

群対称性のある構造分岐問題における 固有ベクトルを用いた REDUCTION 法

REDUCTION TECHNIQUE IN BIFURCATION PROBLEMS OF SYMMETRIC STRUCTURES USING EIGENVECTORS

浅井光輝*, 藤井文夫 **, 池田清宏***

Mitsuteru ASAI, Fumio FUJII and Kiyohiro IKEDA

* 東北大学大学院工学研究科 前期課程 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

** Dr.-Ing. 岐阜大学工学部 (〒501-1112 岐阜市柳戸)

*** Ph. D. 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

A reduction technique for bifurcation problems of symmetric structures is described. The fact that the deformed configuration on the equilibrium path of the nonlinear symmetric structure may be described by a few basis vectors is already well known in the group-theoretic bifurcation theory and introduced in computational bifurcation analysis. As the basis vectors in the reduction method, a small number of eigenvectors are selected, which are orthogonal to the reference load vector (and imbalance vector). The eigenanalysis is necessary only at the unloaded and undeformed equilibrium point and the selected eigenvectors need not be updated during the path-tracing procedure. Numerical examples show that the number of degrees of freedom of the symmetric structure may be reduced to max. 5 %.

Key Words: Reduction method, Bifurcation, Eigenvectors, 3D truss dome, Spherical shell

1. 序論

本研究では群対称性を有し、分岐座屈する構造系の平衡路に沿う変形の記述に必要な基底ベクトルとして、(原点における)接線剛性行列(以下単に、剛性行列と呼ぶ)の固有ベクトルを基底ベクトルとして選別・採用することにより、本来の自由度より格段に少ない自由度で非線形平衡応答を軽便に追跡できるREDUCTION法を提案する。

構造解析におけるREDUCTION法そのものは、すでに古くから試みられており、1970年代のNoorらの研究[1, 2]が最も有名である。しかしNoorらは主に応力問題におけるREDUCTION法について検討したものである。その後、1980年代までの安定座屈問題(飛び移り座屈)も含めたREDUCTION法のレビューは、例えばTaoの学位論文[3]に良くまとめられているが、本研究のように分岐現象と関連させたREDUCTION法の研究例は見当たらない。

次に群対称性のある構造系について考えてみる。計算コストを削減する目的のため、折り返し対称性を利用し領域の半分あるいは1/4を計算する簡便法もよく知られている。しかし、このときにはある種の分岐モードが失われてしまい、分岐座屈に伴う強度低下を見逃すことになりかねない。また群対称性を示す構造系の平衡路に沿っては、多くの対称性破壊型分岐点が出現する。この

ため分岐点付近で意図する経路への移行が制御できなくなり、通常は主経路を弧長制御で追うことすら困難となるといった問題が生ずる。そこで分岐座屈の存在を見逃すことなく、対称構造系を効率よく解析する方法として、群論的分岐理論によるブロック対角化法[4, 5]が知られている。この方法は、分岐に関連する変形モードと、そうでない変形モードとを、先験情報より事前に分類・整理し、剛性行列全体を一定の対称性を示すブロック毎に分けるものである。このブロック対角化法の提案を計算分岐理論[6, 7]に取り込み、固有値の分離を図った多重分岐点の反復精算法[8, 9]や、合同変換により剛性行列を修正する試み[9, 10]も発表されている。

一定の変形対称性を保持する平衡路の記述には、ある特定の変形モードのみが関与すると言う群論的分岐理論ではすでによく知られている事実を、本論文では計算分岐理論のREDUCE化手法のなかに導入する。変形の記述に必要なモードの選別条件として、剛性行列の固有ベクトルと荷重ベクトル(および不平衡力ベクトル)との間の直交条件を用いた。以下は主経路の追跡計算を主眼としたが、分岐経路を追跡する場合には、必要なモードを同じように選別すれば良い。

2. 平衡路の追跡と剛性方程式

まず平衡方程式をつぎのようにする。

$$E(u, p) = 0 \quad (2.1)$$

ただし、

$$E(u, p) = R(u) - pe \quad (2.2)$$

である。ここに $R(u)$ と e はそれぞれ、変形形態 u に依存する系の内部抵抗力と荷重ベクトルで、 p は荷重変数である。平衡路を追跡する際、式 (2.1) を線形化し、平衡点での予測子 (du, dp) の計算において、つぎの剛性方程式の解法を必要とする。

