

座屈時の変形モードを初期不整として用いた薄肉断面部材の耐荷力解析

Ultimate Analysis of Thin-Walled Members with Initial Imperfections of Buckling Modes

大賀水田生*, 高上顕**, 崎濱忍***

Mitao Ohga, Akira Takaue and Shinobu Sakihama

*正会員 工博 愛媛大学助教授 工学部環境建設工学科 (〒790-8577 松山市文京町3)

** (株)長大 高松支店 (〒760 高松市番長3-3-17)

***学生会員 愛媛大学理工学研究科前期課程 土木海洋工学専攻 (〒790-8577 松山市文京町3)

Initial imperfection of buckling modes are applied to the ultimate analysis of the thin-walled members under axial loads, by the finite element method based on incremental load procedure. The buckling modes of the thin-walled members in this paper are obtained by the transfer matrix method. The numerical results for the U-, box- and I-section members under axial loads obtained with this initial imperfections are compared with the results obtained using the trigonometric initial imperfections, and the accuracy and effectiveness of the initial imperfections proposed in this paper are examined.

Key Words: thin-walled member, initial imperfection, stability analysis, finite element method, transfer matrix method

1. はじめに

軸方向圧縮力を受ける薄肉断面部材の耐荷力解析は、一般に荷重増分法に基づく有限要素法(FEM)により行われており、種々の要素や非線形解析法に基づく汎用プログラムが開発されている^{1)~3)}。この薄肉断面部材のFEM耐荷力解析に導入される初期不整の形状は、その大きさとともに部材の耐荷力および変形性状に大きな影響を及ぼすことが知られている。したがって、薄肉断面部材のFEM耐荷力解析に、いかなる初期不整を導入するかは、部材のより正確な耐荷力および変形性状を推察する上で極めて重要であると考えられる。

そこで本研究では、伝達マトリックス法(TMM)⁴⁾を用いて得られる薄肉断面部材の座屈時の変形モードをFEM耐荷力解析での初期不整として用いることを提案する。まず、TMMを用いて薄肉断面部材の座屈強度および座屈時の変形モードを求める方法を述べるとともに、本法を用いてU型、箱型およびI型断面部材の座屈強度および座屈時の変形モードを求め、得られたこれらの結果についての考察を行う。さらに、座屈時の変形モードを初期不整として導入して軸方向圧縮力を受けるU型、箱型およびI型断面部材のFEM耐荷力解析を行い、得られた耐荷力および非線形挙動を作成が容易な三角関数による初期不整を用いて得られた解と比較・検討することなどにより、座屈時の変形モードをFEM耐荷力解析での初期不整として用いることの妥当

性および有効性について検討する。

伝達マトリックス法は、薄肉断面部材を構成する板パネルに対する支配方程式より誘導される格間伝達マトリックスを掛け合わせるにより解析を行う方法であり、FEMなどの他の解析法に比較して著しく少ない変数で高精度の解を得ることが可能な効率的な方法である。本解析法は本質的には次元問題に対する解析法であるが、1方向に三角関数を導入することにより、板パネルなどの2次元問題に^{5)~8)}、さらに薄肉断面部材を構成する板パネル間の状態量を関係づける格点マトリックスを導入することにより薄肉断面部材に拡張されている^{9),10)}。

2. 伝達マトリックス法による薄肉断面部材の座屈解析^{9),10)}

2.1 格間伝達マトリックス

図-1に示す板パネルの微小要素に関する断面力の釣合方程式、ひずみ-変位関係式および断面力-ひずみ関係式より状態量 $Z = \{w, \phi_y, M_y, V_y, v, u, N_y, N_{yx}\}^T$ に関する連立偏微分方程式を誘導し、相対する2辺($x=0, a$: 図-1)が単純支持されていることを考慮して x 方向成分を三角関数で表現することにより、次のような一階の連立常微分方程式が得られる。

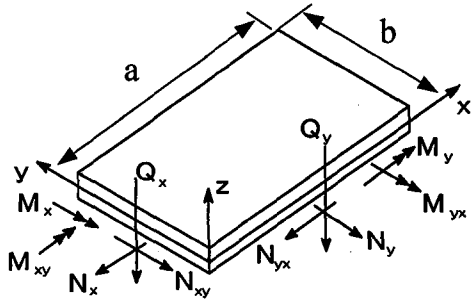


図-1 板パネルの断面力

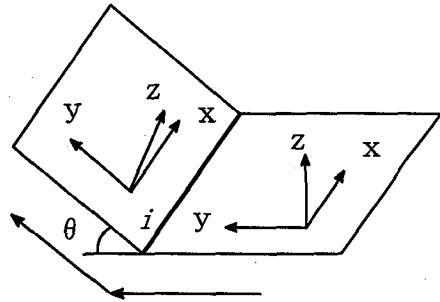
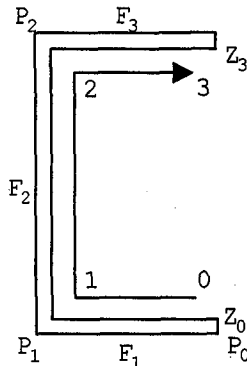
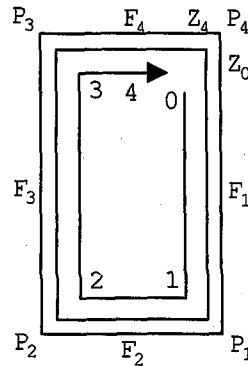


