

## 車輪・軌道・地盤系の連成振動解析手法

A Time Domain Numerical Method for Wheel/Track Interaction Analysis

阿部和久\*, 須田雅樹\*\*, 古田 勝\*\*\*

Kazuhisa ABE, Masaki SUDA and Masaru FURUTA

\*工博 新潟大学助教授 工学部建設学科(〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*新潟県

\*\*\*東京都交通局

A time domain numerical method, which can take into account the dynamic behavior of sleeper support, is developed for wheel/track interaction problems. In order to consider the effect of waves propagating in the sleeper support the ballast and substrate are discretized by finite elements and boundary elements. The finite element and boundary element coupling method is used to obtain a numerical Green's function for vertical displacement on the ballast surface. The numerical Green's function is then coupled with the wheel/rail/sleeper interaction model. Through the comparison of numerical results with the measurements, validity of the proposed method is investigated. It is found that the proposed method enables us to simulate the dynamic behavior of the ballast and substrate as well as the rail and sleeper.

Key Words : *wheel/track interaction, modeling of sleeper support, coupling of finite element and boundary element*

## 1. はじめに

近年, 様々な制約により住宅など建築物の直下や近傍に地下鉄のトンネルが建設される事例が多くなってきており, 列車走行に伴い発生する地盤振動が周辺環境に及ぼす影響が重要な問題となっている。振動の低減に対しては, 防振まくらぎや軌道パッドの採用を初め, これらパッド類の低バネ定数化などの対策が講じられている。しかし, それらの対策の効果を事前に予測することは難しく, 試験敷設を行い実測によりその効果を評価する方法が一般に採られており, 適切な数値解析手法の構築が望まれている。

軌道系の振動解析モデルとしては, まくらぎにより離散支持されたレールと走行車両との連成系を対象に, かなり現実に近いモデル化がなされるようになってきている<sup>1-4)</sup>。しかし, これまでに提案されている解析モデルでは, 道床部分を多層質点系でモデル化し, 地盤は剛とした例が多い。地下鉄軌道の振動においては, 車両・軌道系より発生した振動が道床・トンネルを通して地盤を伝播し, 地表面にまで到達したものが問題となるので, 車両・レールおよびまくらぎにおける振動のみならず, 道床や地盤における振動の評価も重要となる。そのためには道床や地盤の適切なモデル化が必要であり, 道床と地盤を連続体により表現したより現実に近い解析手法の

構成が有効となるが, そのような解析例はほとんど報告されていない<sup>5)</sup>。

以前, 著者らは道床・路盤部分に一次元半無限動弾性場を適用したモデル化を試みた<sup>6)</sup>。それにより路盤での振動レベルの評価が可能となったが, 一次元モデルであるため隣接するまくらぎの振動の影響を受け得ないなど, 実現象の表現には不十分と思われる点が認められた。

本研究では道床と地盤を二次元連続体としてモデル化して解析手法を構成する。バラストマット・道床およびコンクリート基盤は有限要素により離散化し, 地盤は境界要素により半無限動弾性場としてモデル化する。なお, 軌道パッドと防振パッド(以下パッド類)のバネにおける強い非線形性を考慮するため, 解法は時間域で構成する。また, 道床以下の有限要素・境界要素結合領域の解析には, 車輪・軌道系の部分に比べかなり多くの自由度と計算時間を必要とする。さらに, 車輪・軌道系と道床・地盤系とを結合した解析過程はかなり煩雑なものとなる。そこで, 道床・地盤系はその上の車輪・軌道系と直接結合せず, 別途解析する方法を採る。具体的には, 道床・地盤系のみを対象に, 道床上端面に単位ステップ荷重を作用させた場合の応答を解析し, それにより道床・地盤系に対する数値的 Green 関数を求める。それを車輪・軌道系の解析に用いることにより, 車輪・軌道・道床・地盤等からなる全体系の解析を行う。

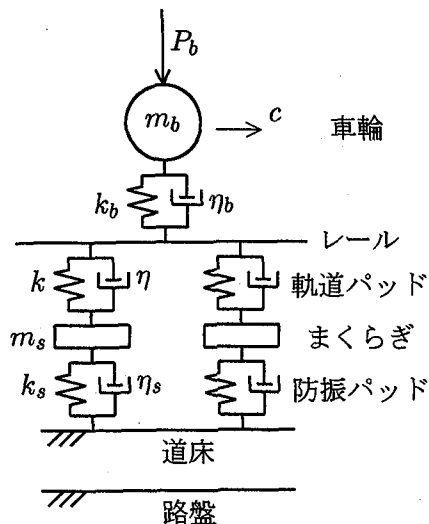


図-1 解析モデル.

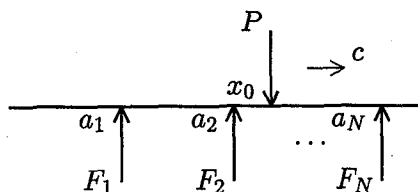


図-2 レールに作用する外力.

以下では、解析手法を構成し、次に車輪・軌道系と道床・地盤系との連成解析におけるまくらぎ・道床間の接触条件の与え方について検討する。最後に列車走行に伴う振動加速度の実測結果を対象に本手法を適用し、その妥当性について検討する。

## 2. レールのたわみの積分表現式の離散化

本研究では図-1 に示すように、走行車輪・レール・軌道パッド・まくらぎ・防振パッド・道床・路盤等からなる解析モデルを対象とする。レール・車輪・まくらぎ等で構成される道床より上部の軌道系の具体的なモデル化については文献 7), 8) で詳述したものと同様の定式化による。本節以下では、その概略と文献 8) と本論文における定式化の相違点とについて述べる。

レールは Euler ばりとしてモデル化し、まくらぎにより離散支持され、単一車輪の走行を受けるものを考える。この場合、レールに作用する外力は図-2 に示すように、車輪との接触力 \$P\$ と各まくらぎからの反力 \$F\_i (i = 1, \dots, N)\$ により構成される。なお、車輪は一定速度 \$c\$ で走行し、\$t = 0\$ における位置を \$x\_0\$ とする。

このとき、レールのたわみ \$u\$ は次の積分表現式で与えられる。

$$u(x, t) = \int_0^t u^*(x_0 - x + c(t - \tau), \tau) P(t - \tau) d\tau$$

$$- \sum_{j=1}^N \int_0^t u^*(a_j - x, \tau) F_j(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

ここで、\$u^\*\$ は無限長 Euler ばりに対する時間域 Green 関数で、次式により与えられる<sup>7), 9)</sup>。

$$u^*(\xi, \tau) = \frac{H(\tau)\xi}{2\sqrt{EI\rho A}} \left[ S\left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau}}\right) - C\left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau}}\right) \right] + \frac{H(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{EI\rho A}\sqrt{\pi\rho A}} \sin\left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi^2}{4\tau} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

なお、\$H\$ は Heaviside のステップ関数、\$S, C\$ は Fresnel の関数、\$EI\$ はレールの曲げ剛性、\$\rho A\$ はレールの単位長さ当たりの質量である。

式 (1) において、\$P\$ と \$F\_i\$ を時間増分 \$\Delta t\$ 毎に区間一定関数で離散化する。すると、時刻 \$t\_M = M\Delta t\$ における走行荷重 \$P\$ の作用位置でのレールのたわみ式は次式により与えられる。

$$u(x_0 + ct_M, t_M) = \sum_{m=1}^M A^{M-m+1} P^m - \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M B_j^{M-m+1} F_j^m \quad (3)$$

ここで、\$P^m, F\_j^m\$ は第 \$m\$ ステップにおける \$P, F\_j\$ の値であり、係数 \$A^m, B\_j^{M,m}\$ は次の積分により定義する。

$$A^m = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(-c\tau, \tau) d\tau, \quad B_j^{M,m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - x_0 - ct_M, \tau) d\tau \quad (4)$$