$$Ku_p = e \quad (\text{平衡点にて}) \quad (2.3)$$

これを u_p について解き、変位修正子は

$$du = dp u_p \quad (\text{平衡点にて}) \quad (2.4)$$

となる。一方、非平衡点における修正子 $(\delta u, \delta p)$ の計算において解法が必要となる剛性方程式は、

$$Ku_p = e \quad (\text{非平衡点にて}) \quad (2.5)$$

$$K\delta u_E = -E \quad (\text{非平衡点にて}) \quad (2.6)$$

となる。式 (2.3) と式 (2.5) は同一表現ではあるが、剛性行列 K を評価する点異なる。変形の修正子 δu は

$$\delta u = \delta p u_p + \delta u_E \quad (\text{非平衡点にて}) \quad (2.7)$$

である。荷重変数の予測子・修正子 $(dp, \delta p)$ はそれぞれ、別途導入する弧長制御式と反復制御式とから決まる。

平衡路に沿う変形形態とは式 (2.4) と式 (2.7) の解の累積であるから、剛性方程式 (2.3) と式 (2.5, 2.6) の解の挙動を調べる必要がある (第4章)。

3. ブロック対角化手法

群対称性のある構造系の分岐理論については、池田らの研究 [4, 5] により次の点が明らかにされている。

式 (2.3) と式 (2.5, 2.6) とをまとめて、つぎのように表示する。

$$Kv = r \quad (3.1)$$

直交行列 $H = [H^0, H^1, H^2, \dots]$ を用いた座標変換により解 v 及び剛性行列 K はつぎのように変換される。

$$v = Hw \quad (3.2)$$

$$\tilde{K} = H^T K H \quad (3.3)$$

ここで $\tilde{K}$ は、次のようにブロック対角化した剛性行列である。

$$\tilde{K} = \text{diag}[\tilde{K}^0, \tilde{K}^1, \tilde{K}^2, \dots] \quad (3.4)$$

H^0 の各列は主経路上での変形モードの基底ベクトルとなっており、 H^i ($i = 1, 2, \dots$) の各列は各分岐経路上での変形モードの基底ベクトルとなっている。また $\tilde{K}$ の各対角ブロックは、主経路に沿う変形を記述する対角ブロック $\tilde{K}^0$ 、及び各分岐経路に沿う変形を記述する対角ブロック $\tilde{K}^i$ ($i = 1, 2, \dots$) を含む。

式 (3.2)、式 (3.3) の座標変換により式 (3.1) は

$$\tilde{K}w = H^T r \quad (3.5)$$

と変換される。この式を式 (3.3) を用いて書き直すと

$$\tilde{K}^0 w^0 = \tilde{r}^0 \quad (3.6)$$

$$\tilde{K}^i w^i = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

となる。ここに

$$w = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad H^T r = \begin{pmatrix} \tilde{r}^0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

であることを用いた。式 (3.6) は、主経路に対する解であり、 $\tilde{K}^0$ が正則な通常点では、唯一の解

$$w^0 = [\tilde{K}^0]^{-1} \tilde{r}^0 \quad (3.9)$$

を持つ。一方、式 (3.7) は分岐解に対する解であり、その解は

$$w^i = 0 \quad (\text{自明解}) \quad \text{通常点} \quad (3.10.1)$$

$$w^i = \theta^i \quad (\text{非自明解}) \quad \text{分岐点} \quad (3.10.2)$$

に分類される。ここで θ^i とは、対角ブロック $\tilde{K}^i$ の分岐固有ベクトルである。

主経路を追う場合には、フルサイズの剛性行列 K を係数行列とする剛性方程式を解く必要はなく、縮小サイズのブロック剛性行列 $\tilde{K}^0$ を係数行列にもつ剛性方程式を解くだけで良く、ここですでに Reduce 化手法の可能性が見えてくる。この解析法におけるメリットは、単に剛性方程式の解法における計算コストが格段に軽減されるばかりではなく、フルサイズの剛性行列 K を用いて主経路を追跡する際に遭遇する分岐点付近での計算上のトラブルを回避できる点である (第1章)。主経路を追跡する際に出現する特異平衡点は荷重極限点のみとなり、これは通常の弧長法で容易に対処できる。分岐経路を追う場合には、主経路上でのブロック対角化と仕組みが違うため、新たに直交行列 H を評価し直しブロック対角

化を新たに試みなければならない。

直交行列 $H_{(N \times N)}$ の評価には群論の知識と分岐現象に関する先見情報が必要とされ、汎用コードの使用を前提とした計算分岐理論においては、任意の計算モデルについて $H_{(N \times N)}$ を求めることは必ずしも容易ではない。そこで本研究では、剛性行列の固有ベクトルの活用に着目する。

4. 右辺項と固有ベクトルの直交性 [11]

もう一度、式(3.1)を考える。このとき、解 v は特異点以外で、 $K_{(N \times N)}$ の固有ペア (λ_i, θ_i) を用いることにより

$$v = \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j^T r}{\lambda_j} \theta_j \quad (4.1)$$