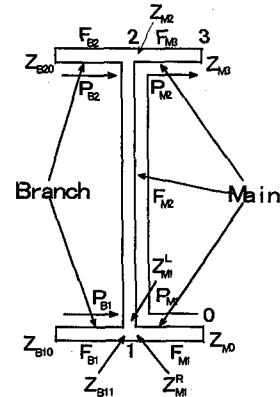
図-2 接合線*i*での状態量の関係



(a) U型



(b) 箱型



(c) I型

図-3 薄肉断面部材での状態量の伝達

$$\frac{d}{dy} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}' = \mathbf{A}(y) \mathbf{Z} \quad (1)$$

上記の常微分方程式(1)を数値積分することにより格間伝達マトリックス $\mathbf{F}$ が得られる⁹⁾。

$$\mathbf{Z} = \exp(\mathbf{A}y) \mathbf{Z}_0 = \mathbf{F} \mathbf{Z}_0 \quad (2)$$

2.2 座標変換マトリックス

図-2 に示すように、薄肉断面部材の各板パネルでの状態量は局所座標系に依存しており、隣接する板パネル間で状態量を伝達させるためには、隣接する板パネルの接合線上での状態量を関係づける必要がある。本研究では接合線上での状態量を関係づける座標変換マトリックス $\mathbf{P}_i$ を用いて、隣接する板パネル間の状態量を関係づけている⁹⁾。

$$\mathbf{Z}_i^L = \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i^R \quad (3)$$

ここに、上添字の L および R は接合線 i の左右の状態量を示す。

2.3 座屈方程式

(1) U型断面部材

前述の格間伝達および座標変換マトリックス $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ をU型断面部材(図-3(a))に適用し、初期状態量 $\mathbf{Z}_0$ を他端まで伝達することにより、部材断面両端の状態量 $\mathbf{Z}_0$ および $\mathbf{Z}_3$ 、

間の関係式が次のように得られる。

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{F}_3 \mathbf{P}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{Z}_0 = \mathbf{U} \mathbf{Z}_0 \quad (4)$$

ここで両端の境界条件を考慮することにより、座屈条件式が次のように得られる。

$$\mathbf{U}' \mathbf{Z}_0' = 0 \quad (5)$$

(2) 箱型断面部材

図-3(b)を参考にして、状態量 $\mathbf{Z}_0$ および $\mathbf{Z}_4$ 間の関係式が次のように得られる。

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{P}_4 \mathbf{Z}_4 = \mathbf{P}_4 \mathbf{F}_4 \mathbf{P}_3 \mathbf{F}_3 \mathbf{P}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{Z}_0 = \mathbf{U} \mathbf{Z}_0 \quad (6)$$

式(6)より、箱型断面部材に対する座屈条件式が次のように得られる。

$$[\mathbf{U} - \mathbf{I}] \mathbf{Z}_0 = 0, \quad \mathbf{I}: \text{単位マトリックス} \quad (7)$$

(3) I型断面部材

図-3(c)に示すように、部材を構成する板パネルを主板(Main)および分岐パネル(Branch)に分割し、主板パネルと分岐パネルの接合線1および2での変位の連続条件および断面力の釣合条件より、I型断面部材の最終状態量 $\mathbf{Z}_{M3}$ と主板および分岐パネルの初期状態量 $\mathbf{Z}_{M0}$, $\mathbf{Z}_{B10}$ および $\mathbf{Z}_{B20}$

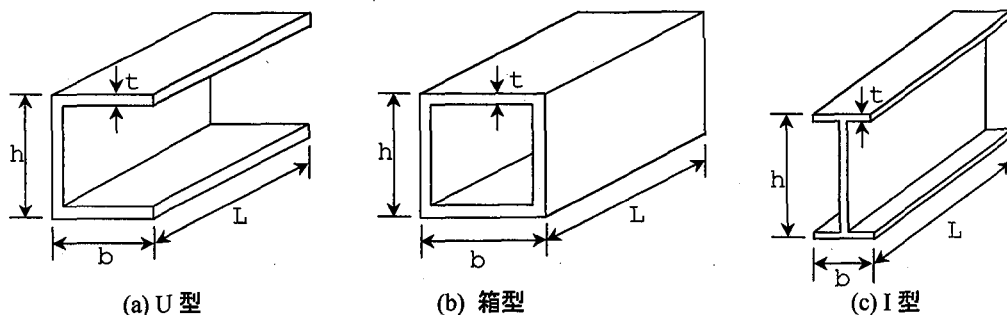


図-4 薄肉断面部材

との関係式が次のように得られる¹⁰⁾.

$$\begin{bmatrix} Z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^L_{M3} = \begin{bmatrix} F_{M3}P_{M2}F_{M2}P_{M1}F_{M1} & F_{M3}P_{M2}F_{M2}P_{B1}F_{B2} \\ [P_{M1}F_{M1}]^\delta & [P_{M1}F_{B1}]^\delta \\ [P_{M2}F_{M2}P_{M1}F_{M1}]^\delta & [P_{M2}F_{M2}P_{B1}F_{B1}]^\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{M1} \\ Z_{B1} \\ Z_{B2} \end{bmatrix}_0 \quad (8)$$

ここに、上添字 δ , F は状態量ベクトルの変位および断面力成分であることを示している。

さらに、求めた座屈荷重を用いて格間伝達マトリックスを作成し、再び伝達操作を行うことにより、座屈荷重に対応する変形モードが決定される。

したがって、本解析法では相対する2辺の境界条件などいくつかの制限があるものの、パネル数、部材長に関係なく、極めて少ない変数(8個)で部材の座屈強度および座屈時の変形モードを精度よく求めることができる。

