15.52	17.61	19.65	21.65
	1.75	8.210	10.54	12.60	14.52	16.35	18.14	19.89
	2.0	7.979	10.18	12.05	13.77	15.41	16.99	18.55
	2.5	7.722	9.715	11.30	12.72	14.07	15.37	16.64
	3.0	7.575	9.394	10.77	11.98	13.14	14.25	15.34

Table 7. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy}/(D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: CC-SS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	39.60	55.48	73.61	93.95	118.4	141.1	167.9
	0.75	20.24	28.28	37.39	47.54	58.72	70.92	84.12
	1.0	12.53	17.55	23.22	29.51	36.42	43.94	52.06
	1.25	9.302	13.01	17.14	21.67	26.61	31.94	37.66
	1.5	7.808	10.89	14.26	17.90	21.81	26.00	30.46
	1.75	7.077	9.826	12.76	15.86	19.16	22.65	26.34
	2.0	6.710	9.256	11.88	14.61	17.48	20.49	23.67
	2.5	6.319	8.561	10.77	13.02	15.35	17.78	20.32
	3.0	5.950	8.070	10.06	12.04	14.06	16.16	18.34
2 0	0.5	31.71	42.37	53.63	65.30	77.22	89.23	101.2
	0.75	17.99	24.47	31.46	38.87	46.64	54.68	62.94
	1.0	11.63	16.01	20.79	25.93	31.38	37.10	43.06
	1.25	8.813	12.16	15.80	19.70	23.82	28.14	32.64
	1.5	7.479	10.32	13.35	16.60	19.91	23.41	27.03
	1.75	6.821	9.382	12.05	14.80	17.65	20.59	23.63
	2.0	6.492	8.871	11.26	13.68	16.16	18.70	21.30
	2.5	6.102	8.202	10.20	12.17	14.15	16.16	18.20
	3.0	5.760	7.724	9.480	11.16	12.83	14.51	16.21
1 0	0.5	20.09	25.11	29.85	34.21	38.01	40.88	42.88
	0.75	13.54	17.50	21.40	25.20	28.84	32.30	35.52
	1.0	9.604	12.72	15.90	19.09	22.24	25.33	28.31
	1.25	7.632	10.21	12.86	15.54	18.20	20.83	23.42
	1.5	6.655	8.943	11.26	13.58	15.88	18.14	20.37
	1.75	6.167	8.281	10.36	12.41	14.42	16.40	18.35
	2.0	5.924	7.906	9.786	11.61	14.94	15.14	16.86
	2.5	5.572	7.354	8.958	10.47	11.93	13.36	14.76
	3.0	5.310	6.978	8.394	9.697	10.94	12.15	13.34

Table 9. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy}/(D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: SC-SC

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	32.76	45.38	59.72	75.77	93.52	113.0	134.1
	0.75	16.86	23.43	34.12	39.14	48.25	58.19	68.96
	1.0	11.69	16.10	20.98	26.33	32.14	38.41	45.14
	1.25	9.830	13.40	17.24	21.35	25.72	30.37	35.30
	1.5	9.086	12.26	15.52	18.92	22.48	26.22	30.15
	1.75	8.726	11.58	14.45	17.39	20.42	23.57	26.84
	2.0	8.252	11.01	13.64	18.01	18.91	21.65	24.48
	2.5	7.816	10.33	12.57	14.74	16.91	19.11	21.36
	3.0	7.655	9.965	11.94	13.81	15.67	17.54	19.44
2 0	0.5	27.58	36.88	46.83	57.33	68.25	79.51	91.01
	0.75	15.38	20.95	27.04	33.59	40.54	47.84	55.44
	1.0	10.93	14.85	19.09	23.61	28.40	33.44	38.70
	1.25	9.290	12.53	15.94	19.50	23.21	27.08	31.09
	1.5	8.637	11.53	14.44	17.42	20.48	23.63	26.87
	1.75	8.303	10.91	13.48	16.05	18.66	21.33	24.05
	2.0	7.856	10.39	12.73	15.02	17.31	19.63	21.99
	2.5	7.460	9.745	11.73	13.60	15.45	17.30	19.16
	3.0	7.274	9.365	11.08	12.67	14.22	15.77	17.32
1 0	0.5	18.74	23.63	28.39	32.95	37.22	40.78	43.06
	0.75	12.19	15.93	19.73	23.52	27.27	30.90	34.38
	1.0	9.172	12.08	15.05	18.05	21.05	24.03	26.97
	1.25	7.996	10.50	13.00	15.49	17.97	20.43	22.86
	1.5	7.527	9.790	11.97	14.10	16.19	18.27	20.32
	1.75	7.247	9.314	11.26	13.12	14.95	16.75	18.53
	2.0	6.894	8.908	10.70	12.38	14.00	15.59	17.16
	2.5	6.605	8.424	9.940	11.33	12.66	13.95	15.22
	3.0	6.441	8.119	9.430	10.62	11.75	12.84	13.92