と表現できる[11]。

以下、分岐点においてゼロとなる固有値 λ_B に対応する固有ベクトル θ_B を "分岐固有ベクトル" と呼び、つぎに分岐点で式(3.1)の解 v を考える。

式(4.1)の右辺において分母の固有値については

$$\lambda_B = 0 \quad (\text{分岐点にて}) \quad (4.2)$$

であるため、解 v の不定性から分岐固有ベクトル θ_B については、荷重ベクトル $(r = e)$ との直交性は少なくとも成立している。つまり、分岐点で式(4.1)は、

$$\lambda_B = 0, \theta_B^T e = 0 \quad (\text{分岐点にて}) \quad (4.3)$$

という不定形になっている。

ここでもう一度ブロック対角化手法に戻り、座標変換した後の式(3.6)、式(3.7)を見てみよう。この時、右辺項ベクトル $r (= e \text{ or } -E)$ は、 H^0 の列ベクトル、すなわち主経路に対応した変形モードに必要な基底ベクトルが張る空間に含まれており、分岐経路に対する基底ベクトルは必ず右辺項ベクトル r と直交している。またこのことは、平衡点であれば分岐点でも成立している。

ここで、 $K_{(N \times N)}$ の固有ベクトル θ_j を、解 v を表す基底ベクトルとする考え方を採用する。先に述べたように、荷重ベクトルは主経路の変形モードに必要な固有ベクトル(基底ベクトル)の張る空間に含まれている。このことより、分岐経路の変形モードに必要な固有ベクトル(基底ベクトル)は、必ず荷重ベクトルと直交している。つまり、分岐点で荷重ベクトル $(r = e)$ と直交する分岐固有ベクトル θ_B は、明らかに分岐経路の変形モードに関与する固有ベクトル(基底ベクトル)であるため、分岐点でなくとも

通常の正則平衡点においても荷重ベクトル $(r = e)$ との直交性は成立しており、

$$\theta_B^T e = 0 \quad (\text{正則平衡点, 分岐点にて}) \quad (4.4)$$

である。すなわち式(4.1, 4.4)からもわかるように、正則平衡点における予測子計算に分岐固有ベクトル θ_B は明らかに関与してこない。

つぎに非平衡点における修正子計算では、式(3.1)の右辺項として、荷重ベクトル $(r = e)$ の他にも、不平衡力ベクトル $(r = -E)$ を右辺にもつ剛性方程式の解法も必要となる。しかし、群対称性を有する構造系の主経路を弧長制御で追跡する際、平衡点における変形形態はもとより、非平衡点における変形形態も対称性を失うことなく同じ対称性を保持しており、この変形形態についても荷重ベクトル $(r = e)$ と直交した分岐固有ベクトル θ_B は右辺項 $(r = -E)$ に対して直交性を保っている：

$$\theta_B^T E = 0 \quad (\text{非平衡点にて}) \quad (4.5)$$

以上の分岐固有ベクトル θ_B と右辺項 r との直交性を考慮し、変形の記述に必要な固有ベクトルのみを、その固有値の大きさ順に並べて固有ペアに改めて番号を付け直す。右辺項ベクトルと直交しない固有ベクトルを $j=1 \sim n$ 、直交する固有ベクトルを $j=n+1 \sim N$ とする。これにより式(4.1)は

$$v = \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j^T r}{\lambda_j} \theta_j \quad \left(= \sum_{j=1}^n \alpha_j \theta_j \right) \quad (4.6)$$

と近似できる。つまり右辺項 r と直交しない固有ベクトルのみの集合の表す空間で、解 v を近似する。

平衡路の変形を記述には、系全体の自由度 (N) に比べて、きわめてわずかな本数 (n) の固有ベクトルのみが関与してくることになる。実際の Reduce 化にあたっては、固有ベクトルのモードは近似的に、主経路に沿って定性的に大きく変動する事はないとして(近似のための仮定)、原点(無載荷・無変形)で求めた n 本の固有ベクトルを基底ベクトルとして採用して変形を記述する。

5. REDUCTION 法

節点ベクトル $\mathbf{v}$ が式(4.6)のように近似できることより, 変換行列 $\mathbf{h}$ を,

$$\mathbf{h} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_{n-1} \ \theta_n) \quad (5.1)$$

として節点ベクトル $\mathbf{v}$ を

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{h}\mathbf{w} \quad (5.2)$$

と表す。ここでベクトル $\mathbf{w}$ は

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

である。式(3.1)の左から $\mathbf{h}^T$ をかけ, 式(5.2)を用いることにより

$$\tilde{\mathbf{k}} \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{r}} \quad (5.4)$$

となる。ここに

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{h}^T \mathbf{K} \mathbf{h} \quad (5.5)$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{h}^T \mathbf{r} \quad (5.6)$$

