

鋼構造物の有限要素法解析における 残留応力と初期たわみの導入方法について

A method of introducing residual stresses and initial deflections in FEM analysis for steel structures

川西直樹^{*}, 後藤芳顕^{**}
Naoki KAWANISHI, Yoshiaki GOTO

^{*}工修 豊田工業高等専門学校助手 環境都市工学科 (〒471-8525 愛知県豊田市栄生町2-1)

^{**}工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

To assess the ultimate behavior of steel structures, it is important to consider the effect of initial imperfections such as residual stresses and initial deflections. In the usual FEM analysis, residual stresses are introduced by initial stresses, whilst initial deflections are considered in the initial nodal coordinates of structures as a deviation from the geometrically perfect configuration. However, the structures with the initial stresses and initial deflections so introduced are normally in an inequilibrium state. Therefore, structures in an equilibrium state obtained as a result of structural analysis exhibit initial imperfections that are considerably different from the target imperfections. This difference may have an effect on the ultimate behavior of steel structures. Herein, we present an exact method of introducing initial imperfections by using a kind of inverse analysis method.

Key Words : residual stress, initial deflection, finite element method, inverse analysis method, stability

1. まえがき

巨大地震時における損傷を考慮した鋼構造物の耐震設計法の導入以来、その終局挙動の解析の重要性が高まっている。このような終局挙動の解析も有限要素法の各種非線形汎用コードの開発と計算機能力の大幅な向上により比較的容易にできるような環境が整いつつある¹⁾。

鋼構造物には、鋼材の製造、部材の製作および現場架設などの各段階において避けることのできない不完全因子が存在する。一般に不完全因子は初期たわみなどの幾何学的初期不整と残留応力などの材料学的初期不整に分類される。これらが鋼構造物に存在すると、その終局挙動に何らかの悪影響を及ぼすことは周知の事実である²⁾。よって、構造物の終局挙動の評価に有限要素法を利用する場合、残留応力と初期たわみの両者を正確に取り扱うことは重要である。

汎用プログラムを用い、残留応力と初期たわみを同時に存在する構造物の終局挙動を解析した例は、これまでに多数報告されている。しかし、この中の解析の多くは、残留応力と初期たわみをそれぞれ完全に独立なものとして捉え、残留応力は初期応力によって導入し、初期たわみは完全系からのずれとして初期節点座標に考慮するこ

とにより導入されている(以下、本論文ではこのような導入方法を「従来型導入法」と略称する)。この導入法は、棒要素のように初期応力による等価節点力が断面の積分を行った段階で自己つり合いの条件から自動的に消去される場合には何の問題も生じない。しかし、シェルなどの一般の要素を使用する問題では適用できない。なぜなら、これらの要素では初期応力に関する等価節点力を各要素間同士で組み合わせた後において不つり合い力が発生し、これにより変形増分が生じ、初期状態として導入目標とした残留応力と初期たわみを再現できなくなるからである。

これまでの一般的な考えでは、「残留応力は自己平衡系であり、これを考慮して初期応力を導入すれば不つり合い力は生じない」という理由¹⁾からこの点に関する問題は軽視されてきた。しかし、このとき導入される初期応力は、構造系全体でこれを集合した断面力のつり合い条件が満足されるのみであり、構造の部分的なつり合い条件(有限要素法では要素間同士のつり合い条件)までもを確実に満足するものではない。このことが初期応力導入時の不つり合い力の生じる大きな要因であるといえる。また、理論上仮に構造の部分的なつり合い条件を満足する初期応力が分かったとしても、これを有限要素法に導

入する際、初期応力を近似的な変位関数により等価節点力に変換する過程における数値計算と理論計算上との誤差に起因した不釣り合い力が生じる。文献 3,4)では、初期応力による不釣り合い力の生じる原因について、「曲面板を平面三角形要素に近似したための誤差による」としているが、この記述は必ずしも正しくはない。基本的には上述の二つの理由によるものと考えられる。

このように不可避免的に発生する初期応力導入直後の不釣り合い力の存在を認識した上で初期不整の有限要素解析への導入方法を論じた研究は数少ない。文献 13)では初期応力として残留応力を導入時、初期たわみに生じる誤差の修正方法については述べられているが、同時に生ずる残留応力の誤差の修正方法に関する記述が全くなされておらず、不十分なものである。一方、小松ら^{3,4)}が提唱した「仮想外力による方法」は先駆的な研究として評価される。この手法では、解析対象に初期応力を導入した瞬間の不釣り合い力を算定しておき、これに対応した逆向きの力（仮想外力）を載荷することで、目標とした残留応力と初期たわみの釣り合い状態を強制的に作り出すものである。この考え方自体は正しいが、文献 3,4)の中で示されている幾何学非線形問題における扱いにおいて、やや問題がある。すなわち、幾何学非線形解析は剛体変位除去の手法によっているが、剛体変位除去の手法から得られる接線剛性マトリックスの中に、要素移動座標の剛体回転増分から得られる仮想外力ならびに残留応力を含む初期応力マトリックスの項¹²⁾が欠落している。このため、変位が比較的小さい場合には問題は生じないが、変位が大きくなるとこの影響が現れると考えられる。仮想外力の方法については、本文で別途考察を行う。