3. FEM耐荷力解析

伝達マトリックス法により求めた座屈時の変形モードを初期不整として導入し、一様な面内圧縮力を受けるU型、箱およびI型断面部材の荷重増分法に基づくFEM耐荷力解析を行い、三角関数による初期不整を用いて得られる解と比較することなどにより、提案した初期不整の妥当性および有効性について検討した。本研究では、9節点を有するアイソパラメトリック退化シェル要素を用いており、解析では幾何学的および材料的非線形性を考慮している。材料は von Mises の降伏条件に従うものとするとともに、Prandtl-Reuss の応力-ひずみ関係式を採用している。非線形計算は荷重増分法を用いているが、各荷重増分段階における載荷法として部材端部に等分布荷重を直接作用させる方法(荷重載荷法)、および部材端部に一定の変位を仮定する方法(強制変位法)を用いている。なお初期不整の最大振幅は、いずれのモデルにおいても $w_0=0.01t$ (t : パネル厚)

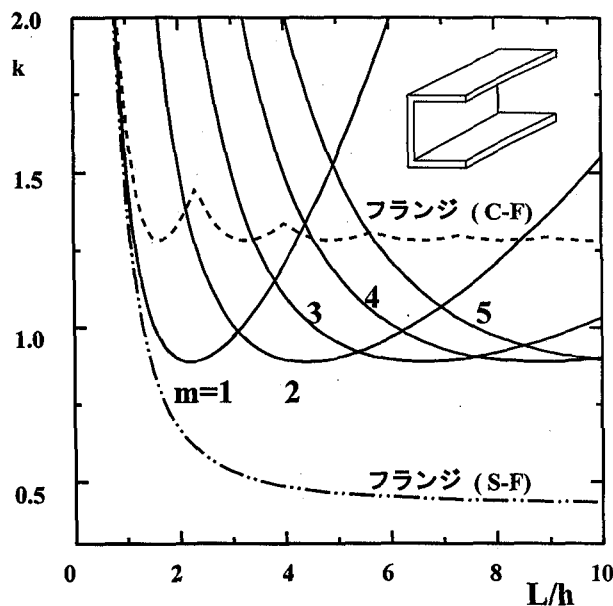


図-5 座屈係数曲線(U型)

とした。

4. 解析結果

4. 1 U型断面部材での検討

図-5にU型断面部材(図-4(a):板幅比: $h/b=1.0$, 板厚比: $h/t=100$, 部材長比: $L/h=0.5 \sim 10.0$, $\sigma_y=117.6\text{Mpa}$)での座屈係数 k ($=th^2/\pi^2 D \cdot \sigma$, D : 板パネルの曲げ剛性)と部材長比 L/h の関係を示している。図-5には、フランジの境界を単純-自由(S-F)および固定-自由(C-F)とした場合の結果も同時に示している。図-5に示すU型断面部材の座屈係数は、この2種類の境界条件に対して得られたフランジの座屈係数の中間的な値を示しており、上下フランジが部材の座屈強度に支配的であると考えられる。

図-6に部材長比 $L/h=4.0$ のU型断面部材に座屈時の変形モードおよび三角関数による初期不整(図-6)を与えた場合のFEM耐荷力解析により得られた平均応力度 σ/σ_y と初期不整の最大となる点D(図-6)における面外変位 w の関係を示すとともに、TMMにより得られた座屈荷重および

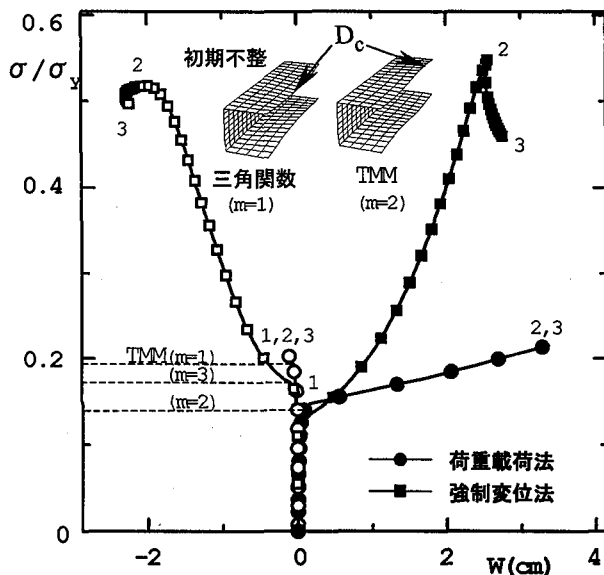


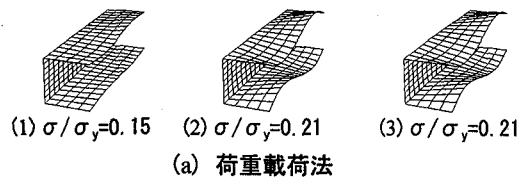
図-6 荷重-変位曲線(U型, $L/h=4$)

座屈モードをも同時に示している。また図-7, 8に座屈時の変形モードおよび三角関数による初期不整を与えた場合の座屈発生付近(図-6: 点1), 最大耐荷力付近(図-6: 点2), および解析終了時(図-6: 点3)における変形図を示している。なお、耐荷力解析では、部材を断面方向および長さ方向にそれぞれ8個のアイソパラメトリック要素に分割した。フランジおよびウェブの三角関数による初期不整の振幅 w_{of} , w_{ow} はそれぞれ $w_{of}=0.01t$, $w_{ow}=0.2w_{of}$ とした(図-6)。