Table 8. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy}/(D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: CS-CS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	32.76	46.50	62.39	80.38	100.5	122.6	146.9
	0.75	16.86	23.86	31.89	47.08	59.97	72.01	84.04
	1.0	11.69	16.61	22.19	28.40	35.21	42.61	50.60
	1.25	9.830	13.98	18.55	23.51	28.84	34.54	40.61
	1.5	9.086	12.86	16.81	20.96	25.34	29.97	34.86
	1.75	8.726	12.15	15.59	19.16	22.89	26.80	30.92
	2.0	8.252	11.47	14.61	17.80	23.27	24.53	28.12
	2.5	7.816	10.72	12.39	16.09	18.82	21.64	24.58
	3.0	7.655	10.34	12.74	15.11	17.52	20.00	22.59
2 0	0.5	27.58	37.56	48.32	59.66	71.42	83.45	99.32
	0.75	15.38	21.26	27.72	34.70	42.11	49.90	58.00
	1.0	10.93	15.25	19.99	25.08	30.47	36.12	41.99
	1.25	9.290	13.01	16.98	21.14	25.48	29.97	34.60
	1.5	8.637	12.05	15.50	19.02	22.62	26.31	30.09
	1.75	8.303	11.40	14.42	17.45	20.53	23.66	26.86
	2.0	7.856	10.77	13.53	16.24	18.94	21.68	24.45
	2.5	7.460	10.08	12.39	14.60	16.78	18.97	21.18
	3.0	7.274	9.657	11.65	13.54	15.38	17.23	19.08
1 0	0.5	18.74	23.84	28.74	33.34	37.43	40.56	42.69
	0.75	12.19	16.05	19.95	23.83	27.62	31.25	34.67
	1.0	9.172	12.29	15.48	18.67	21.82	24.89	27.87
	1.25	7.996	10.79	13.58	16.32	19.00	21.60	24.12
	1.5	7.527	10.14	12.61	14.98	17.26	19.49	21.65
	1.75	7.247	9.649	11.84	13.93	15.94	17.88	19.78
	2.0	6.894	9.177	11.21	13.10	16.14	16.64	18.33
	2.5	6.605	8.670	10.39	11.96	13.44	14.88	16.27
	3.0	6.441	8.337	9.832	11.18	12.45	13.67	14.86

Table 10. The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_{xy}/(D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: SS-CC