である。N次元の剛性方程式が式(5.4)により, n次元の剛性方程式に縮約できる。そして式(5.4)を解くことにより $\mathbf{w}$ が求まり, 式(5.2)より節点ベクトル $\mathbf{v}$ が求まる。この一連の手続きが Reduce 化手法である。

ここで, ブロック対角化手法における剛性ブロック $\tilde{\mathbf{K}}^0$ と, Reduce 化手法における $\tilde{\mathbf{k}}$ とを比較してみる。 $\tilde{\mathbf{K}}^0$ は離散モデルの主経路の変形を記述する厳格な剛性ブロックであるが, $\tilde{\mathbf{k}}$ は近似剛性行列であり, 両者のサイズ(次元)は必ずしも一致する必要はない。変形の記述に関与するモードがあってもそれが高周波であるため選択しない場合, $\tilde{\mathbf{k}}$ のサイズの方が小さくなるが, 逆に固有ベクトルの選別が甘く, 不必要な直交するモードまで取り込んだ場合, $\tilde{\mathbf{k}}$ のサイズが大きくなることもある。また $\tilde{\mathbf{K}}^0$ の評価には, 対称性を記述する群論の知識が必要となるが, $\tilde{\mathbf{k}}$ の評価には, 通常の汎用コードに備わっている固有値解析の計算機能で十分である。 $\tilde{\mathbf{K}}^0$ は終始一定であるが, $\tilde{\mathbf{k}}$ は必要に応じて(精度向上をねらうなら)更新できる。

平衡路の追跡の際, 経路上で固有ベクトルが著しく変

化しなければ(近似のための仮定), 一度原点において求めた固有ベクトルが一定の基底ベクトルとして使え, 各ステップの固有値解析は不必要となり, 平衡路の追跡計算の大幅な軽便化が図れる。原点での固有ベクトルの実際の計算は, シフト付きサブスペース法を用いる。

6. 例題計算

例題計算には岐阜大学計算力学研究室で開発され拡張性のある汎用プログラム *kosmec97* を用いた。この要素ライブラリーのひとつであるシェルコードは慶應義塾大学理工学部の野口裕久氏との共同開発によるものである。

6. 1 中央集中荷重を受けるトラストーム

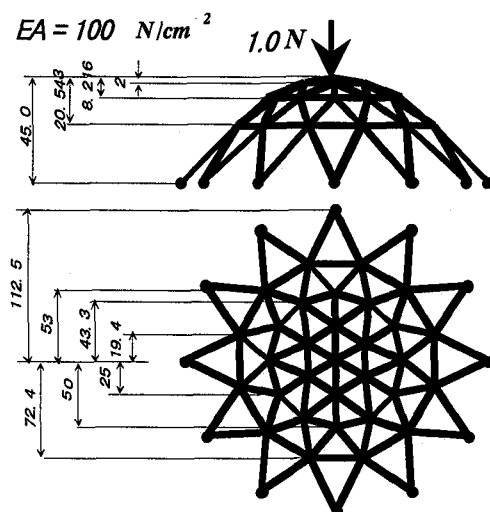


図-1 3Dトラストーム

図1の3Dトラストームは文献[5]からの例題引用で, $z = 0$ の平面内にある節点の変位をすべて拘束して, 全部で $N = 93$ 自由度のベンチモデルとなる。構造系の次元と部材断面剛性はすべて図1に示してある。荷重条件は中央節点に単位鉛直荷重が作用し, この時の非線形平衡応答を考える。図2は REDUCE 化手法のなかで使用した固有ベクトルを示す ($n = 5$ と $n = 9$ の場合)。これらの変形モードの中央節点はいずれも鉛直方向に変位しており, 荷重ベクトルと基底ベクトルとの非直交性は, モード図からも伺え, しかも軸周りの一定の対称性が保たれている。逆に荷重モードと直交しており, 基底モードとして採用しなかった固有ベクトルの例のいくつかを図3に示したが, これらの変形モードが, 軸周りの一定の対称性を保つ主経路の変形に関与してこない理由が視覚的にも理解できる。また, 固有ベクトルと荷重ベクトルの直交性の判別は, 各々正規化したベクトルの内積を計算し, $1.0E-5$ 以下のとき直交していると判断した。