「仮想外力による方法」では「仮想外力」を算定するのが重要になる。このためには、有限要素に用いられた変位関数ならびに離散化過程での数値積分法などを知る必要がある。しかしながら、内部が black box 化された汎用構造解析ソフトを利用する場合、変位関数や数値積分法を一般には知ることはできないので、この手法の適用は難しいと考えられる。

本研究では、まず構造物に残留応力と初期たわみが同時に存在する場合の基礎式を誘導することで初期不整の導入法について考察する。この中で、「仮想外力による方法」についても考察する。さらに、「仮想外力による方法」の適用が難しい既存の汎用構造解析ソフトの利用を念頭においた残留応力と初期たわみの正確な導入法（以下、「逆解析的導入法」と略称する。）を提示する。最後に単純支持板と連続補剛板を対象とした数値計算例を示し、初期不整の導入方法の違いが解析結果に及ぼす影響を検討する。なお、ここでは、残留応力に起因したひずみは全て弾性ひずみ成分のみであり、これによる塑性化は生じないことを前提とする。

表－１ 段階毎における応力、変位および外力の標記

ステップ*	応力	変位	物体力 表面力
Q_0	$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^R$	$u_i^{(0)} = u_i^G$	0 0
Q_n	$\sigma_{ij}^{(n)}$	$u_i^{(n)}$	$P_i^{(n)}$ $T_i^{(n)}$
Q_{n+1}	$\sigma_{ij}^{(n)} + \Delta\sigma_{ij}^{(n+1)}$	$u_i^{(n)} + \Delta u_i^{(n+1)}$	$P_i^{(n)} + \Delta P_i^{(n+1)}$ $T_i^{(n)} + \Delta T_i^{(n+1)}$
備考	σ_{ij}^R : 残留応力, u_i^G : 初期たわみ $\Delta\sigma_{ij}^{(k+1)}$: Q_k から Q_{k+1} へ移行する時の応力増分 $\Delta u_i^{(k+1)}$: Q_k から Q_{k+1} へ移行する時の変位増分		

２．残留応力と初期たわみの導入方法

本論文では、切断法等により実測される内部応力を残留応力と称し、規定形状からのずれ変位を初期たわみと称する。当然ながら、この状態において内部応力は自己釣り合いの条件を満足している。

初期不整のある鋼構造物を幾何学的非線形性と材料学的非線形性を考慮した複合非線形解析により解析するときの解析ステップを表－１に示す。なお、表中の応力 σ は第２種 Piola Kirchhoff の応力を表し、表中の記号に関する説明は備考に示した。以下、特にことわりのない限り総和規約を用い、 $\delta(\bullet)$ は変分を表し、 $(\)_{,i}$ は座標 i に関する方向微分を表すものとする。

最初の解析ステップ Q_0 において、初期応力 σ_{ij}^I と無応力状態における初期たわみ u_i^I を入力し、釣り合い計算を行った結果得られる応力 $\sigma_{ij}^{(0)}$ とたわみ量 $u_i^{(0)}$ がそれぞれ、残留応力 σ_{ij}^R と初期たわみ u_i^G に相当する。上記の諸量間に、以下のような関係が成り立つ。

$$\sigma_{ij}^R = \sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^I + \Delta\sigma_{ij}^{(0)} \quad (1a)$$

$$u_i^G = u_i^{(0)} = u_i^I + \Delta u_i^{(0)} \quad (1b)$$

ここに、 $\Delta\sigma_{ij}^{(0)}$ は残留応力と初期応力 σ_{ij}^I の差、また $\Delta u_i^{(0)}$ は初期たわみと無応力状態の初期たわみ u_i^I の差を表す。一般に、 $\Delta\sigma_{ij}^{(0)}$ 、 $\Delta u_i^{(0)}$ は零とならない。

初期不整の導入する方法として、 $\sigma_{ij}^{(0)}$ と $u_i^{(0)}$ が目標とする残留応力 σ_{ij}^R と初期たわみ u_i^G に一致するように、 σ_{ij}^I と u_i^I に適当な値を設定することが挙げられる。

「従来型導入法」では、式(1)の σ_{ij}^I に目標とする残留応力値 σ_{ij}^R 、また u_i^I に目標とする初期たわみ値 u_i^G をそれぞれ代入しているため、式(1)のように発生する応力増分 $\Delta\sigma_{ij}^{(0)}$ 、変位増分 $\Delta u_i^{(0)}$ の分だけ Q_0 において誤差が生じる。

この点を改善するには次の2つの方法が考えられる。

①逆解析的導入法

目標となる残留応力 σ_y^R と初期たわみ u_i^G から、 Q_0 において入力すべき初期応力 σ_y^I と無応力状態における初期たわみ u_i^I を逆解析により見出す方法。