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	26.70	37.51	49.96	64.08	79.86	97.33	116.5
	0.75	15.40	21.57	28.55	36.33	44.90	54.25	64.39
	1.0	12.53	17.45	22.79	28.54	34.71	41.31	48.33
	1.25	11.59	15.90	20.31	24.91	29.74	34.82	40.15
	1.5	10.76	14.69	18.54	22.42	26.43	30.58	34.89
	1.75	10.23	13.89	17.34	20.73	24.17	27.69	31.33
	2.0	9.998	13.43	16.52	19.53	22.55	25.63	28.79
	2.5	9.665	12.79	15.43	17.93	20.42	22.92	25.47
	3.0	9.558	12.44	14.78	16.97	19.13	21.29	23.47
2 0	0.5	23.70	32.36	41.87	52.11	62.95	74.29	86.00
	0.75	14.15	19.43	25.22	31.45	38.08	45.06	52.36
	1.0	11.63	15.92	20.45	25.19	30.14	35.27	40.58
	1.25	10.81	14.60	18.37	22.21	26.15	30.18	34.32
	1.5	10.05	13.53	16.84	20.11	23.40	26.73	30.12
	1.75	9.575	12.82	15.79	18.64	21.47	24.31	27.18
	2.0	9.371	12.40	15.05	17.57	20.05	22.53	25.02
	2.5	9.036	11.78	14.00	16.06	18.07	20.06	22.05
	3.0	8.904	11.36	13.28	15.05	16.75	18.43	20.11
1 0	0.5	17.57	22.61	27.46	32.09	36.46	40.33	42.89
	0.75	11.42	15.05	18.75	22.47	26.17	29.80	33.33
	1.0	9.604	12.66	15.71	18.71	21.67	24.57	27.41
	1.25	9.019	11.76	14.34	16.85	19.29	21.69	24.04
	1.5	8.432	10.98	13.30	15.48	17.58	19.63	21.64
	1.75	8.073	10.48	12.57	14.50	16.34	18.13	19.88
	2.0	7.927	10.17	12.05	13.77	15.41	16.99	18.54
	2.5	7.659	9.707	11.29	12.72	14.07	15.37	16.64
	3.0	7.560	9.394	10.77	11.99	13.14	14.25	15.34

Table 11 The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_x b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: CS-SS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	32.09	45.53	61.08	78.75	98.50	120.4	144.3
	0.75	16.39	23.17	30.96	39.75	49.53	60.03	72.06
	1.0	10.68	15.16	20.26	23.35	28.51	33.98	39.72
	1.25	8.391	11.93	15.90	20.28	25.05	30.20	35.74
	1.5	7.357	10.44	13.81	17.44	21.34	25.49	29.91
	1.75	6.861	9.678	12.64	15.77	19.06	22.55	26.24
	2.0	6.611	9.212	11.85	14.59	17.47	20.48	23.66
	2.5	6.156	8.482	11.60	13.00	15.34	17.77	20.32
	3.0	5.890	8.052	10.05	12.03	14.06	18.32	18.34
2 0	0.5	27.15	37.04	47.72	59.04	70.81	82.88	95.10
	0.75	15.03	20.79	27.16	34.05	41.40	49.15	57.23
	1.0	10.07	14.08	18.52	23.35	28.51	33.98	39.72
	1.25	8.017	11.26	14.82	18.63	22.68	26.94	31.39
	1.5	7.081	9.944	13.00	16.22	19.57	23.06	26.68
	1.75	6.632	9.264	11.96	14.74	17.59	20.54	23.57
	2.0	6.407	8.836	11.24	13.67	16.15	18.69	21.30
	2.5	5.957	8.134	10.17	12.15	15.82	16.15	18.20
	3.0	5.710	7.712	9.475	11.16	12.83	14.51	16.21
1 0	0.5	18.60	23.71	28.65	33.29	37.42	40.56	42.69
	0.75	12.02	15.87	19.78	23.67	27.48	31.14	34.59
	1.0	8.615	11.62	14.74	17.90	21.07	24.20	27.25
	1.25	7.091	9.664	12.32	15.01	17.70	20.35	22.96
	1.5	6.379	8.719	11.08	13.42	15.74	18.01	20.25
	1.75	6.038	8.221	10.33	12.39	14.40	16.38	20.66
	2.0	5.809	7.882	9.773	11.60	13.39	15.14	16.86
	2.5	5.462	7.306	9.592	10.46	11.93	13.36	14.76
	3.0	5.274	6.973	8.392	9.696	10.94	12.15	13.34