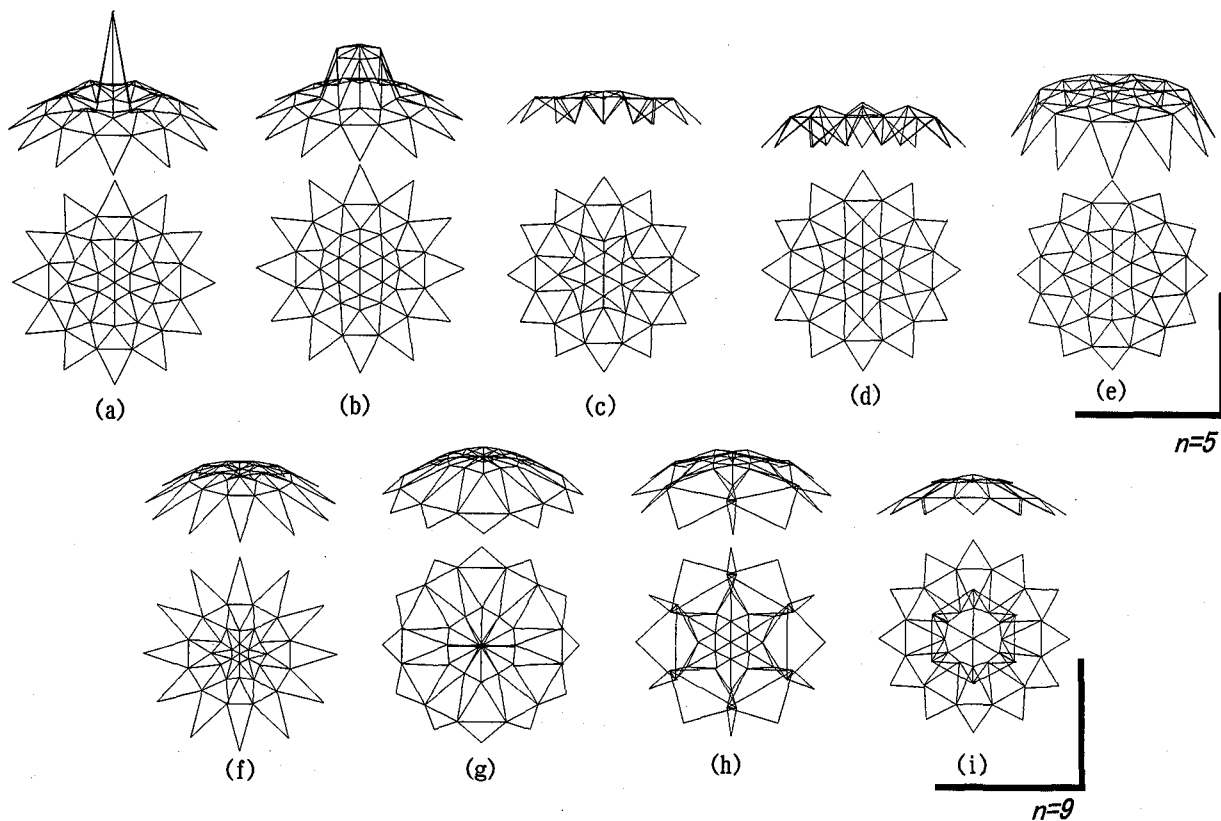


図-2 $h(N, n)$ で採用した固有ベクトル

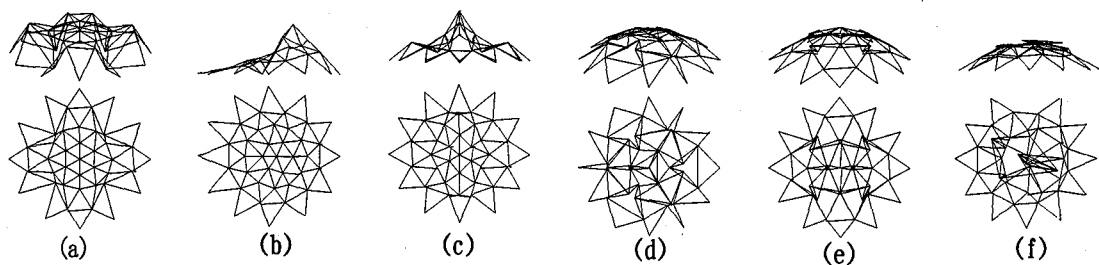
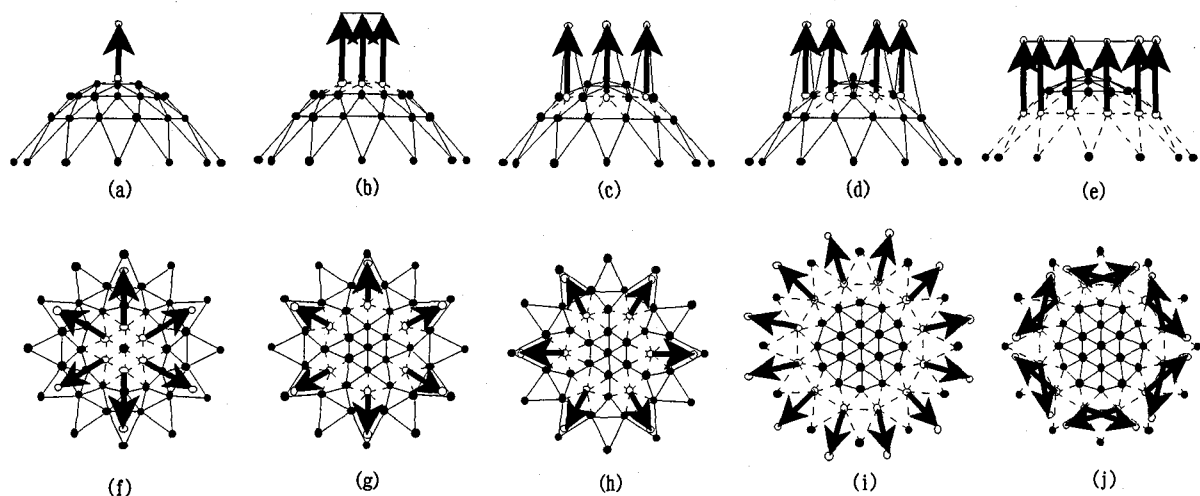