また、まくらぎ位置 \$x = a\_i\$ におけるレールのたわみは次式で与えられる。

$$u(a_i, t_M) = \sum_{m=1}^M C_i^{M-m+1} P^m - \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \quad (5)$$

ここで、係数 \$C\_i^{M,m}, D\_{ij}^{M,m}\$ は次式で定義する。

$$C_i^{M,m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x_0 - a_i + c(t_M - \tau), \tau) d\tau, \quad D_{ij}^{M,m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - a_i, \tau) d\tau \quad (6)$$

係数 \$A^m, B\_j^{M,m}, C\_i^{M,m}, D\_{ij}^{M,m}\$ の具体的計算については文献 7) を参照されたい。

## 3. 車輪・まくらぎに関する諸方程式の誘導

車輪とまくらぎは質点でモデル化し、鉛直方向の運動に対してつり合いを考える。また、車輪・レール間の接触部とパッド類は Voigt ユニットによりモデル化する。文献 8) では、パッド類の材料特性の振動数依存性を表現するために Maxwell ユニットとバネを並列した 3 要

素モデル<sup>10),11)</sup>によりパッド類をモデル化した、3要素モデルと2要素モデルとの差異が顕著に現れるのは数千Hz以上の高周波数域である。一方、地下鉄軌道の振動においては500Hz以下の比較的低周波数域が重要となることから、本研究では図-1に示したような2要素モデルを採用した。

車輪とまくらぎの運動における時間積分とパッド類等に作用する力の評価には、時間積分法の導入が必要である。本研究では、2.に示したようにレールのたわみ式を積分表現式で与えた。その際にレールへの作用力を時間方向に1ステップ間一定な関数により離散近似した。車輪やまくらぎの運動方程式の時間積分において、それらとレールとの間に作用する接触力の表現が、レールの定式化における接触力の表現方法と適合性をみだすことは、レールと車輪およびまくらぎとの結合解析の安定化において有効となる。質点系の時間積分において、変位や作用力に補間の概念を適用し得る時間積分法として、重み付き残差法や積分方程式法に基づいたものがある。これまで著者らは後者の手法に基づくKisu<sup>12)</sup>により提案された方法を採用し時間積分スキームを構成してきた。なお、文献8)では条件安定なスキームを用いたが、ここでは無条件安定なものを構成する。

### 3.1 車輪の時間積分

車輪の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{u}_b + \frac{P}{m_b} - \frac{f}{m_b} = 0, \quad P = k_b \tilde{u}_b + \eta_b \dot{\tilde{u}}_b, \quad \tilde{u}_b = u_b - \bar{u}_b, \quad f = m_b g + P_b \quad (7)$$

ここで、 $u_b$ は車輪の変位、 $\bar{u}_b$ は車輪直下のレールのたわみ、 $P$ は車輪とレールの接触力、 $m_b$ はバネ下質量、 $k_b, \eta_b$ は接触点のバネ定数と減衰係数、 $f$ は車輪に作用する上載荷重 $P_b$ と自重 $m_b g$ の和で、 $g$ は重力加速度である。また、 $(\cdot)$ は $d/dt$ を意味する。

式(7)の第1,2式に対して次の合成積をとる。

$$\int_0^t (\ddot{u}_b + \frac{P}{m_b} - \frac{f}{m_b}) w^*(t-\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^t (P - k_b \tilde{u}_b - \eta_b \dot{\tilde{u}}_b) w_p^*(t-\tau) d\tau = 0 \quad (8)$$

ここで、核関数 $w^*, w_p^*$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$w^*(\tau) = \tau H(\tau), \quad w_p^*(\tau) = H(\tau) \quad (9)$$

式(8)第1式の $\ddot{u}_b$ の項と第2式の $\dot{\tilde{u}}_b$ の項を部分積分し、 $t < \Delta t$ として、さらに $\bar{u}_b, u_b$ と $P$ をそれぞれ1ステップ間線形および一定関数により補間近似すると、最終的に次式を得る。

$$u_b(t) - u_b^0 - t\dot{u}_b^0 + \frac{t^2}{2m_b} P^1 - \frac{t^2}{2m_b} f = 0, \quad \eta_b(-\tilde{u}_b^0 + \tilde{u}_b(t)) - tP^1 + k_b[(t - \frac{t^2}{2\Delta t})\tilde{u}_b^0 + \frac{t^2}{2\Delta t}\tilde{u}_b^1] = 0 \quad (10)$$

ここで、 $(\cdot)^0, (\cdot)^1$ はそれぞれ $t=0$ (前ステップ)と $t=\Delta t$ (次ステップ)における値である。式(10)で与えられる変

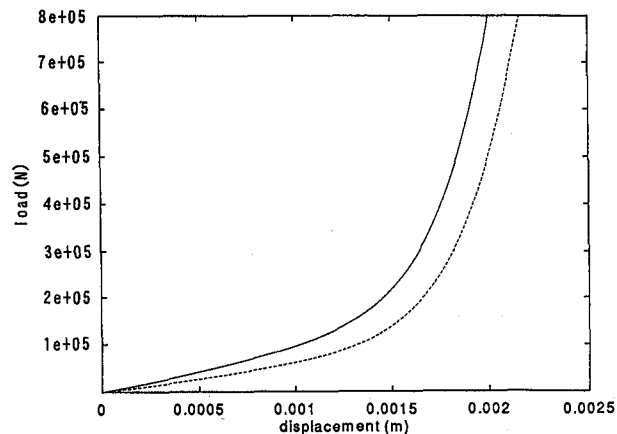


図-3 軌道パッドの荷重変位曲線。実線:公称バネ定数110MN/m, 破線:公称バネ定数70MN/m。

位関数 $u_b(t), \tilde{u}_b(t)$ は $u_b^0, u_b^1$ または $\tilde{u}_b^0, \tilde{u}_b^1$ の線形補間で定義される関数と一般に一致しない。そこで、 $t = \Delta t$ において $u_b(\Delta t) = u_b^1, \tilde{u}_b(\Delta t) = \tilde{u}_b^1$ とおき、選点法を適用する。改めて $t=0$ を $M-1$ ステップ、 $t=\Delta t$ を $M$ ステップに置き換えると次式を得る。

$$u_b^M = -\kappa_1 P^M + S^{M-1}, \quad P^M = \kappa_3(u_b^M - \bar{u}_b^M) - \kappa_2 \dot{\bar{u}}_b^{M-1} \quad (11)$$

ここで、 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, S^{M-1}$ は次式で定義する。

$$\kappa_1 = \frac{\Delta t^2}{2m_b}, \quad \kappa_2 = \frac{\eta_b}{\Delta t} - \frac{k_b}{2}, \quad \kappa_3 = \frac{\eta_b}{\Delta t} + \frac{k_b}{2}, \quad S^{M-1} = u_b^{M-1} + \Delta t \dot{u}_b^{M-1} + \frac{\Delta t^2}{2m_b} f \quad (12)$$

また、同様に車輪の速度 $\dot{u}_b^M$ を与える式を次のように得ることができる。

$$\dot{u}_b^M = \dot{u}_b^{M-1} + \frac{\eta_b}{m_b}(\tilde{u}_b^{M-1} - \tilde{u}_b^M) - \frac{\Delta t k_b}{2m_b}(\tilde{u}_b^{M-1} + \tilde{u}_b^M) + \frac{\Delta t}{m_b} f \quad (13)$$

なお、ここに示した時間積分スキームは重み付き残差法によっても誘導することが可能である。また、自由振動問題に対してはNewmark法で $\gamma=1/2, \beta=1/4$ としたものに一致し、無条件安定な時間積分法を与える<sup>13)</sup>。