Table 13 The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_x b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: SS-CS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	26.32	36.93	49.16	63.00	78.46	95.55	114.3
	0.75	14.12	19.76	26.17	33.33	41.27	49.95	59.39
	1.0	10.68	14.91	19.59	24.71	30.25	36.22	42.62
	1.25	9.415	13.15	17.06	21.19	25.55	30.16	35.02
	1.5	8.938	12.32	15.67	19.11	22.70	26.43	30.34
	1.75	8.466	11.58	14.57	17.56	20.63	23.80	27.08
	2.0	8.079	11.01	13.75	16.42	19.12	21.88	24.73
	2.5	7.779	10.42	12.72	14.94	17.14	19.36	21.64
	3.0	7.586	10.05	12.09	14.02	15.91	17.82	19.74
2 0	0.5	23.47	32.03	41.37	51.33	61.78	72.61	83.67
	0.75	13.13	18.06	23.48	29.35	35.32	42.26	49.21
	1.0	10.07	13.85	17.93	22.27	26.85	31.64	36.62
	1.25	8.973	12.31	15.76	19.32	22.98	26.75	30.64
	1.5	8.514	11.59	14.54	17.52	20.55	23.64	26.80
	1.75	8.060	10.90	13.54	16.14	18.74	21.37	24.04
	2.0	7.705	10.38	12.79	15.11	17.39	19.68	21.99
	2.5	7.432	9.807	11.82	13.70	15.53	17.35	19.18
	3.0	7.220	9.415	11.15	12.75	14.29	15.82	17.33
1 0	0.5	17.36	22.21	26.96	31.51	35.70	39.17	41.62
	0.75	10.87	14.36	17.95	21.57	25.18	28.72	32.13
	1.0	8.615	11.46	14.34	17.24	20.12	22.96	25.75
	1.25	7.793	10.37	12.87	15.32	17.70	20.05	22.35
	1.5	7.449	9.839	12.01	14.09	16.12	18.10	20.05
	1.75	7.061	9.290	11.27	13.12	14.89	16.62	18.31
	2.0	6.788	8.897	10.71	12.37	13.95	15.47	16.97
	2.5	6.588	8.458	9.964	11.32	12.60	13.94	15.05
	3.0	6.401	8.137	9.436	10.59	11.67	12.71	13.72

Table 12 The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_x b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: SC-SS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	32.09	44.51	58.64	74.48	92.02	111.2	132.2
	0.75	16.39	22.81	30.09	38.21	47.14	56.88	67.41
	1.0	10.68	14.76	19.32	24.34	29.82	35.76	42.15
	1.25	8.391	11.52	14.93	18.62	22.60	26.85	31.39
	1.5	7.357	10.03	12.87	15.88	19.06	22.42	25.97
	1.75	6.861	9.292	11.78	14.35	17.04	19.84	22.77
	2.0	6.611	8.867	11.09	13.35	15.68	18.10	20.61
	2.5	6.156	8.216	10.12	11.99	13.87	15.80	17.78
	3.0	5.890	7.809	9.501	11.12	12.73	14.35	16.01
2 0	0.5	27.15	36.35	46.20	56.58	67.37	78.44	89.65
	0.75	15.03	20.51	26.52	32.97	39.80	46.94	54.32
	1.0	10.07	13.74	17.74	22.04	26.62	31.45	36.50
	1.25	8.017	10.89	13.98	17.25	20.70	24.31	28.08
	1.5	7.081	9.573	12.17	14.87	17.68	20.58	23.59
	1.75	6.632	8.909	11.19	13.51	15.89	18.33	20.83
	2.0	6.407	8.516	10.55	12.59	14.65	16.75	18.90
	2.5	5.957	7.886	9.623	11.29	12.94	14.61	16.29
	3.0	5.710	7.491	9.008	10.43	11.81	13.19	14.58
1 0	0.5	18.60	23.46	28.17	32.63	36.61	39.75	41.96
	0.75	12.02	15.73	19.50	23.24	26.85	30.29	33.52
	1.0	8.615	11.40	14.28	17.19	20.12	23.03	25.89
	1.25	7.091	9.403	11.77	14.16	16.55	18.94	21.31
	1.5	6.379	8.440	10.49	12.53	14.56	16.58	18.57
	1.75	6.038	7.945	9.770	11.55	13.30	15.03	16.75
	2.0	5.809	7.631	9.265	10.84	12.38	13.90	15.40
	2.5	5.462	7.100	8.510	9.812	11.06	12.28	13.49
	3.0	5.274	6.779	8.001	9.108	10.16	11.18	12.18