図-3 基底ベクトルで採用しなかった固有ベクトルの例



○ : 初期形状と位置が異なる節点 -- : 初期形状と位置が異なる部材

図-4 ブロック対角化における基底ベクトル

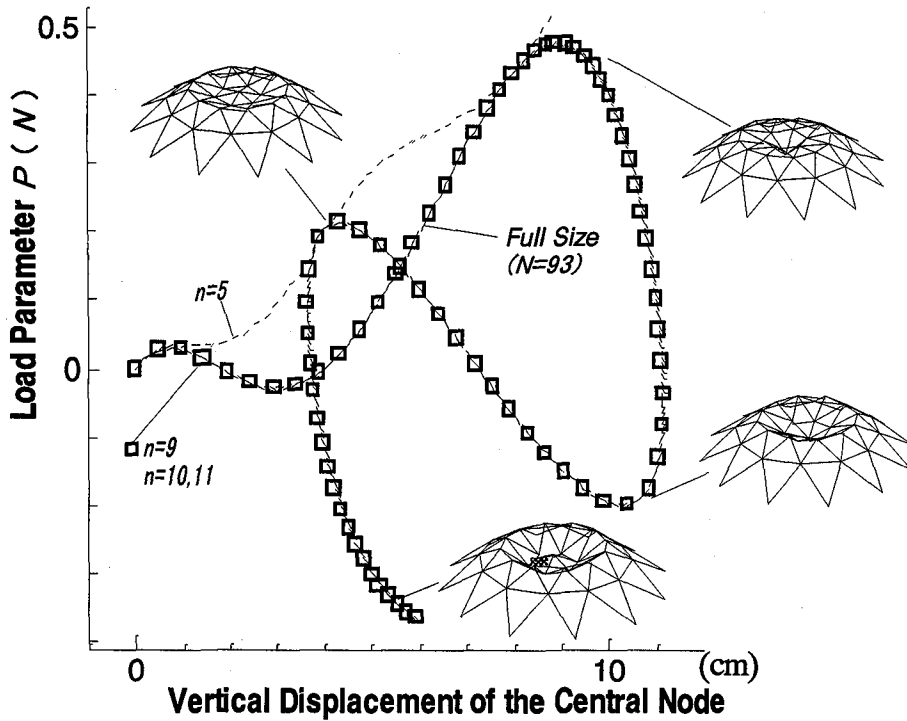


図-5 3Dトラスドームの平衡路

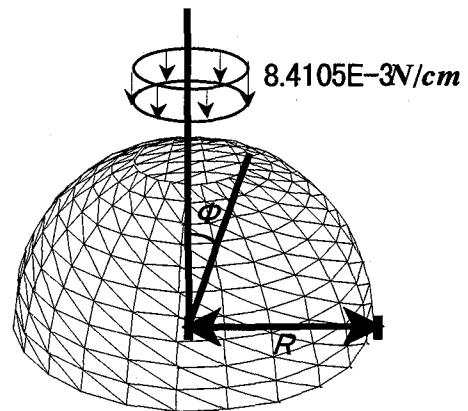
図5はREDUCTION法で主経路を追跡した結果であるが、1割以下の自由度($n=9$)でも、フルサイズ($N=93$)の結果と比較しても全く遜色なく、平衡路のルーピング挙動を追えることを示している。次に($n=10, 11$)とより多くの基底ベクトルを取り込んでみたが、図5では($n=9$)のときと差異が見られず問題なく主経路を追跡できた。