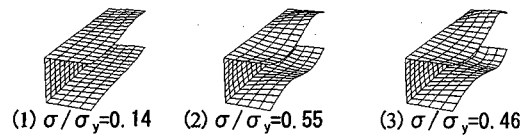
図-6 より明らかなように、座屈時の変形モードを与えた場合(塗潰し)、いずれの載荷法においても TMM による最小座屈荷重($\sigma_k/\sigma_y=0.142$, $m=2$)付近で面外変形が急激に大きくなる座屈現象が認められる。その後、強制変位法では面外変形の増加に伴い幾何学的非線形が生じ、TMM による座屈荷重の約 3.8 倍の耐荷力が得られているのに対し、荷重載荷法では面外変位が急激に増大しており、耐荷力の増大はそれほど認められない。また、図-7 に示す変形図も、いずれの載荷法および荷重段階においても初期不整とよく似た形状($m=2$)を維持している。

三角関数による初期不整を与えた場合(白抜き), 荷重載荷法では初期不整と同一モード ($m=1$) に対する TMM による座屈荷重付近($\sigma_k/\sigma_y=0.191$)で面外変形が増大する傾向を示し、その直後解が発散している。図-8(a)に示す変形形状は初期不整と同一モード ($m=1$) を保っているが、初期不整と異なり部材中央部でのフランジの変形が端部に比較して大きくなっている。一方、強制変位法では $m=3$ に対する TMM による座屈荷重付近($\sigma_k/\sigma_y=0.174$)で座屈現象を生じ、その後は座屈時の変形モードを与えた場合とよく似た挙動を示しており(図-6)、変形状も初期不整モード $m=1$ から $m=3$ に移行している(図-8(b))。

図-9 に部材長比 $L/h=8.0$ での平均応力度 σ/σ_y と点 D(図-9)における面外変位 w の関係を示している。また図-10, 11 に座屈時の変形モードおよび三角関数による初期不整を

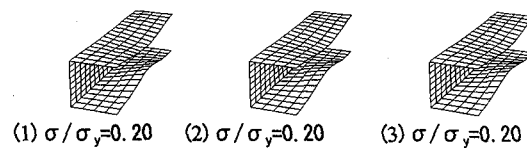


(a) 荷重載荷法

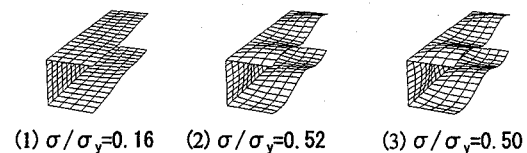


(b) 強制変位法

図-7 変形状 ($L/h=4$; TMM)



(a) 荷重載荷法



(b) 強制変位法

図-8 変形状 ($L/h=4$; 三角関数)

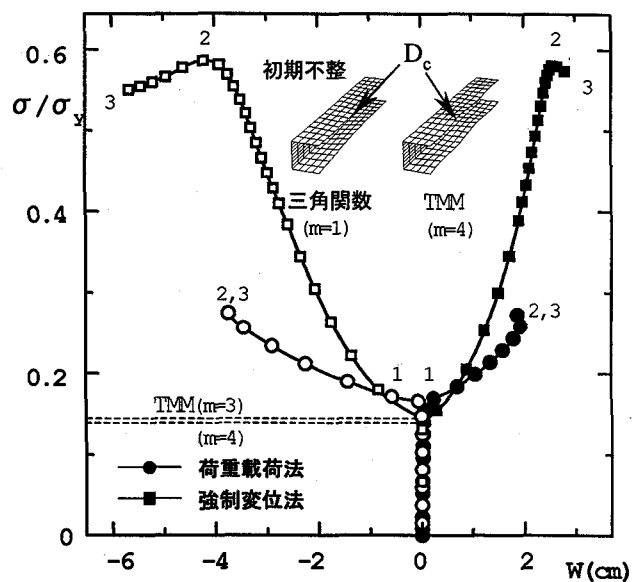


図-9 荷重-変位曲線(U型, $L/h=8$)

与えた場合の変形状を示している。

図-9 より明らかなように、座屈時の変形モードを与えた場合(塗潰し)、 $L/h=4.0$ の場合と同様な荷重-変位曲線が得られており、いずれの載荷法においても座屈荷重($\sigma_k/\sigma_y=0.142$, $m=4$)付近で座屈現象が生じている。また、図-10 に示す変形図も、いずれの載荷法および荷重段階においても初期不整とよく似た形状 ($m=4$) を維持している。

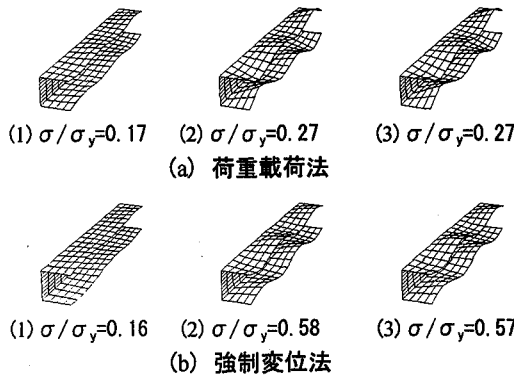


図-10 変形形状 ($L/h=8$; TMM)

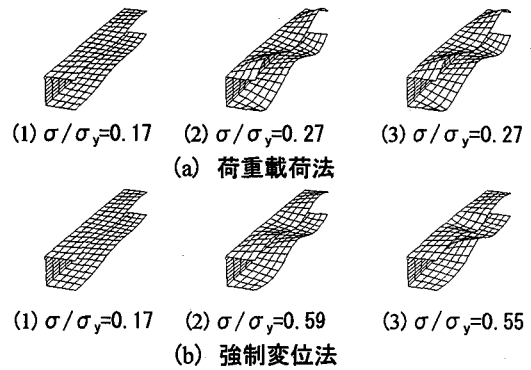


図-11 変形形状 ($L/h=8$; 三角関数)