②仮想外力による導入法

「従来型導入法」を行った上でさらに文献 3),4)で提案された仮想的な外力を導入し、応力増分と変位増分の発生を抑えることにより式(1)を強制的に満足させる方法。

以下、2. 1, 2. 2では残留応力と初期たわみの導入時と外力が作用した任意の増分段階におけるの増分型有限変位の基礎式を全ラグランジェの手法により表現し³⁾、①, ②の手法に関してさらに詳しく考察する。

2. 1 初期不整導入時のステップ

初期不整を導入する Q_0 状態における全ラグランジェ表現の増分型仮想仕事の原理として、次の関係式が成立する。

$$\iiint_V \left[\sigma_y^I \delta \Delta e_y^* + \Delta \sigma_y^{(0)} \delta \Delta e_y^* + \sigma_y^I \frac{1}{2} \delta \left(\Delta u_{k,i}^{(0)} \Delta u_{k,j}^{(0)} \right) \right] dV = 0 \quad (2)$$

ここに、

$$2\Delta e_y^* = \Delta u_{i,j}^{(0)} + \Delta u_{j,i}^{(0)} + u_{k,i}^I \Delta u_{k,j}^{(0)} + u_{k,j}^I \Delta u_{k,i}^{(0)} \quad (3)$$

応力増分—ひずみ増分関係、および、要素の変位関数が与えられると、各要素ごとに積分が可能となり式(2)の積分内の各項は各有限要素に対して次のように展開される。

$$\iiint_{V_e} \sigma_y^I \delta \Delta e_y^* dV_e = \delta \Delta q_i^{(0)} f_i^I(\sigma_y^I, u_i^I) \quad (4a)$$

$$\iiint_{V_e} \Delta \sigma_y^{(0)} \delta \Delta e_y^* dV_e = \delta \Delta q_i^{(0)} k_{ij}(u_i^I) \Delta q_j^{(0)} \quad (4b)$$

$$\iiint_{V_e} \sigma_y^I \delta \left(\Delta u_{k,i}^{(0)} \Delta u_{k,j}^{(0)} \right) dV_e = \delta \Delta q_i^{(0)} k_{ij}^G(\sigma_y^I) \Delta q_j^{(0)} \quad (4c)$$

ここで、 $\Delta q_i^{(0)}$ は節点の変位増分を表し、 $\Delta u_i^{(0)}$ に対して次のような変位関数によりその関係が成り立つ。

$$\Delta u_i^{(0)} = \phi_{ij} \Delta q_j^{(0)} \quad (5)$$

式(2),(4)より次のような剛性方程式が成り立つ。

$$f_i^I + (k_{ij} + k_{ij}^G) \Delta q_j^{(0)} = 0 \quad (6)$$

ここで、 k_{ij} は増分型の剛性マトリックス、 k_{ij}^G は初期応力マトリックスを表し、 f_i^I は初期応力に定じた等価

節点力を表す。また、 f_i^I は初期応力 σ_y^I と無応力状態の初期たわみ u_i^I の関数であり、 k_{ij} は u_i^I 、 k_{ij}^G は σ_y^I の関数である。式(6)を基に構造物全体系に関して次のような接線剛性方程式が得られる。

$$K_{ij}^T \Delta U_j^{(0)} = -F_i^I \quad (7)$$

ここで $K_{ij}^T, \Delta U_j^{(0)}$ はそれぞれ全体系の接線剛性マトリックス、変位増分であり、 $-F_i^I$ は初期応力に起因した外力ベクトルを表す。この時、 $F_i^I = 0$ の状態を「自己平衡状態」と称するが、シェル要素のような一般的な要素を利用する場合には、1. で述べたとおり $F_i^I \neq 0$ となり、これが不釣り合い力として作用する。これにより変位増分が発生し、 $\sigma_y^I = \sigma_y^R$ 、 $u_i^I = u_i^G$ の関係を用いる「従来型導入法」では式(1a,b)のそれぞれの導入目標が満足されない。したがって、何らかの方法により適切な σ_y^I と u_i^I を設定する必要がある。これに関して逆解析を実行し、 σ_y^I と u_i^I を設定する方法が「逆解析的導入法」である。

次に、「仮想外力による導入法」^{3),4)}について考察する。この手法ではまず、「従来型導入法」と同様に、 σ_y^I に残留応力 σ_y^R 、 u_i^I に初期たわみ u_i^G を導入する。そして、この時の σ_y^I により生ずる外力ベクトルを消去するため、次のような仮想外力 f_i^V を載荷する。

$$(k_{ij} + k_{ij}^G) \Delta q_j^{(0)} = -f_i^I - f_i^V = 0 \quad (8)$$

ここで、

$$f_i^V = -f_i^I(\sigma_y^R, u_i^G) \quad (9)$$

これより明らかなように、仮想外力により初期応力に関する外力ベクトルは消去され、変位増分 $\Delta u_i^{(0)}$ 、応力増分 $\Delta \sigma_y^{(0)}$ が発生せず、式(1a,b)を満足することができる。