この問題における主経路に対応したブロック $\tilde{K}^0$ のサイズは、室田・池田[5]により(10x10)であることが分かっている。このとき採用した主経路の変形モードの基底ベクトルを図4に載せた。本研究では、ブロック対角化手法より少ない自由度($n=9$)でも近似解として妥当な変形を得ることができた。また、Reduce化手法での基底ベクトル(図2)とブロック対角化による基底ベクトル(図4)を比較するとほぼ対応するモードが確認できる。ブロック対角化での基底ベクトルは、それぞれ鉛直方向に同じ位置に存在する六角形上または12角形上のどれか1つのパターン上の点が、水平方向または鉛直方向にだけ移動したモードである。そして、Reduce化手法における基底ベクトルは、これらブロック対角化による基底ベクトルの線形結合となっている。

3Dトラスは有限変位理論の例題としては、解析しやすい平易な問題であるが、この簡単な例題でも、平衡路の変形の記述には、実際にはわずかのモードのみが関与してくることが確認できた。

6. 2 線荷重を受ける Open Spherical Shell

つぎの例題として図6にあるような、上部に開口部分(自由端)をもつ球面シェルを考える。支持端は回転自由とする。総自由度は $N=1224$ である。荷重条件として開口部端に沿って線荷重が作用する。



Young's Modulus = $2.1\text{E}+7\text{N/cm}^2$
Poisson Ratio $\nu = 0.3$
Thickness = 0.04cm