### 3.2 まくらぎの時間積分

パッド類の圧縮変形特性は図-3に示すように非線形性を持ち、変形の増加に伴い剛性が大きくなる。解析ではこの非線形性を考慮し、軌道パッドと防振パッドのバネ定数 $k, k_s$ を次式のように与えておく。

$$k = k^l + k^n(u), \quad k_s = k_s^l + k_s^n(u) \quad (14)$$

ここで、 $k^l, k_s^l$ は線形成分に対するバネ定数であり、 $k^n, k_s^n$ は非線形成分に対応するもので、変位の関数として与えられる。

図-1 に示したように、軌道パッドと防振パッドの減衰係数を  $\eta, \eta_s$  とし、第  $j$  番のまくらぎ位置におけるレールとまくらぎの変位を  $u_j, u_{sj}$ 、それらの相対変位を  $\hat{u}_j = u_j - u_{sj}$  と表す。さらに第  $j$  番目のまくらぎ位置における道床上端の変位を  $u_{0j}$  とし、まくらぎとの相対変位を  $\hat{u}_{sj} = u_{sj} - u_{0j}$  と表すと、まくらぎからレールに作用する反力  $F_j$  とまくらぎと道床間の接触力  $F_{sj}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_j &= k^\ell \hat{u}_j + \eta \dot{\hat{u}}_j + k^n (\hat{u}_j) \hat{u}_j, \\ F_{sj} &= k_s^\ell \hat{u}_{sj} + \eta_s \dot{\hat{u}}_{sj} + k_s^n (\hat{u}_{sj}) \hat{u}_{sj} \end{aligned} \quad (15)$$

3.1 と同様に式 (15) に対して時間積分法を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} F_j^M &= \frac{\eta}{\Delta t} (\hat{u}_j^M - \hat{u}_j^{M-1}) + \frac{k^\ell}{2} (\hat{u}_j^M + \hat{u}_j^{M-1}) + \bar{F}_j^M, \\ F_{sj}^M &= \frac{\eta_s}{\Delta t} (\hat{u}_{sj}^M - \hat{u}_{sj}^{M-1}) + \frac{k_s^\ell}{2} (\hat{u}_{sj}^M + \hat{u}_{sj}^{M-1}) + \bar{F}_{sj}^M \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\bar{F}_j^M, \bar{F}_{sj}^M$  は非線形成分に関する項で、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_j^M &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{M-1}}^{t_M} k^n (\hat{u}_j) \hat{u}_j d\tau, \\ \bar{F}_{sj}^M &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{M-1}}^{t_M} k_s^n (\hat{u}_{sj}) \hat{u}_{sj} d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

実際の解析では、式 (17) における  $k^n (\hat{u}_j), k_s^n (\hat{u}_{sj})$  を  $\hat{u}_j, \hat{u}_{sj}$  と同様に 1 ステップ間線形で補間近似し、それより  $\bar{F}_j^M, \bar{F}_{sj}^M$  を計算している。

一方、まくらぎの運動方程式は次式で与えられる。

$$m_s \ddot{u}_{sj} - F_j + F_{sj} = 0 \quad (18)$$

ここで、 $m_s$  はまくらぎ質量である。

式 (18) の左辺と  $w^*$  との合成積をとり、車輪と同様の定式化を行い、式 (16) より  $F_j^M, F_{sj}^M$  を消去すると次式を得る。

$$u_{sj}^M = \frac{\kappa_5}{\kappa_4} u_j^M + \frac{\kappa_6}{\kappa_4} u_{0j}^M + \frac{1}{\kappa_4} T_j^{M-1} \quad (19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= 1 + \kappa_5 + \kappa_6, \\ \kappa_5 &= \frac{\Delta t \eta}{2m_s} + \frac{\Delta t^2 k^\ell}{4m_s}, \\ \kappa_6 &= \frac{\Delta t \eta_s}{2m_s} + \frac{\Delta t^2 k_s^\ell}{4m_s}, \\ T_j^{M-1} &= u_{sj}^{M-1} + \Delta t \dot{u}_{sj}^{M-1} \\ &\quad - \left( \frac{\Delta t \eta}{2m_s} - \frac{\Delta t^2 k^\ell}{4m_s} \right) (u_j^{M-1} - u_{sj}^{M-1}) \\ &\quad - \left( \frac{\Delta t \eta_s}{2m_s} - \frac{\Delta t^2 k_s^\ell}{4m_s} \right) (u_{0j}^{M-1} - u_{sj}^{M-1}) \\ &\quad + \bar{F}_j^M - \bar{F}_{sj}^M \end{aligned} \quad (20)$$

## 4. 道床・地盤のモデル化

道床・地盤部分は二次元波動場としてモデル化する。解析手法には有限要素・境界要素結合法を用いる。なお、解析過程の単純化、解析の効率化を図る目的で、有限要素・境界要素の結合方程式を 2., 3. に述べた車輪・軌道系の方程式と直接結合せず、道床上端の変位に関する数値的 Green 関数を求めるために用いる。

### 4.1 有限要素方程式

次の有限要素方程式を考える。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{M}$  は質量行列、 $\mathbf{C}$  は減衰行列、 $\mathbf{K}$  は剛性行列、 $\mathbf{u}$  は節点変位ベクトル、 $\mathbf{f}$  は節点力ベクトルである。なお、以下の解析では三節点三角形要素を用い、 $\mathbf{C}$  はレイリー減衰で与えている。3. に述べた積分方程式に基づく時間積分法を式 (21) に適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}^F \mathbf{u}^M &= \mathbf{f}^M + \bar{\mathbf{f}}^{M-1}, \\ \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^M &= -\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^{M-1} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} (\mathbf{u}^M - \mathbf{u}^{M-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{K}}^F, \bar{\mathbf{f}}^M$  は次式で定義されるものである。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}^F &= \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{K}, \\ \bar{\mathbf{f}}^M &= \left( \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}^M + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^M \end{aligned} \quad (23)$$

### 4.2 結合方程式

動弾性場の境界積分方程式は次式で与えられる<sup>14)</sup>。

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, t) &= - \int_{\Gamma} \int_0^{t+} p_{ij}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u_j(\mathbf{y}, \tau) d\tau d\Gamma_y \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_0^{t+} u_{ij}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) p_j(\mathbf{y}, \tau) d\tau d\Gamma_y \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $u_j, p_j$  は変位と表面力成分、 $c_{ij}(\mathbf{x})$  は領域境界  $\Gamma$  上の点  $\mathbf{x}$  における境界の滑らかさによる係数、 $u_{ij}^*$  は変位の基本解、 $p_{ij}^*$  は  $u_{ij}^*$  に対応する表面力であり、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。

本研究では、式 (24) の離散化において  $u_j, p_j$  共に空間方向には線形要素を用い、時間方向へはそれぞれ区間線形および区間一定関数による近似を用いる。有限要素方程式 (22) との結合において、境界要素方程式を有限要素型に変換する。有限要素型境界要素方程式は次式で与えられる<sup>15)</sup>。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^B \mathbf{u}^M &= \mathbf{f}^M + \bar{\mathbf{f}}^{M-1}, \\ \mathbf{K}^B &= \mathbf{D}[\mathbf{G}^1]^{-1} \mathbf{H}^1, \\ \mathbf{f}^M &= \mathbf{D} \mathbf{p}^M, \bar{\mathbf{f}}^{M-1} = \mathbf{D}[\mathbf{G}^1]^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{M-1}, \\ \bar{\mathbf{u}}^{M-1} &= \sum_{m=2}^M (\mathbf{G}^m \mathbf{p}^{M-m+1} - \mathbf{H}^m \mathbf{u}^{M-m+1}) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\mathbf{G}^m, \mathbf{H}^m$  は式 (24) を離散化して得られる係数行列、 $\mathbf{p}^m$  は節点表面力ベクトル、 $\mathbf{D}$  は表面力成分を節点力に変換する行列である。