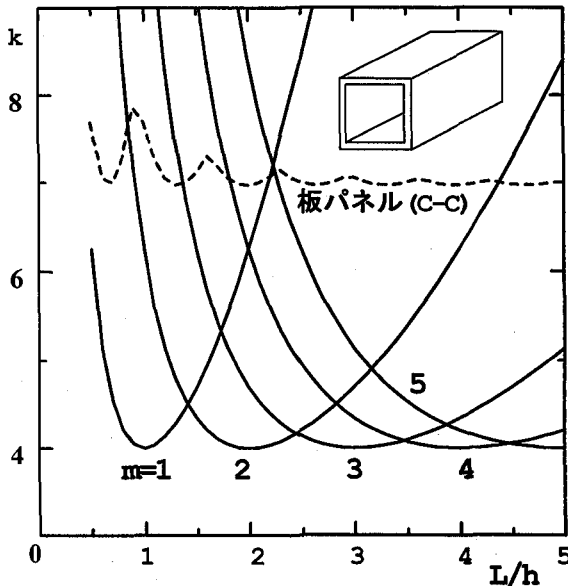


図-12 座屈係数曲線 (箱型)

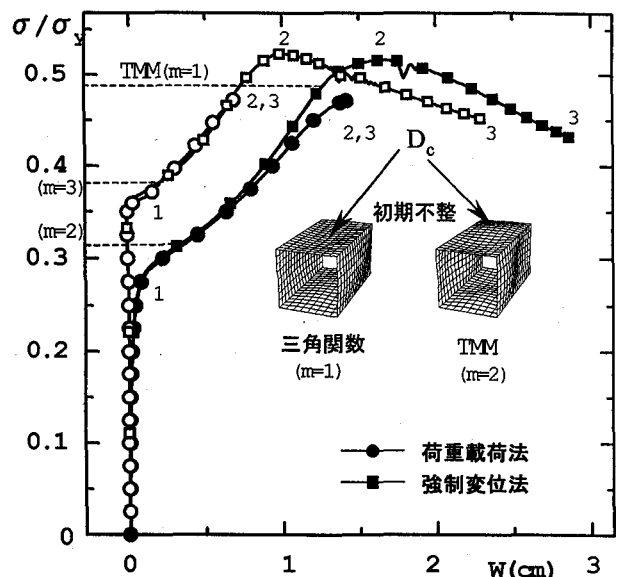


図-13 荷重変位曲線 (箱型, $L/h=2$)

一方、三角関数による初期不整を与えた場合(白抜き); いずれの荷重法においても初期不整モード $m=1$ から $m=3$ の変形に移行しており(図-11), 図-9 に示す荷重-変位曲線も $m=3$ に対する座屈荷重付近($\sigma_x/\sigma_y=0.145$)で面外変形が大きくなる座屈現象を生じている。

4. 2 箱型断面部材での検討

図-12 に箱型断面部材(図-4(b); 板幅比: $h/b=1.0$, 板厚比: $h/t=100$, 部材長比: $L/h=0.5 \sim 5.0$, $\sigma_y=235.2\text{Mpa}$)での TMM による座屈係数 k と部材長比 L/h の関係を示しているが、この場合の座屈係数は 4 辺単純支持板に対する結果と全く一致している。なお図-12 には参考のため、箱型断面部材を構成するパネル間の接合条件を固定(C-C)とした場合の板パネルの座屈係数も同時に示している。なお、耐荷力解析では部材および荷重の対象性を考慮して部材全体の 1/2 部分を解析対象とし、解析対象を U 型断面部材と同一要素分割モデルとした。

図-13 に部材長比 $L/h=2.0$ の箱型断面部材に座屈時の変形モードおよび三角関数による初期不整を与えた場合の FEM 耐荷力解析により得られた平均応力度 σ/σ_y と初期

不整の最大となる点 D(図-13)における面外変位 w の関係を示している。また、図-14, 15 に座屈時の変形モードおよび三角関数による初期不整を与えた場合の座屈発生付近(図-13: 点 1), 最大耐荷力付近(図-13: 点 2)および解析終了時(図-13: 点 3)における変形図を示している。

図-13 より明らかなように座屈時の変形モード(図-13)を与えた場合(塗潰し), いずれの荷重法においても TMM による最小座屈荷重($\sigma_x/\sigma_y=0.316$, $m=2$)付近で面外変形が急激に大きくなる座屈現象が認められ、荷重荷重法では最大耐荷力付近まで、強制変位法では最大耐荷力以降も解が得られている。また、図-14 に示す変形図もいずれの荷重段階においても初期不整とよく似た形状($m=2$)を維持している。

三角関数による初期不整(図-13)を与えた場合(白抜き), 図-15 に示すようにいずれの荷重法での変形形状とも初期不整モード $m=1$ から $m=3$ に移行している。図-13 に示す荷重-変位曲線においても、TMM による $m=3$ に対する座屈荷重($\sigma_x/\sigma_y=0.371$) 付近で座屈現象が生じており、その後は座屈時の変形モードを与えた場合とよく似た挙動を示しているが、最大耐荷力は座屈時の変形モードを与えた