$R = 300\text{cm}$
 $\phi = 18^\circ$

図-6 開口部のある球面シェル

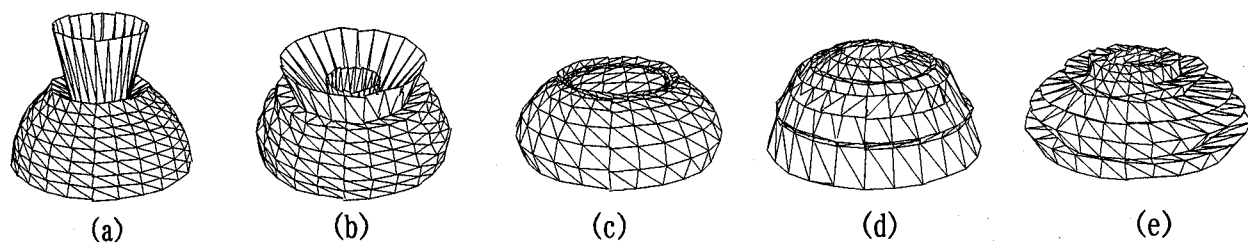


図-7 基底ベクトルとして採用した固有ベクトルの例

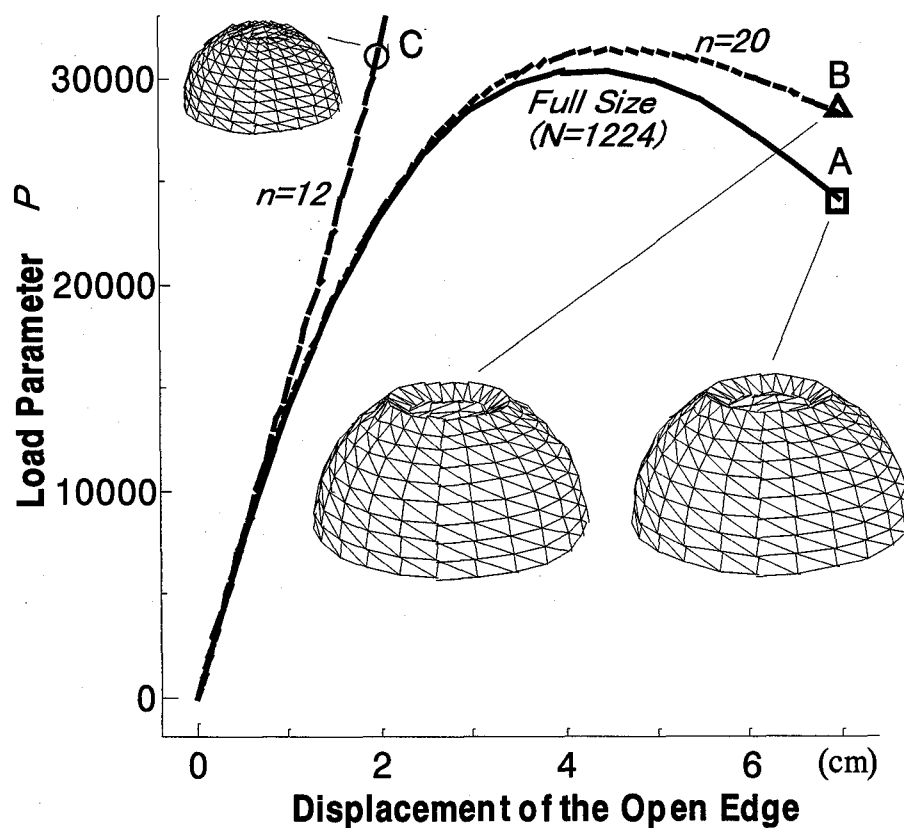


図-8 開口部のある球面シェルの平衡路

図7には選別した代表的な基底ベクトルのモードのいくつかを図化した。ここで、固有ベクトルと荷重ベクトルの直交性の判別は、各々正規化したベクトルの内積を計算し、 $1.0E-3$ 以下のとき直交していると判断した。図8は基底ベクトルの本数を変えたとき($n=12, 20$)、フルサイズ($N=1224$)で計算した主経路をどこまで追跡できるかを示している。 $n=12$ のとき、主経路の線型領域までしか追跡できなくなるが、 $n=20$ では荷重極大点付近まで十分な精度で解析できることがわかる。これ以上の精度を目指す場合は、より多くの基底ベクトルを原点で取り込むことも可能であるが、それよりは同じ本数の基底ベクトルを途中で更新の方が実用的である。

7. 結論

構造分岐問題における REDUCTION 法を提案したが、その特徴はつぎのようである。

群対称性を有する構造系の平衡路に沿う変形の記述にはある特定のモードのみが必要とされるという群論的分岐理論ではすでによく知られた事実をヒントに、計算分岐理論における REDUCTION 法を考案した。原点における剛性行列の固有ベクトルを基底ベクトルとして採用しており、一度この基底ベクトルを計算すれば、その後は通常更新する必要がない(精度向上を目指す場合には更新も可)。採用すべき固有ベクトルの選別条件に、固有ベクトルと荷重ベクトル(および不平衡力ベクトル)との

間の直交条件を用いた。

群論的分岐理論で剛性行列のブロック対角化後の剛性ブロックは厳密であるが（離散モデルについて），ここで提案する REDUCTION 法の縮小剛性行列は近似値である。群対称性を有する分岐問題の例題では，最大でも本来の自由度の数の数パーセントのレベルにまで自由度の数を格段に縮小できることを示した。

平衡路に沿う変形の記述には，ある特定の固有ベクトルのみが関与することを計算分岐理論のなかでも実証し，基底ベクトルの明確な選別条件を示したのが本論文の特徴である。今後より多自由度の問題に，この REDUCTION 法を適用するとき，固有ベクトルの誤差のため，直交性の判断が明確でなくなる可能性が考えられる。また将来課題として，剛性行列の固有ベクトル計算のなかで，荷重ベクトルと直交しない固有ベクトルの高速選別があげられる。

追記：本研究は第一著者（浅井光輝）の学部卒業研究（当時 岐阜大学）を，東北大学大学院進学後にまとめたものである。

参考文献

- 1) Noor, A.K.: Recent Advances in Reduction Methods for Nonlinear Problems, *Computers & Structures*, 7(1977), 615-626
- 2) Noor, A.K. and Peters, J.M: Reduced Basis Technique for Nonlinear Analysis of Structures, *AIAA J.*, (1980), 455-462
- 3) Tao, D.: Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Elementen Berechnungen, Bericht Nr. 9(1989), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, BRD, 1989
- 4) Ikeda, K., and Murota, K.: Bifurcation Analysis of Symmetric Structures Using Block-Diagonalization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.86, pp.215-243, 1991.
- 5) Murota, K. and Ikeda, K. : Computational Use of Group Theory in Bifurcation Analysis of Symmetric Structures, *SIAM. J. of Sci. & Statistical Computing*, Vol.12, pp.273-297, 1991.
- 6) Fujii, F. and Okazawa, S. : Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.123, pp.179-189, 1997.
- 7) Fujii, F. and Ramm, E. : Computational Bifurcation Theory - Path-Tracing, Pinpointing and Path-Switching, *Engrg. Struc.*, Vol.19, pp.385-392, 1997.
- 8) 藤井文夫, 池田清宏, 岡澤重信: 剛性行列のブロック対角化原理を用いた対称性に起因する多重分岐点の反復精算法, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 321-332, 1997.
- 9) Fujii, F., Ikeda, K., Noguchi, H. and Okazawa, S.: Modified Stiffness Iteration to Pinpoint Multiple Bifurcation Points, (submitted to "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering" for publication)
- 10) Fujii, F., Ikeda, K. and Okazawa, S. : Modified Stiffness Iteration to Compute the Multiple Bifurcation Point, *Proceedings of the International Colloquium on Computational of Shell and Spatial Structures*, pp.320-325, Taipei, Taiwan, 1997.
- 11) 藤井文夫, 岡澤重信: 剛性行列の固有ベクトルの数値的特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 299-310, 1997.

(1998年9月18日受付)