有限要素と境界要素の結合面において変位の連続条件と力のつり合い条件を課すと、次の結合方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B + \bar{\mathbf{K}}_{22}^F & \bar{\mathbf{K}}_{23}^F \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_{32}^F & \bar{\mathbf{K}}_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^M \\ \mathbf{u}_2^M \\ \mathbf{u}_3^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^M \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_3^M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1^{M-1} \\ \bar{\mathbf{f}}_2^{M-1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{f}}_2^{M-1} \\ \bar{\mathbf{f}}_3^{M-1} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ここで、 $\mathbf{u}_2$  は結合面上の節点変位、 $\mathbf{u}_1$  は境界要素の節点変位ベクトルから  $\mathbf{u}_2$  を除いたもの、 $\mathbf{u}_3$  は有限要素の節点変位から  $\mathbf{u}_2$  を除いたものである。

### 4.3 数値的 Green 関数による道床上端変位の表現

第  $j$  番まくらぎ直下の道床上端面に 1 ステップ間にわたり作用する鉛直方向単位力により、時刻  $t_m = m\Delta t$  後に第  $i$  番まくらぎ直下の道床上端面において生ずる鉛直変位を  $\bar{G}_{ij}^m$  とおく。このとき、道床とまくらぎ間の接触力  $F_{sj}$  の作用による道床上端面の変位  $u_{0i}^M$  は次式で与えられる。

$$u_{0i}^M = \sum_j \sum_m \bar{G}_{ij}^{M-m+1} F_{sj}^m / y_0 \quad (27)$$

ここで、 $y_0$  は一締結当たりのまくらぎの奥行き長さである。

式 (27) に用いる係数 (数値的 Green 関数)  $\bar{G}_{ij}^m$  は 4.2 に示した有限要素・境界要素結合解析により別途求めておく。なお、 $\bar{G}_{ij}^m$  は節点  $i$  と  $j$  の距離の関数となるので、荷重作用点  $j$  毎に計算する必要はなく、ある 1 点に加えた単位力に対する各節点での変位応答を一度計算すれば  $\bar{G}_{ij}^m$  を得ることができる。

## 5. 車輪・軌道系・道床・地盤より成る全体系の求解方程式

### 5.1 車輪直下のレールのたわみ式

まくらぎからレールに作用する反力の式 (16) 第 1 式とまくらぎの変位式 (19) を車輪直下のレールのたわみ式 (3) に代入し、 $u_{sj}^M, F_{sj}^M$  を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{u}_b^M + \kappa_7 \sum_j B_j^{M,1} u_j^M - A^1 P^M \\ - \kappa_8 \sum_j B_j^{M,1} u_{0j}^M = \bar{R}^{M-1} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \kappa_7 &= (1 - \frac{\kappa_5}{\kappa_4}) (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta}{\Delta t}), \kappa_8 = \frac{\kappa_6}{\kappa_4} (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta}{\Delta t}), \\ \bar{R}^{M-1} &= R^{M-1} + \frac{1}{\kappa_4} (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta}{\Delta t}) \sum_j B_j^{M,1} T_j^{M-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{M-1} &= \sum_m A^{M-m+1} P^m - \sum_j \sum_m B_j^{M,M-m+1} F_j^m \\ &\quad - \sum_j B_j^{M,1} [(\frac{k_s^l}{2} - \frac{\eta}{\Delta t}) \hat{u}_j^{M-1} + \bar{F}_j^M] \end{aligned} \quad (29)$$

### 5.2 まくらぎ直上のレールのたわみ式

5.1 と同様に、まくらぎ直上のレールのたわみ式 (5) に式 (16) 第 1 式と式 (19) を代入し、 $u_{sj}^M, F_j^M$  を消去すると次式を得る。

$$\sum_j K'_{ij} u_j^M - C_i^{M,1} P^M - \kappa_8 \sum_j D_{ij}^1 u_{0j}^M = \bar{Q}_i^{M-1} \quad (30)$$

ここで、

$$\begin{aligned} K'_{ij} &= \delta_{ij} + \kappa_7 D_{ij}^1, \\ \bar{Q}_i^{M-1} &= Q_i^{M-1} + \frac{1}{\kappa_4} (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta}{\Delta t}) \sum_j D_{ij}^1 T_j^{M-1}, \\ Q_i^{M-1} &= \sum_m C_i^{M,M-m+1} P^m - \sum_j \sum_m D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \\ &\quad - \sum_j D_{ij}^1 [(\frac{k_s^l}{2} - \frac{\eta}{\Delta t}) \hat{u}_j^{M-1} + \bar{F}_j^M] \end{aligned} \quad (31)$$

なお、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

### 5.3 まくらぎ直下の道床の変位式

まくらぎ直下の道床の変位式 (27) に、まくらぎ・道床間の接触力  $F_{sj}^M$  の式 (16) 第 2 式とまくらぎの変位式 (19) を代入し、 $u_{sj}^M, F_{sj}^M$  を消去すると次式を得る。

$$\kappa_9 \sum_j \bar{G}_{ij}^1 u_j^M + \sum_j L_{ij} u_{0j}^M = \bar{V}_i^{M-1} \quad (32)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \kappa_9 &= \frac{\kappa_5}{\kappa_4} (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta_s}{\Delta t}), \\ L_{ij} &= y_0 \delta_{ij} + (1 - \frac{\kappa_6}{\kappa_4}) (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta_s}{\Delta t}) \bar{G}_{ij}^1, \\ \bar{V}_i^{M-1} &= \sum_j \sum_m \bar{G}_{ij}^{M-m+1} F_{sj}^m \\ &\quad + \sum_j \bar{G}_{ij}^1 [\frac{1}{\kappa_4} (\frac{k_s^l}{2} + \frac{\eta_s}{\Delta t}) T_j^{M-1} \\ &\quad + (\frac{k_s^l}{2} - \frac{\eta_s}{\Delta t}) \hat{u}_{sj}^{M-1} + \bar{F}_{sj}^M] \end{aligned} \quad (33)$$

### 5.4 求解方程式

式 (28), (30), (32)、車輪の変位式および車輪・レール間の接触力の式 (11) を連立して、まくらぎ直上のレールのたわみ  $\mathbf{u}^M$ 、車輪の変位  $u_b^M$ 、車輪直下のレールのたわみ  $\bar{u}_b^M$ 、車輪・レール間の接触力  $P^M$  および道床上端

の変位  $u_0^M$  を未知量とした次の求解方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \kappa_7 \mathbf{B}^{M,1} & 0 & 1 & -\mathbf{A}^1 & -\kappa_8 \mathbf{B}^{M,1} \\ \mathbf{K}' & 0 & 0 & -\mathbf{C}^{M,1} & -\kappa_8 \mathbf{D}^1 \\ \kappa_9 \bar{\mathbf{G}}^1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} \\ 0 & 1 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & -\kappa_3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^M \\ u_b^M \\ \bar{u}_b^M \\ P^M \\ u_0^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{M-1} \\ \bar{\mathbf{Q}}^{M-1} \\ \bar{\mathbf{V}}^{M-1} \\ S^{M-1} \\ \kappa_2 \bar{u}_b^{M-1} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

式(34)において  $\bar{\mathbf{R}}^{M-1}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}^{M-1}$  は非線形項  $\bar{F}_j^M$ ,  $\bar{F}_{sj}^M$  を含む。そこで式(34)の求解には繰り返し計算を適用し、各ステップで収束解を求める方法をとる。なお、以降に示す解析例では各ステップ2回の反復で収束解を得ている。