Table 14 The effect of thickness ratio, h_1/h_0 on the shear buckling load parameter, $k^* = N_x b^2 / (D_0 \pi^2)$ of rectangular Mindlin plates of tapered thickness: SS-SS

b/h ₀	a/b	h ₁ /h ₀						
		1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
1 0 0	0.5	26.06	36.53	48.57	62.20	77.45	94.33	112.8
	0.75	13.25	18.58	24.68	31.53	39.14	47.50	56.63
	1.0	9.304	13.02	17.20	21.81	26.87	32.36	38.28
	1.25	7.754	10.81	14.15	17.76	21.63	25.78	30.20
	1.5	7.062	9.783	12.64	15.65	18.82	22.17	25.69
	1.75	6.728	9.227	11.74	14.32	17.00	19.80	22.73
	2.0	6.544	8.814	11.06	13.34	15.67	18.09	20.61
	2.5	6.037	8.157	10.09	11.97	13.86	15.79	17.77
	3.0	5.852	7.803	9.498	11.12	12.72	14.35	16.01
2 0	0.5	23.13	31.54	40.71	50.55	60.94	71.75	85.96
	0.75	12.42	17.17	22.43	28.18	34.36	40.94	47.87
	1.0	8.870	12.28	16.02	20.07	24.40	29.00	33.83
	1.25	7.452	10.29	13.34	16.56	19.96	23.52	27.23
	1.5	6.819	9.366	11.99	14.70	17.50	20.40	23.40
	1.75	6.517	8.858	11.16	13.49	15.87	18.30	20.81
	2.0	6.349	8.464	10.53	12.58	14.62	16.75	18.90
	2.5	5.851	7.838	9.601	11.28	12.94	14.60	16.28
	3.0	5.680	7.487	9.006	10.43	11.81	13.19	14.58
1 0	0.5	17.04	21.92	26.73	31.36	35.62	39.15	41.61
	0.75	10.46	13.93	17.53	23.25	28.45	33.94	39.94
	1.0	7.801	10.49	13.29	16.16	19.06	21.96	24.83
	1.25	7.834	9.016	11.39	13.78	16.18	18.57	20.95
	1.5	6.195	8.317	10.40	12.45	14.48	16.50	18.49
	1.75	5.962	7.920	9.757	11.54	13.29	15.02	16.74
	2.0	5.784	7.584	9.244	10.83	12.38	13.90	15.40
	2.5	5.382	7.069	8.496	9.806	11.06	12.28	13.48
	3.0	5.254	6.778	8.000	9.108	10.16	11.18	12.18

また、要素分割数は $M_x=M_y=14$ に仮定して、ある程度高い精度の解析結果を示す。周辺が固定または単純支持された変厚長方形板の境界条件は、等厚断面の場合と異なり、Fig.2 に示すような 12 ケースが考えられる。