さてここで、①, ②の両手法において注意しておかねばならない点を挙げる。構造物に残留応力のみが存在する初期状態においても、この残留応力に起因するひずみが生じているはずである。厳密に言えばこのひずみは初期状態の釣り合い式における幾何学非線形性に影響を与える。しかしながら、「仮想外力による導入法」では変位増分が全く発生しないため、釣り合いにおいては初期状態における全ひずみ(初期ひずみ)は0と評価され、初期ひずみが幾何学非線形性へ与える影響はまったく考慮されない。同様に、「逆解析的導入法」においても、初期応力という仮想的な物理量を与えるため、初期状態で考慮されるひずみは初期応力に起因する不釣り合い力によるひずみ増分のみとなり、初期ひずみの考慮が不十分である。このように、いずれの方法においても幾何学非線形性に与える初期ひずみの影響は十分な形では考慮されていない。しかし、一般に初期ひずみが幾何学非線形性に

与える影響は十分小さいので、耐荷力解析のような局部的なひずみ集中を対象としない限り、問題ないものと考えられる。

2. 2 荷重が載荷した段階の増分ステップ

式(2)に対応する Q_{n+1} 状態に関する増分型有限変位理論の基礎式は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\sigma_{ij}^{(n)} \delta \Delta e_{ij}^* + \Delta \sigma_{ij}^{(n+1)} \delta \Delta e_{ij}^* + \sigma_{ij}^{(n)} \frac{1}{2} \delta (\Delta u_{k,i}^{(n+1)} \Delta u_{k,j}^{(n+1)}) \right] dV \\ & - \iiint_V \left[(P_i^{(n)} + \Delta P_i^{(n+1)}) \delta u_i^{(n+1)} \right] dV \\ & - \iint_S \left[(T_i^{(n)} + \Delta T_i^{(n+1)}) \delta u_i^{(n+1)} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Q_n の応力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ を次のように、残留応力 σ_{ij}^R と外力により生ずる応力 $\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}$ とに分ける。

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^R + \tilde{\sigma}_{ij}^{(n)} \quad (11)$$

式(11)を考慮して、式(10)を各有限要素について離散化すると、次のような剛性方程式が導かれる。

$$\{k_{ij}(u_i^{(n)}) + k_{ij}^G(\sigma_{ij}^{(n)})\} \Delta q_j^{(n+1)} = \Delta \tilde{f}_i^{(n+1)} + (\tilde{f}_i^{(n)} - f_i^R - \tilde{f}_i^{(n)}) \quad (12)$$

ここで、

$$\Delta \tilde{f}_i^{(n+1)} = \iiint_V \Delta P_i^{(n)} dV + \iint_S \Delta T_i^{(n)} dS \quad (13a)$$

$$\tilde{f}_i^{(n)} = \iiint_V P_i^{(n)} dV + \iint_S T_i^{(n)} dS \quad (13b)$$

$$f_i^R = f_i^I(\sigma_{ij}^R, u_i^{(n)}) \quad (13c)$$

$$\tilde{f}_i^{(n)} = f_i^I(\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}, u_i^{(n)}) \quad (13d)$$

である。式(12)より、次のような全体系の接線剛性方程式が得られる。

$$K_{ij}^T \Delta U_j^{(n+1)} = \Delta \tilde{F}_i^{(n+1)} + (\tilde{F}_i^{(n)} - F_i^R - \tilde{F}_i^{(n)}) \quad (14)$$

式(14)の右辺の括弧内第二項は Q_n の残差項あり、不釣り合い力となる。①で提案したように、式(7)から得られた応力と変位が式(1a,b)の関係を満足するような初期応力 σ_{ij}^I と無応力状態の初期たわみ u_i^I を逆解析により求めておけば、外力を載荷した段階においても何ら問題は生じない。

次に、「仮想外力による方法」について考察する。この方法で用いる接線剛性方程式は式(12)に式(9)で表される仮想外力の項を付加した以下のような式となる。

$$\begin{aligned} & \{k_{ij}(u_i^{(n)}) + k_{ij}^G(\sigma_{ij}^{(n)})\} \Delta q_j^{(n+1)} \\ & = \Delta \tilde{f}_i^{(n+1)} + (\tilde{f}_i^{(n)} + f_i^V - f_i^R - \tilde{f}_i^{(n)}) \end{aligned} \quad (15)$$

幾何学非線形解析では、式(15)の f_i^R は変位の関数であるため式(8)の f_i^I と異なり、 $(f_i^V - f_i^R)$ の項は零とはならず、仮想外力の影響が増分変位に現れる。また、式(15)の左辺第二項の初期応力マトリックスは、応力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ の関数であり、式(11)からも分かるとおり、残留応力の関数である。剛体変位除去の手法¹²⁾等により幾何学的な考察より接線剛性方程式を誘導する場合には、仮想外力ならびに残留応力が幾何学非線形性に与える影響を正確に考慮しておくことが必要となる。