## 6. まくらぎと道床の結合方法の検討

解析においてまくらぎは質点としてモデル化し、まくらぎに作用するまくらぎ・道床間の接触力は集中力として与えた。しかし、実際のまくらぎは幅約20cmのものが60cm前後の間隔で配置されており、本来道床との接触力は接触面上の分布力となる。まくらぎ・道床間の接触力の分布の違いは道床上端面の変位評価に影響を及ぼすと考えられる。この接触力分布の扱い方としては、まくらぎとの変位の適合条件と道床上端の節点における接触力分布とまくらぎに作用する接触力  $F_{sj}^M$  とのつり合い条件の下で、接触力分布を未知として全体系の方程式を構成する方法が考えられるが、この場合求解過程が煩雑になると思われる。そのため、本研究では接触力分布のモードは予め仮定したものを与え、分布接触力の合力に相当する  $F_{sj}^M$  を未知として解法を構成した。以下では、仮定する接触力分布のとり方など、まくらぎ・道床間の接触状態の設定方法について解析を通し検討する。

解析では簡単のため、図-1において防振パッドのないモデルを対象に考える。解析条件を表-1に示す。

道床・地盤の離散化は図-4のように行った。締結間隔は62.5cmであり、道床と地盤の一部を有限要素で分割している。解析ではまくらぎ11本分6.25mをモデル化した。その一端のまくらぎ位置に作用した単位力に対する他端まくらぎ位置における変位応答を数値的 Green 関数として求める必要があるため、図-4に示すように幅13mを解析領域とし、中央節点に加えた単位力に対する上端面各節点での変位応答を求めた。なお、有限要素の左右の打ち切り端には粘性境界を設定している。また、レール頭頂面が平坦な場合を対象とし、 $\Delta t = 0.00025$ (s)で解析した。

まくらぎ・道床間の接触条件として、まくらぎ中央の1点にのみ接触力を作用させるもの：Model-1と、一様な接触力分布の幅をまくらぎ幅に近い18.75cmとし、対応する3つの節点での変位の重み平均  $(u_1/4 + u_2/2 + u_3/4)$

表-1 解析条件

|           |         |                                      |       |
|-----------|---------|--------------------------------------|-------|
| 車輪        | 走行速度    | $c(\text{m/s})$                      | 10    |
|           | 上載荷重    | $P_b(\text{KN})$                     | 60    |
|           | バネ下質量   | $m_b(\text{Kg})$                     | 350   |
|           | 接触バネ定数  | $k_b(\text{MN/m})$                   | 2000  |
|           | 接触減衰係数  | $\eta_b(\text{KN} \cdot \text{s/m})$ | 51    |
| レール       | 曲げ剛性    | $EI(\text{MN} \cdot \text{m}^2)$     | 4     |
|           | 質量      | $\rho A(\text{Kg/m})$                | 50    |
| 軌道<br>パッド | バネ定数    | $k(\text{MN/m})$                     | 440   |
|           | 減衰係数    | $\eta(\text{KN} \cdot \text{s/m})$   | 2800  |
| まくらぎ      | 質量      | $m_s(\text{Kg})$                     | 80    |
| 道床        | 質量密度    | $\rho_b(\text{Kg/m}^3)$              | 720   |
|           | 縦波伝播速度  | $V_{bp}(\text{m/s})$                 | 250   |
|           | 横波伝播速度  | $V_{bs}(\text{m/s})$                 | 125   |
|           | せん断弾性係数 | $G_b(\text{MN} \cdot \text{m}^2)$    | 11.25 |
|           |         |                                      |       |
| 地盤        | 質量密度    | $\rho_g(\text{Kg/m}^3)$              | 1800  |
|           | 縦波伝播速度  | $V_{gp}(\text{m/s})$                 | 1000  |
|           | 横波伝播速度  | $V_{gs}(\text{m/s})$                 | 500   |
|           | せん断弾性係数 | $G_g(\text{MN} \cdot \text{m}^2)$    | 450   |
|           |         |                                      |       |

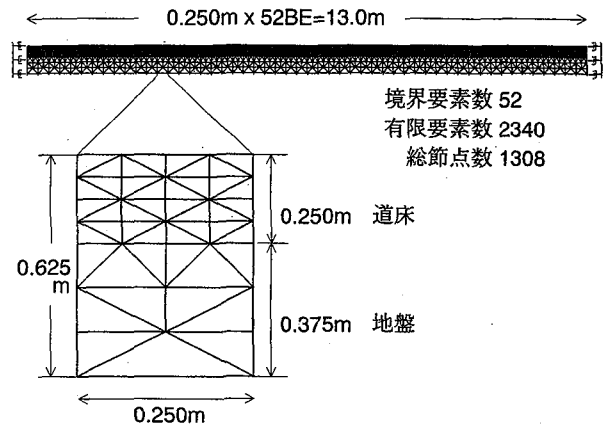


図-4 道床・地盤の離散化。

を  $\bar{G}_{sj}^m$  としたもの：Model-2 について結果を示す。11本のまくらぎの内、中央に位置するまくらぎ直上のレールの加速度は、各接触モデルに対して図-5,6のようになった。なお、ここに示した2つのモデル以外にも、接触力は分布力とし応答変位を1点で評価したものや、変位の平均を単純平均により与えたもの等についても検討した。Model-1,2では安定解を得ることができたが、他の接触条件のものでは解が発散するものもあった。また、接触力を分布力として与えたモデルではレール加速度がModel-2と同様の傾向を示したが、接触力が1点に集中しているModel-1では加速度が他に比べ小さな値を示した。以上より、Model-2が安定で最も良好な結果を与えていると思われる。以下に示す解析ではまくらぎ・道床間の接触条件をModel-2の方法で設定することとした。

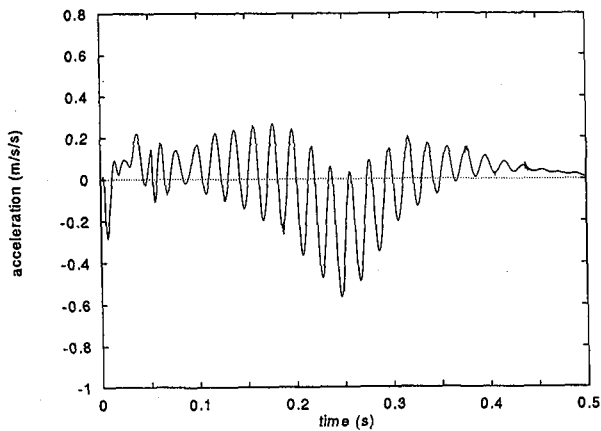


図-5 レールの加速度時刻歴 (Model-1).

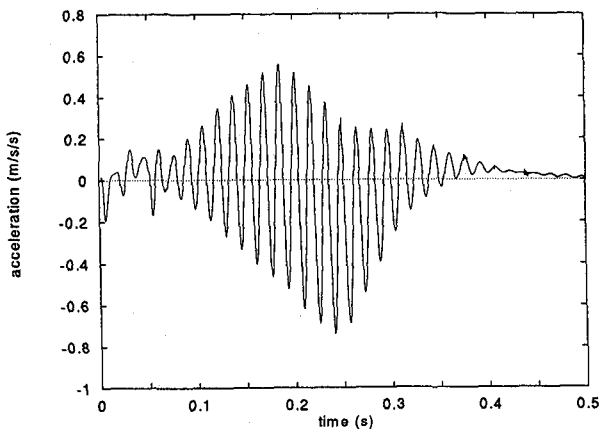


図-6 レールの加速度時刻歴 (Model-2).