Table 3 から Table 14 には、それぞれ境界条件の異なる x -方向に、直線的な変断面性状を有する長方形 Mindlin 板のせん断座屈荷重パラメータ $k^* = N_{xy}b^2/(D_0\pi^2)$ に与える、変厚比, h_1/h_0 、幅厚比, b/h_0 と辺長比, a/b の影響が示されている。ここで、 b/h_0 は 100、20、10 にとり、 h_1/h_0 は 1.0 から 2.5 まで変化させている。 a/b は 0.5 から 3.0 まで変化させている。また、これらの表から、Fig.3 に示すような座屈荷重曲線 (k^*-a/b 曲線) が容易に求めることができる。さらに、Fig.4 には、周辺固定された変厚正方形板のせん断座屈荷重パラメータ, k^* に与える幅厚比の影響が示されている。ここで、変厚比, h_1/h_0 は 1.0 から 2.5 まで変化させ、また幅厚比, b/h_0 は 100、20、10 に仮定している。

これらの図と表から得られる結果をまとめると、以下のようなになる。

- (1) 変厚比の増大に伴い、せん断座屈荷重パラメータも増大するが、その影響は、幅厚比が 2.0 を超えると顕著に見られる。
- (2) 変厚比の大きさに係わらず、辺長比が 1.5 を超えると、指数関数的にせん断座屈荷重パラメータは減少し、一定値に漸近してくる。
- (3) せん断座屈荷重パラメータは、幅厚比と変厚比に大きく依存し、幅厚比が大きくなるとかなり大きな値を示し、また変厚比にほぼ比例した値を示す。
- (4) 幅厚比が小さくなると、横せん断変形の影響が大きくなるので、幅厚比で、20 を下回りかつ変厚比で 1.5 を超える場合には、この影響を解析上考慮する必要がある。
- (5) 長方形板のせん断座屈荷重は、変厚断面を用いれば、かなり大きな値になるので、溶接を伴う補剛材による補強効果より、設計上有用であると考えられる。
- (6) 面内せん断荷重を受ける変厚長方形板の座屈荷重は、境界条件によっても大きな影響を受ける。

4. あとがき

本研究では、Mindlin 板理論に基づく Spline 要素法を用いて、一様な面内せん断荷重を受ける変厚長方形板の弾性座屈解析について検討を行った。一様圧縮荷重を受ける変厚板の座屈解析に関する研究と比較して、変厚長方形板のせん断座屈解析に関する研究はあまり研究されておらず、本文で示した解析結果が、他の数値解析法の解析精度を確認するための基礎データとして有効であると考えている。本文で得られた主な結果は、以下のよう

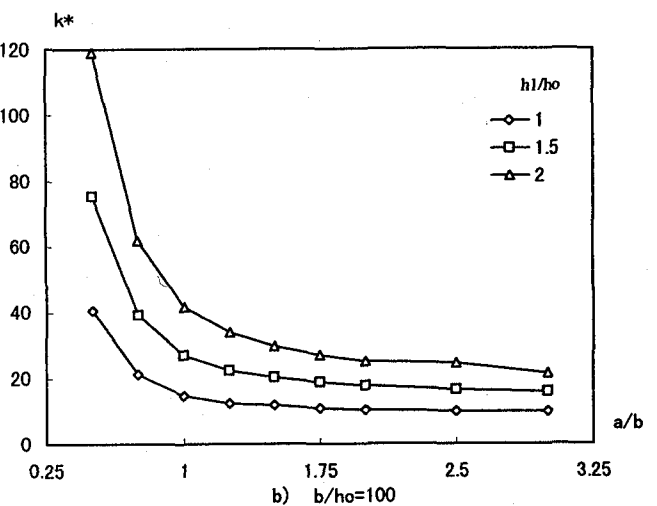
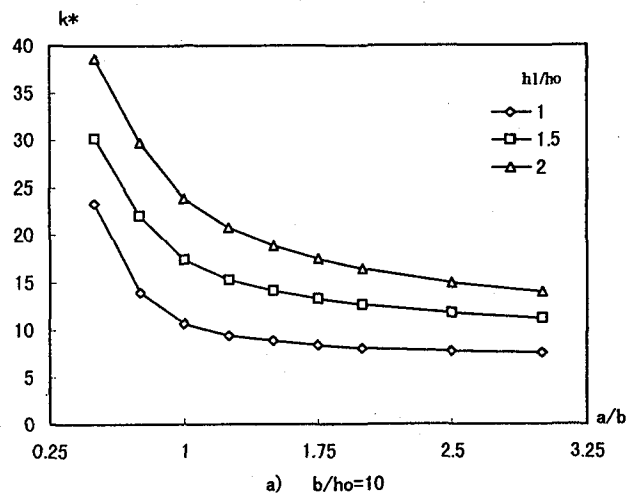