上記のような「仮想外力による導入方法」は、一つの有力な残留応力と初期たわみの導入法であるといえる。しかしながら、最近広く活用されている市販の有限要素法の解析コードにおいて、この導入法は準備されていない。また、ユーザー側からこの導入法を解析ソフトに採り入れるには「仮想外力」を入力する必要がある。「仮想外力」を算定するためには、解析に用いる有限要素の変位関数と数値積分法などを知るか、直接、初期応力を導入したときの不釣り合い力を知らなければならない。残念ながら、多くの市販の解析ソフトではこのような情報を得ることができず、「仮想外力による導入方法」の利用は難しいと言えよう。

そこで、有限要素法の汎用コードにおいて残留応力と初期たわみを導入する方法として、式(1a,b)を満足する σ_{ij}^I 、 u_i^I を逆解析により設定する「逆解析的導入法」を以下に述べる。

3. 逆解析的導入法

ここで示す手法は大きく次の二つのプロセスに分けられる。第一ステップでは微小変位理論と重ね合わせの法則が成り立つことを前提とした数値計算による離散的な Green 関数を求め、この関数を利用したアプローチにより、第二ステップの初期値となる初期応力 σ_{ij}^I と無応力時の初期たわみ u_i^I を求める。第二ステップでは、非線形解析を行うことで第一ステップから得られた σ_{ij}^I 、 u_i^I を試行錯誤的に修正し、より精度の高い解を求めるものである。

以下において $\{\bullet\}$ はベクトルを表し、 $[\bullet]$ はマトリックスを表すものとする。また、本論文では一般シェル要素を検討対象とし、簡単のため、シェル要素における三成分の応力の内、一つの面内軸方向の直応力成分 (σ_{11}) のみを考慮し、さらに要素内の各積分点の中央面において評価される応力の平均値を対応する要素の応力評価値として使用する。

3. 1 第一ステップ

第一ステップではまず有限要素法による微小変位解析により、全応力と変位増分に関する離散的な Green 関数を求める。このため、構造系の全ての要素をいくつかの要素群に分ける。次に、ある無応力状態の初期たわみ $\{\bar{u}^I\}$ を有する構造物に対して、この要素群一つ一つに単位初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}_k$ を載荷し、この時発生する全応力と変位増分を随時記録していく。ここで、下添え字 k ($1 \leq k \leq n$, n は全要素群数) は要素群番号を表す。以上より、単位初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}_k$ を載荷したときの位置座標 $\{x\}$ 点における全応力と変位増分を表す Green 関数 $\{\bar{\sigma}\}_k$ および $\{\Delta \bar{u}\}_k$ が得られる。

次に、求められた全応力に関する Green 関数 $\{\bar{\sigma}\}_k$ を利用し、次のように結合係数 $\{a\}$ により線形結合した応力を $\{\bar{\sigma}^{(0)}\}$ とする。

$$\{\bar{\sigma}^{(0)}\} = a_1 \{\bar{\sigma}\}_1 + a_2 \{\bar{\sigma}\}_2 + \dots + a_n \{\bar{\sigma}\}_n = [\bar{\sigma}]\{a\} \quad (16a)$$

ここで、

$$[\bar{\sigma}] = [\{\bar{\sigma}\}_1, \{\bar{\sigma}\}_2, \dots, \{\bar{\sigma}\}_n], \{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (16b)$$

そして、この結合係数を決定するため、残留応力 $\{\bar{\sigma}^R\}$ と $\{\bar{\sigma}^{(0)}\}$ のベクトルの差に次式のような最小二乗基準を準用する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{a\}} = 0 \quad (17a)$$

$$\Pi = \|\{\bar{\sigma}^R\} - \{\bar{\sigma}^{(0)}\}\|^2 \quad (17b)$$

式(17a)を整理すると、次のような最小二乗法の正規方程式が得られる。

$$[\bar{\sigma}]^T [\bar{\sigma}]\{a\} = [\bar{\sigma}]^T \{\bar{\sigma}^R\} \quad (18)$$

この正規方程式は、その次元数が大きくなると一般的に数値的不安定に陥る傾向があり、解が容易には求められなくなる。ここでは、マトリックスの特異値分解を利用し、式(18)の正規方程式の適切化を図り、この問題に対処する⁹⁾。ここで、 $[\bar{\sigma}]$ の次元数を $N \times M$ とすると、 $[\bar{\sigma}]$ は、次式のように、特異値分解することができる。

$$[\bar{\sigma}] = [U][B][V]^T \quad (19)$$

ここで、 $[U]$ および $[V]$ は、それぞれ N および M 次の直交行列である。 $[B]$ の次元数は $N \times M$ であり、非対角

成分が 0 となっている。このマトリックスは、そのランクを m 次とすると、次のように表現される。

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_m & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (20)$$