## 7. 解析例

### 7.1 解析条件

地下鉄都営新宿線の防振まくらぎ交換工事に際して行われたレール・まくらぎ・基盤の振動加速度の測定結果を対象に、本解析手法を適用する。解析では工事前・後に対応する次の2種類のモデルを考える。

- ・ PC まくらぎを用いたモデル (Case 1: 工事前に相当)
- ・ 防振まくらぎを用いたモデル (Case 2: 工事後に相当)

測定が行われた箇所におけるトンネル断面を図-7に示す。道床はバラスト道床で、その下にコンクリート基盤 (インバート) がある。また、道床と基盤の間には防振対策の目的で厚さ 25mm のバラストマットが敷かれている。トンネルの周囲は厚さ 250mm の二次覆工コンクリートと厚さ 300mm の RC セグメントにより覆われているが、解析では基盤・二次覆工コンクリート・RC セグメントを一体のコンクリート層とした。また、トンネル内の振動加速度測定点は図-7 に示した BV1-5 の5点であり、BV1 がレール、BV2 がまくらぎの測定点となっている。まくらぎ直下の基盤においては測定が行われていないが、基盤と BV3,4 は一体となって振動して

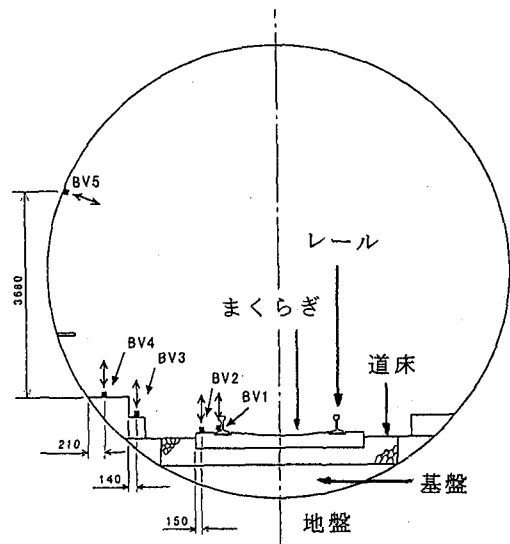


図-7 測定箇所のトンネル断面。

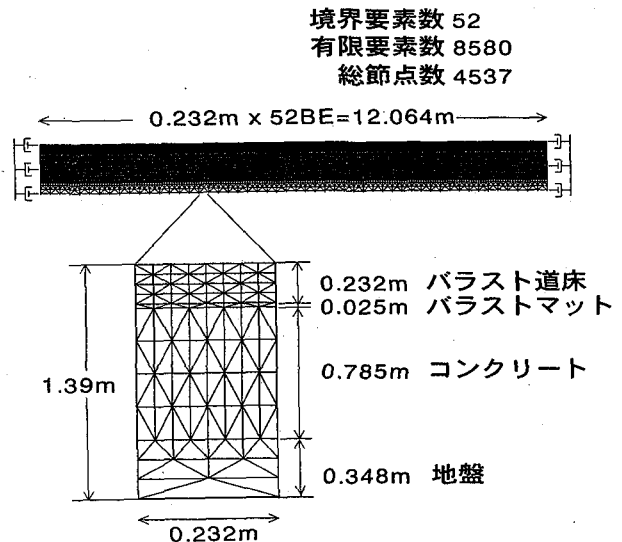


図-8 道床・基盤等の離散化。

いるものと考えられ、まくらぎに近い BV3 を基盤での解析結果との比較に用いる。道床の物性値については測定がなされていないため、文献 16) を参考に、質量密度  $\rho_b=1570(\text{Kg/m}^3)$ 、縦波伝播速度  $V_{bp}=232(\text{m/s})$ 、横波伝播速度  $V_{bs}=116(\text{m/s})$  と設定した。また、地盤は N 値 5 程度のシルト質からなる軟弱な沖積地盤であり、弾性波試験結果<sup>17)</sup>を参考に、縦波伝播速度  $V_{gp}=928(\text{m/s})$ 、横波伝播速度  $V_{gs}=270(\text{m/s})$  とした。

道床以下の部分は図-8 のように離散化した。バラスト道床・バラストマット・コンクリート基盤・地盤の一部を有限要素で離散化し、それより下方の半無限領域を境界要素で表している。本解析におけるまくらぎ幅は約 24cm となっており、6. に述べた検討結果に基づき、まくらぎ・道床間の接触力は幅 23.2cm に位置する 9 個の有限要素節点に一樣分布力として与えた。まくらぎは 58cm 間隔で敷設されており、11 本を解析対象とした。

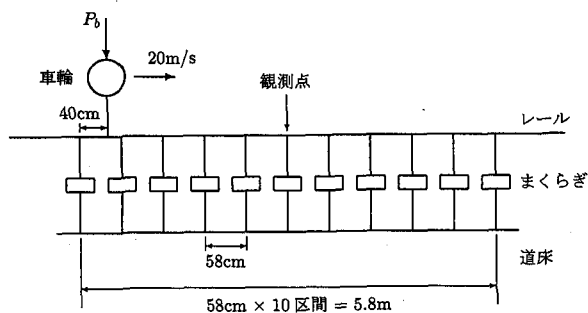


図-9 車輪・まくらぎの配置.

表-2 解析条件 (カッコ内は Case 2)

|         |          |                      |                   |
|---------|----------|----------------------|-------------------|
| 上乗荷重    | $P_b$    | (KN)                 | 36.75             |
| バネ下質量   | $m_b$    | (Kg)                 | 350               |
| 接触バネ定数  | $k_b$    | (MN/m)               | 2000              |
| 接触減衰係数  | $\eta_b$ | (KN·s/m)             | 0                 |
| レール曲げ剛性 | $EI$     | (MN·m <sup>2</sup> ) | 4                 |
| レール質量   | $\rho A$ | (Kg/m)               | 50                |
| 軌道      | バネ定数     | $k$                  | (MN/m) 公称 70(110) |
| パッド     | 減衰係数     | $\eta$               | (KN·s/m) 50(157)  |
| まくらぎ質量  | $m_s$    | (Kg)                 | 87.68(102.5)      |
| 防振      | バネ定数     | $k_s$                | (MN/m) —(公称 9)    |
| パッド     | 減衰係数     | $\eta_s$             | (KN·s/m) —(30)    |

表-3 道床・地盤等の解析条件

|        |         |                               |       |
|--------|---------|-------------------------------|-------|
| 道床     | 質量密度    | $\rho_b$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | 1570  |
|        | 縦波伝播速度  | $V_{bp}$ (m/s)                | 232   |
|        | 横波伝播速度  | $V_{bs}$ (m/s)                | 116   |
|        | せん断弾性係数 | $G_b$ (MN·m <sup>2</sup> )    | 21.12 |
| バラスト   | 質量密度    | $\rho_m$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | 1227  |
| マット    | 縦波伝播速度  | $V_{mp}$ (m/s)                | 70.65 |
|        | 横波伝播速度  | $V_{ms}$ (m/s)                | 49.96 |
|        | せん断弾性係数 | $G_m$ (MN·m <sup>2</sup> )    | 3.06  |
| コンクリート | 質量密度    | $\rho_c$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | 2300  |
|        | 縦波伝播速度  | $V_{cp}$ (m/s)                | 5710  |
|        | 横波伝播速度  | $V_{cs}$ (m/s)                | 3612  |
|        | せん断弾性係数 | $G_c$ (MN·m <sup>2</sup> )    | 30000 |
| 地盤     | 質量密度    | $\rho_g$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | 1420  |
|        | 縦波伝播速度  | $V_{gp}$ (m/s)                | 928   |
|        | 横波伝播速度  | $V_{gs}$ (m/s)                | 270   |
|        | せん断弾性係数 | $G_g$ (MN·m <sup>2</sup> )    | 22    |

まくらぎ配置, 初期時刻における車輪位置, レール・まくらぎ・基盤の加速度観測位置を図-9に示す。また, 車輪の走行速度は測定時の条件に合わせ  $c = 20(\text{m/s})$  とし,  $\Delta t = 0.000125(\text{s})$  で 0.25 秒間を解析した。その他の解析条件を表-2,3に示す。

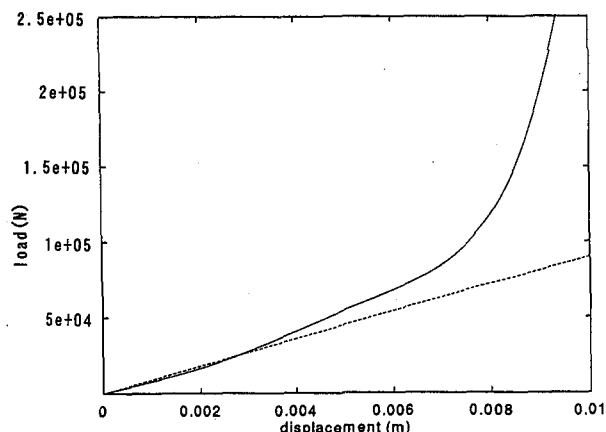


図-10 防振パッドの荷重-変位曲線. 公称バネ定数 9MN/m.