Fig. 3 Design chart for critical shear load parameter, k^* of clamped rectangular Mindlin plate with linearly varying thickness.

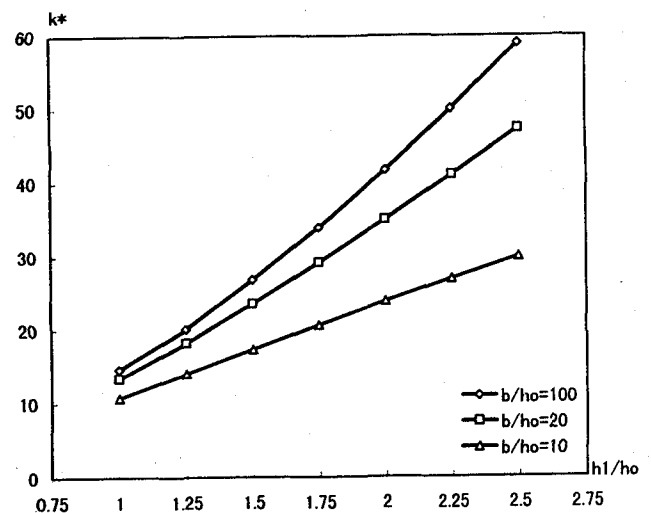


Fig. 4 The effect of b/h_0 and h_1/h_0 of shear buckling load parameter, k^* of tapered square plate: $a/b=1.0$ and CC-CC

- 1) 本手法を用いれば、任意の境界条件や変厚断面性状を有する長方形 Mindlin 板のせん断座屈解析が可能である。
- 2) 本手法で幅厚比を 100 程度にとれば、薄板理論により求められた値と比較して、0.5%以内の精度で一致した結果が得られる。
- 3) 一方向に線形的な変断面を有する長方形 Mindlin 板のせん断座屈荷重パラメータは、幅厚比、変厚比や境界条件に依存する。
- 4) 幅厚比で 20 を超えると、横せん断変形の影響が大きく現れるので、比較的薄い板の場合と比較して、せん断座屈荷重パラメータが小さ目の値を示す。
- 5) 長方形板のせん断座屈荷重は、変厚比を変化させることにより、増大させられる。

最後に、数値計算には、大同工業大学情報処理センターを利用して頂きました。また、貴重なご意見を頂いた査読者に謝意を表します。

Appendix

式(20)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 K\phi_x\phi_x &= (b/a)^2 I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} + 0.5(1-\nu) I_{mr}^{003} J_{ns}^{11} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(b/h_0) \kappa I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\
 K\phi_x\phi_y &= (b/a) \{ I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} + 0.5(1-\nu) I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \} \\
 K\phi_x W' &= 6(1-\nu)(b/a)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{011} J_{ns}^{00} \\
 K\phi_y\phi_x &= (b/a) \{ I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} + 0.5(1-\nu) I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} \} \\
 K\phi_y\phi_y &= I_{mr}^{003} J_{ns}^{11} + 0.5(b/a)^2 (1-\nu) I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(b/h_0) \kappa I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\
 K\phi_y W' &= 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{011} J_{ns}^{01} \\
 KW'\phi_x &= 6(1-\nu)(b/a)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{101} J_{ns}^{00} \\
 KW'\phi_y &= 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{001} J_{ns}^{10} \\
 KW'W' &= 6(b/a)^2 (1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{111} J_{ns}^{00} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(b/h_0)^2 \kappa I_{mr}^{001} J_{ns}^{11}
 \end{aligned}$$