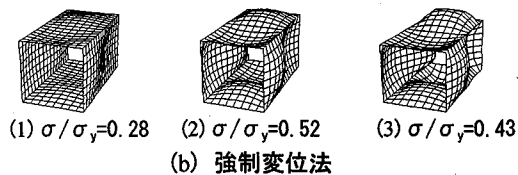
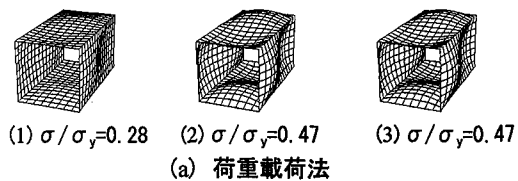


図-14 変形状 (L/h=2; TMM)

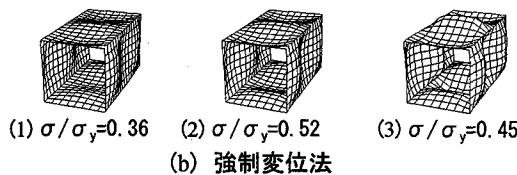
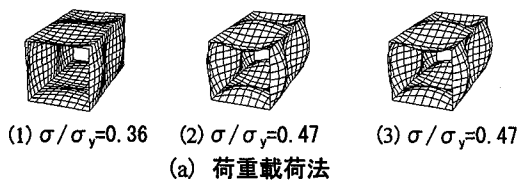


図-15 変形状 (L/h=2; 三角関数)

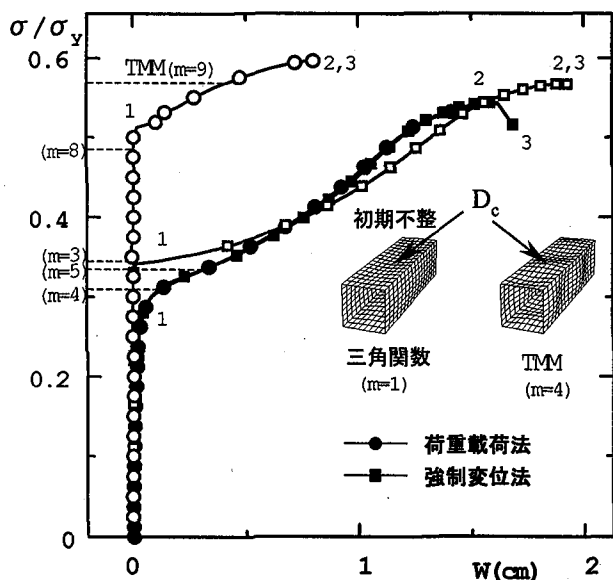


図-16 荷重-変位曲線 (箱型, L/h=4)

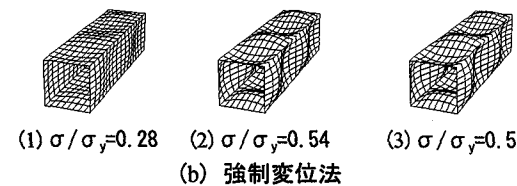
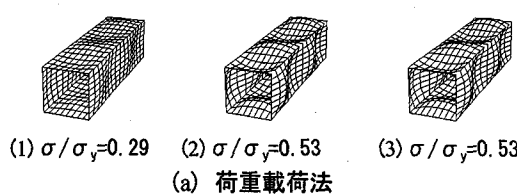


図-17 変形状 (L/h=4; TMM)

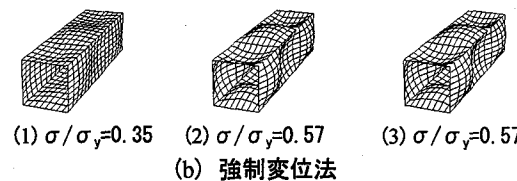
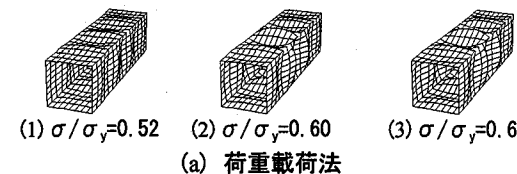


図-18 変形状 (L/h=4; 三角関数)

場合に比較して若干大きくなっている。

図-16に部材長比L/h=4.0での平均応力度 σ/σ_y と点D(図-16)における面外変位 w の関係を示している。また図-17, 18に座屈時の変形モードおよび三角関数による初期不整を与えた場合の変形状を示している。

図-16 より明らかなように座屈時の変形モードを与えた場合(塗潰し), L/h=2.0の場合と同様, いずれの載荷法においても最小座屈荷重($\sigma_k/\sigma_y=0.316$, $m=4$)付近で座屈現象が生じ, 変形状も初期不整とよく似た形状($m=4$)を維持している(図-17)。

三角関数による初期不整(図-16)を与えた場合(白抜き), 荷重載荷法では $\sigma/\sigma_k=0.5$ 付近で面外変形が大きくなり $\sigma/\sigma_k=0.596$ で解が発散している(図-16)。また, 図-18に示す変形図も初期不整モード $m=1$ から $m=7$ に移行している。一方, 強制変位法ではTMMによる $m=3$ に対する座屈荷重付近($\sigma_k/\sigma_y=0.343$)で座屈現象を生じ, その後は座屈時の変形モードを与えた場合とよく似た挙動を示している。

4. 3 I型断面部材での検討

図-19にI型断面部材(図-4(c):板幅比:h/b=4.0, 板厚比:

$h/t=100$, 部材長比:L/h=0.5~5.0, $\sigma_y=235.2\text{Mpa}$)に対するTMMにより得られた座屈係数 k と部材長比L/hの関係を示している。図-19にはウェブの上下境界を単純支持(S-S)および固定(C-C)とした場合の結果も同時に示している。図-19より明らかなように, I型断面部材の座屈係数は, ウェブの上下の境界を単純支持とした場合の座屈係数に比較して約20%大きくなっているが, 両座屈係数曲線はよく似た傾向を示しており, ウェブ上下の境界条件は単純支持に近いものと考えられる。