λ_j は下の条件を満たす値であり、 $[\bar{\sigma}]$ の特異値である。

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0, \quad m \leq \min(M, N) \quad (21)$$

条件数は、最大特異値 λ_1 と最小特異値 λ_m を用いて、次のように与えられる。

$$\text{Cond}[\bar{\sigma}] = \text{Cond}[B] = \lambda_1 / \lambda_m \geq 1 \quad (22)$$

式(22)の条件数が大きな値になると、式(18)より結合係数 $\{a\}$ を解くための数値計算は不安定状態に陥りやすくなる。このような場合、小さな特異値はその値を零とみなし、このマトリックスのランクを k 次 ($k < m$) まで落とすことにより、マトリックス方程式の適切化を図る。式(20)のマトリックスにおいて、ランクを k 次まで落としたものを $[B_k]$ とすると、式(18)、(19)より結合係数 $\{a\}$ は次式により求められる。

$$\{a\} = ([V][B_k]^T[U]^T)\{\bar{\sigma}^R\} \quad (23)$$

式(23)により求められた $\{a\}$ と単位初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}_k$ を重ね合わせて得られる初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}$ を載荷した場合、微小変位理論が成り立ち、重ねあわせの法則が適用できる範囲で、導入目標値である残留応力 $\{\bar{\sigma}^R\}$ と Q_0 状態での応力 $\{\bar{\sigma}^{(0)}\}$ の差は最小となる。

次に、ここで求めた結合係数 $\{a\}$ を使って以下のような初期たわみの精度に関する照査を行う。

$$\frac{\|\{\bar{u}^G\} - (\{\bar{u}^I\} + [\Delta \bar{u}]\{a\})\|}{\|\{\bar{u}^G\}\|} < \varepsilon \quad (24)$$

ここで、 $[\Delta \bar{u}] = [\{\Delta \bar{u}\}_1, \{\Delta \bar{u}\}_2, \dots, \{\Delta \bar{u}\}_n]$ であり、 ε は収束判定値である。式(24)の条件が満たされない場合、Green 関数を求める時に設定した無応力時の初期たわみ $\{\bar{u}^I\}$ に、次式で表される修正ベクトル $\{\Delta \bar{u}^I\}$ を加え、上記の一連の計算を繰り返す。

$$\{\Delta \bar{u}^I\} = \{\bar{u}^G\} - (\{\bar{u}^I\} + [\Delta \bar{u}]\{a\}) \quad (25)$$

収束した時の結合係数 $\{a\}$ と単位初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}$ を重ね合わせて得られる初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}$ と、無応力状態における初期たわみ $\{\bar{u}^I\}$ が第一ステップにおける解となる。

3. 2 第二ステップ

このステップでは、まず第一ステップにより求められた初期応力 $\{\bar{\sigma}^I\}$ と無応力時の初期たわみ $\{\bar{u}^I\}$ を導入し、有限変位解析を実施する。これにより生じた応力増分、変位増分から、次のように残留応力と初期たわみとの相対誤差をそれぞれ評価する。

$$\varepsilon_s = \frac{|\{\bar{\sigma}^R\} - (\{\bar{\sigma}^I\} + \{\Delta\sigma^{(0)}\})|}{|\{\bar{\sigma}^R\}|} \quad (26a)$$

$$\varepsilon_u = \frac{|\{\bar{u}^G\} - (\{\bar{u}^I\} + \{\Delta u^{(0)}\})|}{|\{\bar{u}^G\}|} \quad (26b)$$

ε_s , ε_u が所定の誤差になるまで、 $\{\bar{\sigma}^I\}$ と $\{\bar{u}^I\}$ にそれぞれ次式による修正を与え、再び有限変位解析を実施する。

$$\{\Delta\bar{\sigma}^I\} = \alpha [\{\bar{\sigma}^R\} - (\{\bar{\sigma}^I\} + \{\Delta\sigma\})] \quad (27a,b)$$

$$\{\Delta\bar{u}^I\} = \beta [\{\bar{u}^G\} - (\{\bar{u}^I\} + \{\Delta u\})]$$

そして、この計算過程を繰り返し行う中で、式(27a,b)が成り立つときの初期応力と無応力時の初期たわみが式(1a,b)を近似的に満足させる解となる。なお、式(27a,b)中の α , β は収束に関する係数である。そして、4. に示す今回の数値計算例では、非線形解析と線形解析の間で応力分布がほとんど変化しないことを確認した上で、式(27a)の α の値を0とし、 β の値は1/2とした。

4. 数値計算例

ここでは、3. で述べた「逆解析的導入法」の妥当性の確認を行い、導入法の違いが終局挙動に及ぼす影響を検討するため、「従来型導入法」と「逆解析的導入法」のそれぞれを利用して残留応力と初期たわみを導入し、各々の初期状態及びそれに続く終局挙動までの解析を行う。