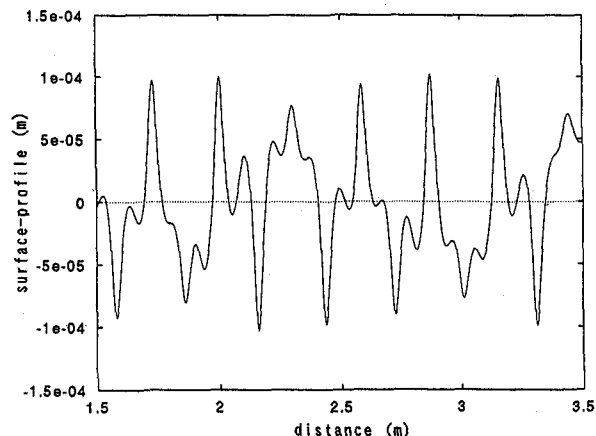


図-11 レール頭頂面の凹凸形状.

パッド類のバネには非線形性を考慮する。軌道パッドと防振パッドの荷重-変位曲線の一例をそれぞれ図-3,10に示す。図中で破線は公称値に対する線形バネのものである。

振動の発生源として, 図-11に示すような凹凸をレール頭頂面に与えた。なお, ここに設定したレールの凹凸は, 様々な振動源より生ずる振動を表現するためのもので, 実際のレールにおける凹凸を直接近似したものではない。また, レール頭頂面の振幅が比較的大きな場合であれば実測により実波形を得ることができるが, レール削正後のように凹凸振幅が小さな状態において, 解析結果のスペクトル分布が実測と一致するようにレールの凹凸を予め設定することは現段階では困難である。そこで, Case 1におけるレールの振動加速度の大きさが工事前の実測値に近似するように, レール頭頂面にランダムな凹凸を与えた。

## 7.2 解析結果

防振まくらぎ交換工事前・後のレール・まくらぎ・基盤における振動加速度の Fourier スペクトルを図-12に, Case 1,2の解析におけるレール・まくらぎ・基盤の振動加速度の Fourier スペクトルを図-13に示す。解析におけるまくらぎの加速度が測定値に比べ大き目となっている。

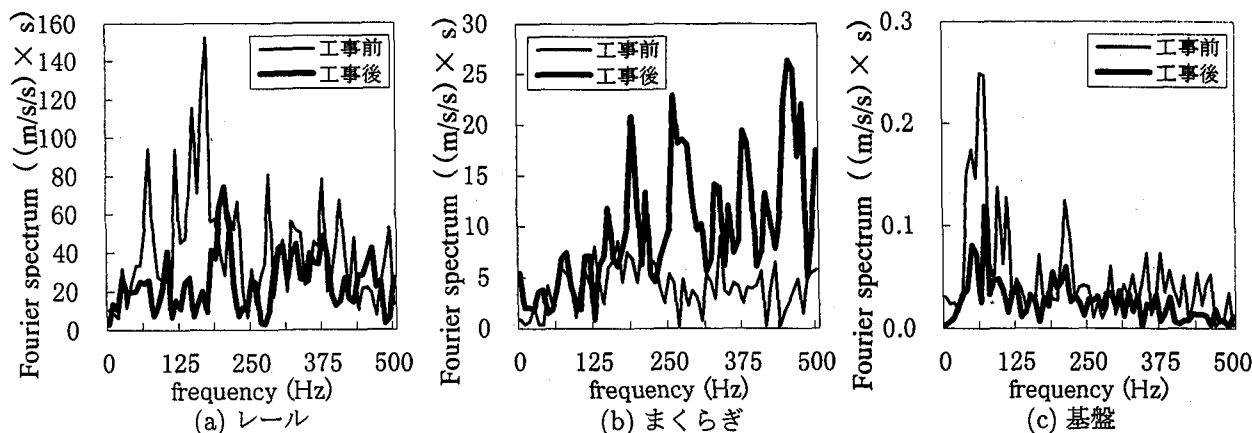


図-12 振動加速度測定値の Fourier スペクトル。

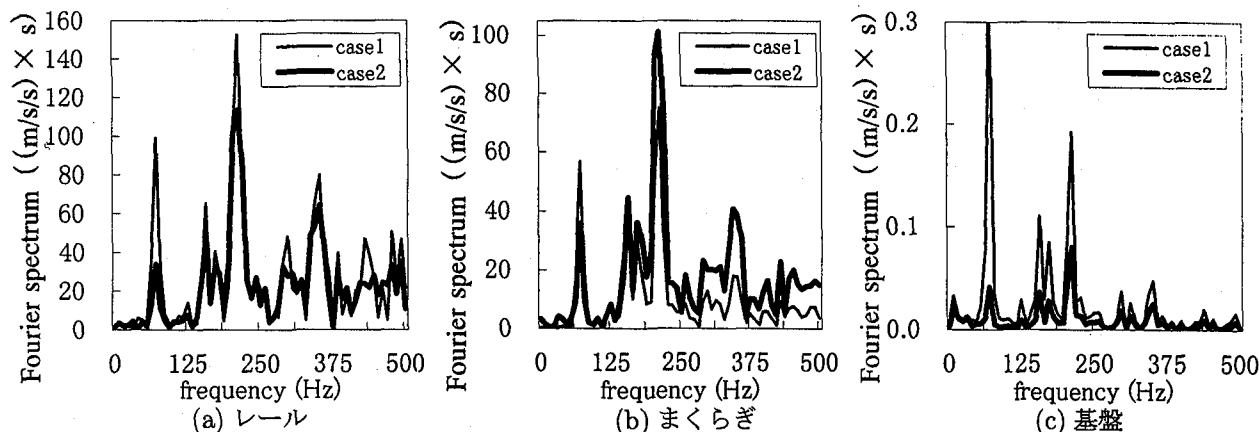


図-13 Case 1,2 の振動加速度の Fourier スペクトル。

るが、レールと基盤については工事前後で実測と概ね一致した大きさとなっている。また、工事後においてレールと基盤の振動は大幅に低減され、一方まくらぎの振動は増大しているが、その傾向は解析においても認められる。なお、工事後にまくらぎの振動加速度が増大したのは、レール締結装置の関係で軌道パッドが公称バネ定数 70(MN/m) のものから 110(MN/m) のものに換えられており、パッドの剛性が増加したことによるものである。さらに、レールと基盤においては 250Hz 以下の周波数域で防振効果が顕著に認められ、まくらぎにおいては 250Hz 以上の周波数域で加速度成分の増大が認められているが、これらの傾向についても測定と解析とで概ね一致した傾向が得られている。周波数域での分布はレール頭頂面に設けた凹凸形状に依存し、それを測定と一致させることはできないので、図-12,13 のスペクトル分布の詳細について比較することは無意味であるが、工事前後における加速度の大きさや防振効果において定性的な一致が認められ、本研究で構成した解析手法により、レールやまくらぎを初め、基盤上の振動特性も概ね適切に評価し得ることが確認できた。なお、著者らは文献 6) において、道床以下の部分を剛体とした場合と、一次元半無限場とした場合とで、モデル化の違いが振動応答に及