図-20にFEM耐荷力解析により得られた部材長比L/h=2.0のI型断面部材での平均応力度 σ/σ_y と初期不整の最大となる点D(図-20)における面外変位 w の関係を示している。本耐荷力解析では部材を断面方向に12要素,

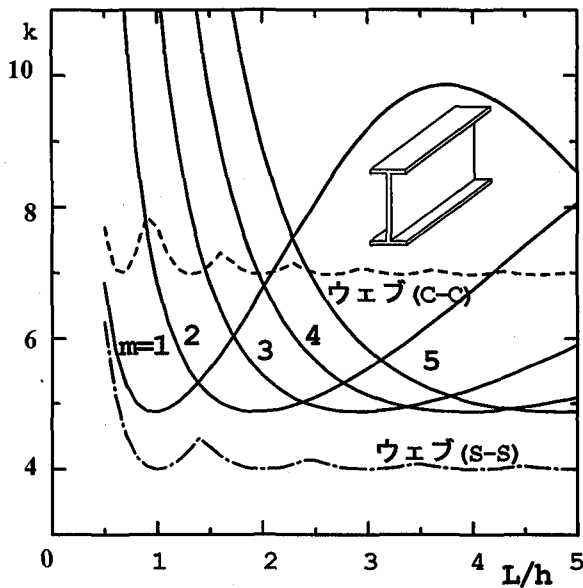


図-19 座屈係数曲線 (I型)

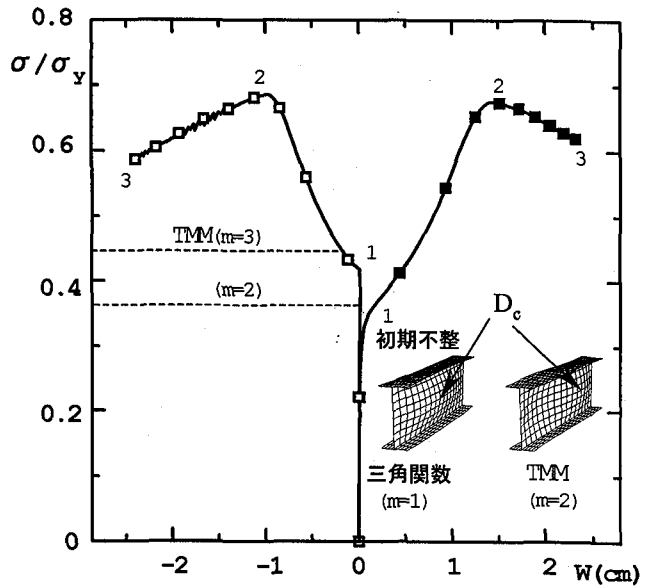


図-20 荷重-変位曲線 (I型, L/h=2)

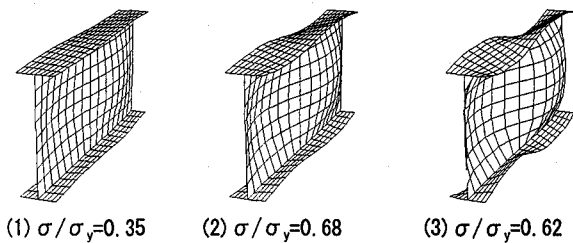


図-21 変形形状 (L/h=2; TMM)

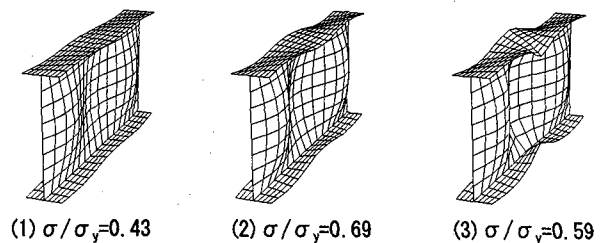


図-22 変形形状 (L/h=2; 三角関数)

長さ方向に8要素に分割した。フランジおよびウェブの三角関数による初期不整の振幅 w_{of} , w_{ow} はそれぞれ $w_{of}=0.01t$, $w_{ow}=0.2w_{of}$ とした(図-20)。なお、ここでの荷重法は耐力解析が行えない荷重荷重法を省略し、強制変位法のみとしている。

図-20 より明らかなように座屈時の変形モードを与えた場合(塗潰し), Uおよび箱型断面部材同様, TMMによる最小座屈荷重 ($\sigma_k/\sigma_y=0.385$, $m=2$) 付近で面外変形が急激に大きくなる座屈現象が認められるとともに, 図-21 に示す変形図もいずれの荷重段階においても初期不整とよく似た形状($m=2$)を維持している。

一方, 三角関数による初期不整を与えた場合(白抜き), $m=3$ に対する座屈荷重 ($\sigma_k/\sigma_y=0.438$) 付近で座屈現象が生じており, 図-22 に示す変形形状も初期不整モード $m=1$ から $m=3$ に移行している。

図-23, 24, 25 に部材長比 $L/h=4.0$ に対する結果を示している。図-23 より明らかなように座屈時の変形モードを与えた場合, $L/h=2.0$ の場合と同様な挙動を示しているが, 三角関数による初期不整を与えた場合, 面外変形はほとんど生じておらず, $\sigma/\sigma_y=1.0$ 付近で解が発散している。