ここで取り上げる解析対象は、圧縮力を受ける周辺単純支持板と連続補剛板である。なお、数値計算の汎用構造解析プログラムには、周辺単純支持板に汎用構造解析ソフトのMARC K6⁷⁾を、また、連続補剛板にはABAQUS Ver.5.7⁸⁾を利用する。

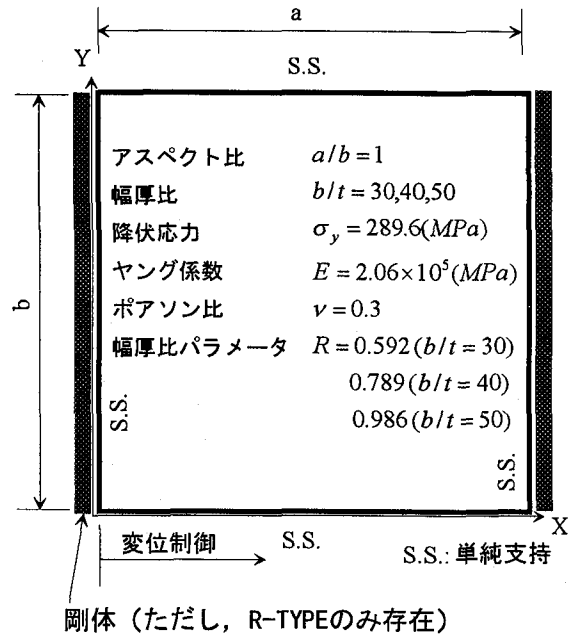


図-1 周辺単純支持板とその諸元

4. 1 周辺単純支持板

図-1に周辺単純支持板の諸元を示す。ここで終局挙動の解析をする上で重要なパラメータとなる幅厚比は $b/t=30, 40$ および 50 の3通りを準備する。要素分割は 10×10 とし、材料構成則は完全弾塑性とする。要素には四節点厚肉シェル要素 (Element No.75) を用いる。この要素の積分点は面内に4点あり、それぞれ板厚方向に11点の積分点が設けられている。そこで、板厚中央面の4つの積分点における応力値を平均することにより、対応する要素の応力評価値とする。終局挙動解析では、 $X=0$ の辺を変位制御することによりその载荷を行い、構造の対称性から、1/4モデルによりその解析を行う。

初期応力を载荷するときの境界条件として、 $X=0$ の辺における X 方向変位の自由度を解放する場合と、 $X=0$ の辺の面内回転を拘束 ($\theta_z=0$) するための剛体を設ける場合の二種類を用意する。ここでは前者を「M-TYPE」、後者を「R-TYPE」と名づける。面外方向の初期たわみ (W_0) は下式を導入目標値とする。

$$W_0 = W_{0\max} \sin\left(\frac{\pi X}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi Y}{b}\right) \quad (28)$$

$W_{0\max}$ には $b/150$, $b/300$, $b/750$ および $b/1500$ の4通りを考慮する。

残留応力は、 X 方向の直応力成分のみを対象とし、その分布は Y 方向に矩形分布とする。また、M-TYPE の $X=0$ の辺では、 X 方向変位の自由度が解放されているために、必然的に残留応力が零となる。この点を考慮し、 X 方向の残留応力分布には M-TYPE 及び R-TYPE のそれぞれに

以下のような別々の分布形を仮定する。

M-TYPE の残留応力分布

$$\begin{aligned}\sigma_{rt} &= 0.9\sigma_y \times \frac{Y}{(a/2)} & (0 \leq Y < \frac{1}{11}b) \\ \sigma_{rc} &= -0.2\sigma_y \times \frac{Y}{(a/2)} & (\frac{1}{11}b < Y \leq \frac{1}{2}b)\end{aligned}\quad (29a,b)$$

R-TYPE の残留応力分布

$$\begin{aligned}\sigma_{rt} &= 0.9\sigma_y & (0 \leq Y < \frac{1}{11}b) \\ \sigma_{rc} &= -0.2\sigma_y & (\frac{1}{11}b < Y \leq \frac{1}{2}b)\end{aligned}\quad (30a,b)$$

4. 2 M-TYPE の解析結果

図-2には代表として $b/t=40$, $W_{0max}=b/150$ のケースについて各手法で比較したときの初期状態における応力分布を表す。なお、他のケースの残留応力分布についても調べたが、ほぼ同様な分布傾向となっていた。この図より、「従来型導入法」の応力分布は、導入目標となる残留応力分布とかなりの違いが認められる。また、70%以上の領域において導入目標となる残留応力よりも過少な応力が導入されたものとなっている。このような誤差の原

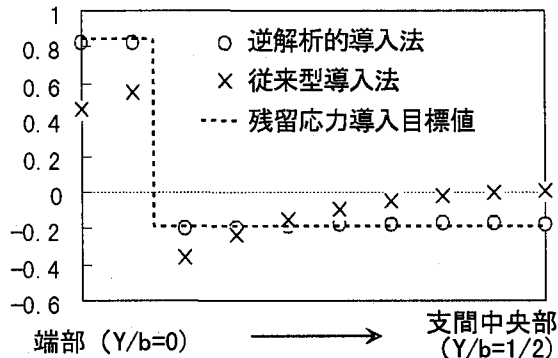


図-2(a) 初期状態のY方向の応力分布
(支間中央 $X=a/2$, 板厚中央面, M-TYPE)