ぼす影響について検討した。その結果、レール加速度は道床以下のモデル化の影響をほとんど受けないが、まくらぎにおいては比較的大きな差異が認められた。また、上述の一次元場によるモデル化では道床以下を時間域積分方程式により無減衰波動場として定式化したため、軌道系の振動応答が全体に大き目の値をとり、不自然な結果を得た。一方、本論文に示した手法では、道床以下を二次元場とし、道床部には減衰性を考慮しているため、基盤振動においても実測に対応した結果を得ている。

Case 1 と Case 2 では防振パッドの有無の他に、まくらぎ質量や軌道パッドの剛性などにおいて違いがあり、防振パッドをまくらぎ下に設けたことのみによる防振効果の評価が難しい。そこで、本手法を用いて Case 1 の軌道パッド、まくらぎのまま、まくらぎ下に防振パッドを導入した場合 (Case 3) の解析を行い、防振パッドのみの効果について調べる。レール・まくらぎ・基盤における振動加速度の Fourier スペクトルを図-14 に示す。レールとまくらぎの振動加速度は、高周波数域では Case 1 と類似しているが、低周波数域では Case 2 と同傾向を示し、防振効果が認められる。一方、基盤については周波数域によらず Case 2 と同様の結果が得られており、Case 1 に比べ基盤以下の部分の振動抑制に効果的であ

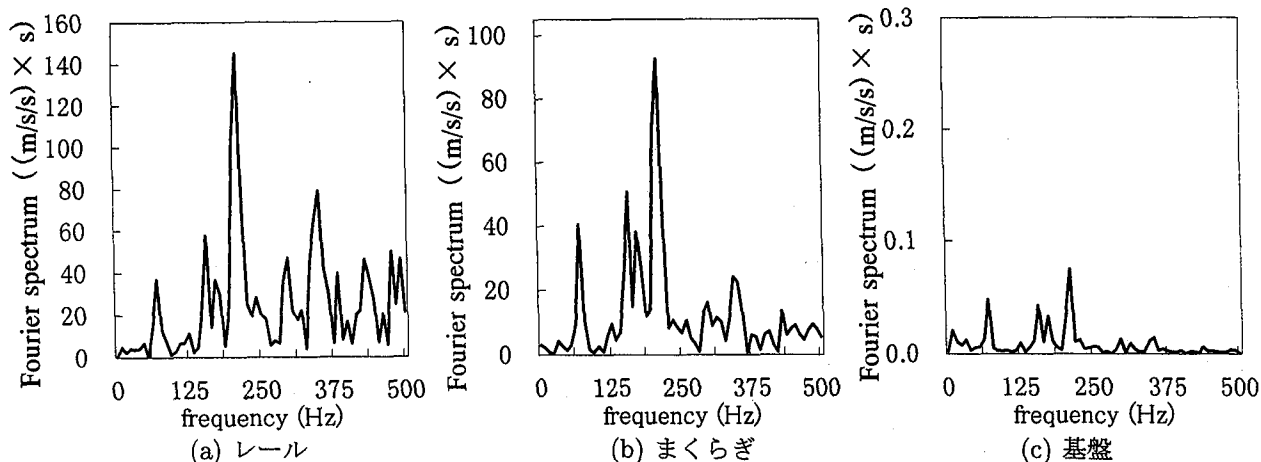


図-14 Case 3 の振動加速度の Fourier スペクトル。

ることがわかる。このことから、従来の PC まくらぎに防振パッドを貼ることが可能であれば、コスト削減にもつながる上、防振効果が十分期待できると考えられる。

## 8. おわりに

列車走行に伴い発生する軌道振動を対象に、道床・地盤部分での振動を適切に評価し得る解析手法の構成を試みた。レールを無限長の Euler ばりとし、車輪・まくらぎを質点でモデル化し、道床・地盤を有限要素・境界要素結合法により表現することで、車輪・レール・まくらぎ・道床・地盤等からなる連成系を解析可能とした。なお、その際に有限要素・境界要素結合領域の方程式を車輪・軌道系の方程式と直接結合せず、道床上端面の数値的 Green 関数の作成に用いることで、解析過程の簡略化、計算効率の向上を図った。まくらぎと道床の接合部において、接触力をまくらぎの幅に一樣に分布するものとして与え、接触範囲内の有限要素節点における変位応答の重み平均により数値的 Green 関数  $\bar{G}_{ij}^m$  を評価する方法が、安定で良好な結果を与えることがわかった。最後に実測値との比較を通し、本解析手法が加速度レベルにおいても、レールやまくらぎ同様に、基盤上の振動特性の評価に適用可能であることが確認できた。

### 参考文献

- 1) 吉村彰芳, 神山雅子: 移動荷重による軌道の振動の解析, 鉄道総研報告, Vol.8, No.9, 31-36, 1994.
- 2) 三浦 重: 軌道構造の動特性モデルの構築, 鉄道総研報告, Vol.9, No.12, 7-12, 1995.
- 3) 石田 誠, 三浦 重, 河野昭子: 軌道動的応答モデルとその解析結果, 鉄道総研報告, Vol.11, No.2, 19-26, 1997.
- 4) Kalker, J.J.: Discretely supported rails subjected to transient loads, *Vehicle Sys.Dyn.*, **25**, 71-88, 1996.
- 5) Knothe, K.L. and Grassie, S.L.: Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle Sys.Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.
- 6) 阿部和久, 須田雅樹, 古田 勝: 積分方程式法による車輪・軌道系の連成振動解析, BTEC 論文集, Vol.7, 53-58, 1997.
- 7) 阿部和久, 古田 勝: 時間域積分表現式による軌道振動解析法, 構造工学論文集, Vol.43A, 365-372, 1997.
- 8) 古田 勝, 阿部和久: 走行荷重を受ける軌道振動系の連成解析, 土木学会論文集, No.583, 61-70, 1998.
- 9) Karl F.Graff: Wave motion in elastic solids, Oxford Univ. Press, pp.141-148, 1975.
- 10) 佐藤吉彦: 軌道高周波振動の理論解析, 鉄道技術研究報告, No.1013, 1976.
- 11) 佐藤吉彦, 尾高達男, 高井秀之: 有道床軌道における軌道振動の理論解析, 鉄道技術研究報告, No.1347, 1987.
- 12) Kisu, H.: Stable time integral scheme using one-dimensional boundary integral equation method, in R.C.Ertekin, C.A.Brebbia, M.Tanaka and R.Shaw (eds), *Boundary Element Technology*, XI CMP, pp.297-306, 1996.
- 13) 阿部和久: 積分方程式法に基づく時間積分法の動弾性有限要素・境界要素結合法への適用, 境界要素法論文集, Vol.14, 93-98, 1997.
- 14) Mansur, W.J. and Brebbia, C.A.: Transient elastodynamics, Chap.5 in: *Topics in Boundary Element Research*, Vol.2, C.A.Brebbia (ed), Springer-Verlag, 1985.
- 15) 阿部和久, 古田 裕: 時間域境界要素・有限要素結合法の不整形地盤波動解析への適用, 土木学会論文集, No.428, 107-116, 1991.
- 16) 長戸 博, 宮本秀郎, 大川賢紀: 道床の細粒化状態評価に関する研究, 平成 8 年 鉄道連合シンポジウム講演論文集, 337-340, 1996.
- 17) 長嶋文夫, 古田 勝, 秋好賢治, 伊藤文人: 地下鉄シールドトンネル及び周辺沖積地盤の波動伝播特性, 構造工学論文集, Vol.34A, 837-846, 1988.

(1998 年 9 月 18 日 受付)