5. おわりに

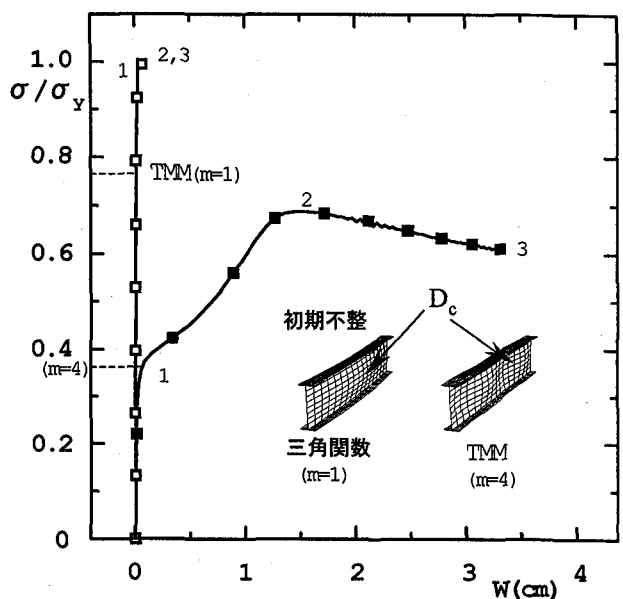


図-23 荷重-変位曲線 (I型, L/h=4)

本研究では, 薄肉断面部材のFEM 耐力解析における初期不整として, 座屈時の変形モードを導入することを提案し, この初期不整を複数の板パネルで構成される薄肉断面部材のFEM 耐力解析に適用し, 三角関数による初期不整を導入して得られた解と比較することにより, 提案した初

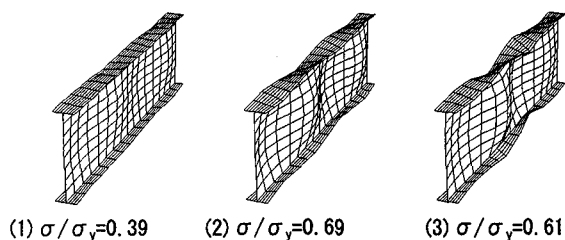


図-24 変形形状 ($L/h=4$:TMM)

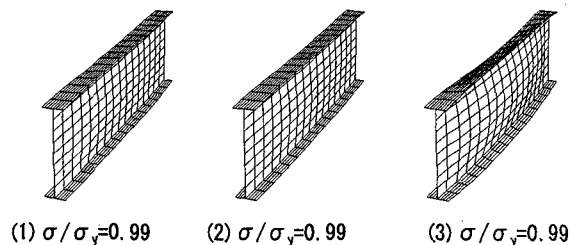


図-25 変形形状 ($L/h=4$:三角関数)

期不整の妥当性および有効性について検討した。

本研究より得られた結果は次の通りである。

- 1) 伝達マトリックス法を用いた座屈解析により求められる座屈時の変形モードをFEM耐荷力解析での初期不整として導入した場合、いずれの解析モデルおよび載荷法においても安定した解が得られるとともに、初期不整とよく似た変形形状を維持することが明らかとなった。
- 2) 三角関数による初期不整をFEM耐荷力解析に導入した場合、解析モデルによっては途中で解が発散し、安定した解が得られない場合や、初期不整と異なる変形形状を示す場合などが生じることが明らかとなった。これは、初期不整の方向が変形モードと異なるためであると考えられる。
- 3) 座屈時の変形モードを初期不整として導入した場合、いずれの解析モデルおよび載荷法においても TMM で求められる座屈荷重付近で面外変形が急激に大きくなる座屈現象が生じることが明らかとなった。
- 4) 三角関数による初期不整を与えた場合、初期不整モード ($m=1$) と異なる変形モードを示す場合があるが、その変形モードは軸方向に対称なモード ($m=1, 3, 5, \dots$) となっている。また、この場合の座屈現象は変形モードに対応する TMM により得られた座屈荷重付近で生じることが明らかとなった。

以上のように、本研究においても初期不整が薄肉断面部材の耐荷力および変形性状に大きな影響を及ぼすことが明らかになったが、今後さらに詳細に検討する必要がある。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
- 2) Hinton, E. and Owen, D.R.J. : Finite Element Software for Plates and Shells, Pineridge Press, Swansea, 1984.
- 3) Hinton, E. : Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells, Pineridge Press, Swansea, 1988.
- 4) Ohga, M., Hara, T. and Kawaguchi, K. : Buckling mode shapes of thin-walled members, Computers & Structures, 54, pp.767-773, 1995.
- 5) Uhrig, R. : Elastostatik und Elastokinetik in Matrizen-Schreibweise, Belrin, Springer-Verlag, 1973.
- 6) Shigematsu, T., Hara, T. and Ohga, M. : Untersuchung der stabilität einseitig gedruckter, langsausgesteifter, orthotroper rechteckplatten mit schubverformung, Der Stahlbau, pp.171-176, 1982.
- 7) Tesar, A. and Fillo, L. : Transfer Matrix Method, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- 8) Shigematsu, T., Ohga, M. and Hara, T. : Ermittlung der beultraglasten ausgesteifter schalen mit hilfe von ubertragungsmatrizen, Archive of Applied Mech., 62, pp.28-42, 1992.
- 9) Ohga, M., Kawaguchi, K. and Shigematsu, T. : Buckling analysis of thin-walled members with closed cross sections, Thin-Walled Structures, 22(1), pp.51-70, 1995.
- 10) Ohga, M., Shigematsu, T. and Kawaguchi, K. : Buckling analysis of thin-walled members with variable thickness, J. Struct. Engrg., ASCE, 121(6), pp.919-924, 1995.

(1998 年 9 月 18 日受付)