また、式(21)で示されるサブ幾何剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$G\phi_x\phi_x = 0.0$$

$$G\phi_y\phi_y = 0.0$$

$$GW'W' = (b/a) \left\{ I_{mr}^{100} J_{ns}^{01} + I_{mr}^{010} J_{ns}^{10} \right\}$$

ここで、 I_{mr}^{ijL} と J_{ns}^{ij} はそれぞれ次式で表され、また数値積分は、6 点の Gauss の数値積分公式を用いている。

$$\begin{aligned}
 I_{mr}^{ijL} &= \int_0^1 \left[d^i N_{m,k}(\xi) / d\xi^i \times d^j N_{r,k}(\xi) / d\xi^j \right. \\
 &\quad \left. \times H(\xi)^L \right] d\xi
 \end{aligned}$$

$$J_{ns}^{ij} = \int_0^1 \left[d^i N_{n,k}(\eta) / d\eta^i \times d^j N_{s,k}(\eta) / d\eta^j \right] d\eta$$

参考文献

1. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of elastic stability(2nd Edn). McGraw-Hill, New York, 1961
2. Bulson, P.S.: The stability of flat plates. Chatto and Windus, London, 1970.
3. Column Research Committee of Japan: Handbook of structural stability, Tokyo, Japan, 1971.
4. Leissa, A.: Advances and trends in plate buckling research. In Research in Structural and Solid Mechanics(Edited by J.M. Housner and A.K. Noor), NASA CP-2245, 1982.
5. Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Buckling solutions of rectangular Mindlin plates under uniform shear. J. Eng. Mech., Vol. 120, pp. 2462-2470, 1994.
6. Chehil, D.S. and Dua, S.S.: Buckling of rectangular plates with general variation in thickness. J. Appl. Mech., Vol. 40, pp. 745-751, 1973.
7. Klein, B.: Buckling of simply supported plates tapered in planform. J. Appl. Mec., Vol. 23, pp. 207-213, 1956.
8. Whittrick, W.H. and Ellen, C.H.: Buckling of tapered rectangular plates in compression, The Aeronautical Quarterly, Vol. 13, pp. 308-326, 1962.
9. Ng, S.F. and Araar, Y.: Free vibration and buckling analysis of clamped rectangular plates of variable thickness by the Galerkin method. J. Sound and Vibr., Vol. 135, pp. 263-274, 1989.
10. Kobayashi, H. and Sonoda, K.: Buckling of rectangular plates with tapered thickness. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 116, pp. 1278-1289, 1991.
11. Kobayashi, H. and Sonoda, K.: Vibration and buckling of tapered rectangular plates with two

- buckling of tapered rectangular plates with two opposite edges simply supported and the other two edges elastically restrained against rotation. J. Sound and Vibr., Vol. 146, pp. 323-337, 1991.
12. Ohga, M., Shigematsu, T. and Kawaguchi, K.: Buckling analysis of thin-walled members with variable thickness. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 121, pp. 919-924, 1995.
 13. Mizusawa, T.: Buckling of rectangular Mindlin plates with tapered thickness by the spline strip method. Int. J. Solids and Struct., Vol. 30, pp. 1663-1677, 1993.
 14. Klein, B.: Shear buckling of simply supported plates tapered in planform. J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 43-47, 1957.
 15. Boor, C.D.: On calculating with B-splines J. Approx. Theory, Vol. 6, pp. 50-62 1972.
 - 17 水澤富作、梶田健夫、成岡昌夫: B-spline 関数を用いた斜板の自由振動解析について、土木学会論文報告集、第 272 号、pp.131-134, 1978
(1998 年 9 月 18 日受付)