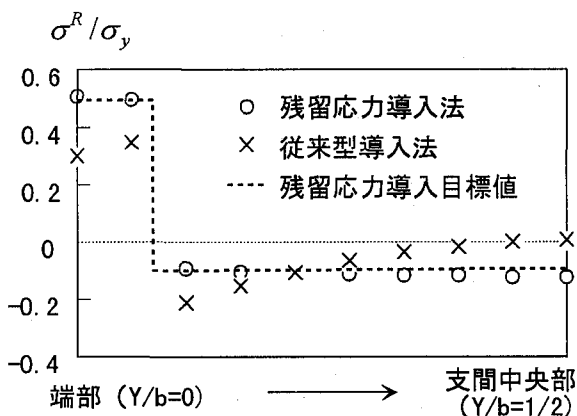


図-2(b) 初期状態のY方向の応力分布
(支間1/4部 $X=a/4$, 板厚中央面, M-TYPE)

因は、式(1a)で示した応力増分 $\Delta\sigma_y$ によるものである。一方、「逆解析的導入法」の応力分布は、残留応力の分布形状およびその大きさを概ねトレースできているといえる。ただし、端部の引張り領域において若干の差が認められるが、これは、式(17b)で示される最小二乗法の誤差に起因するものと推察される。ちなみに、「逆解析的導入法」における残留応力の相対誤差 ε_r は約5.5%である。図-3は、初期応力導入後の支間中央 ($X=a/2$) の初期たわみを表している。この図より、「逆解析的導入法」にお

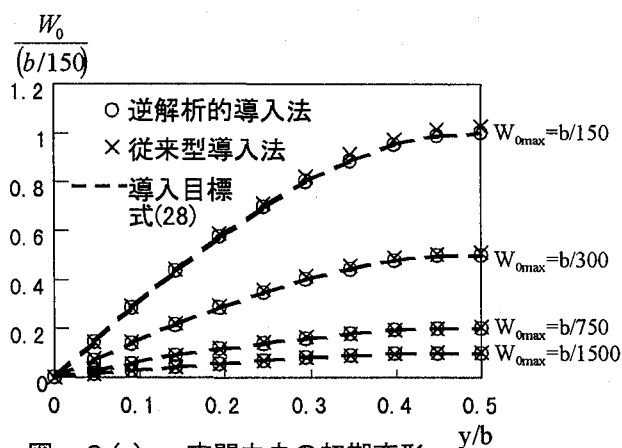


図-3(a) 支間中央の初期変形
(M-TYPE $b/t=30$)

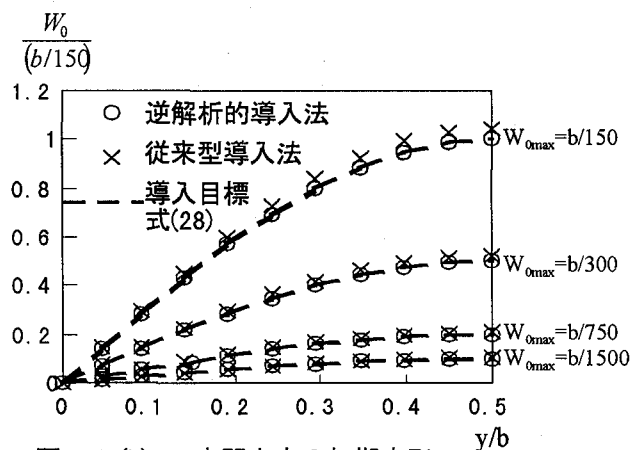


図-3(b) 支間中央の初期変形
(M-TYPE $b/t=40$)

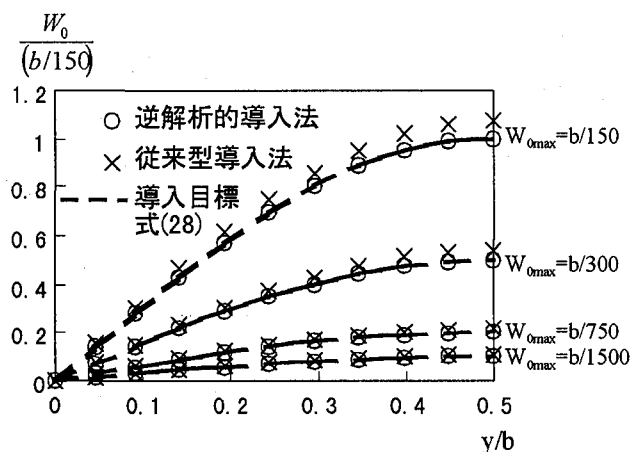


図-3(c) 支間中央の初期変形
(M-TYPE $b/t=50$)

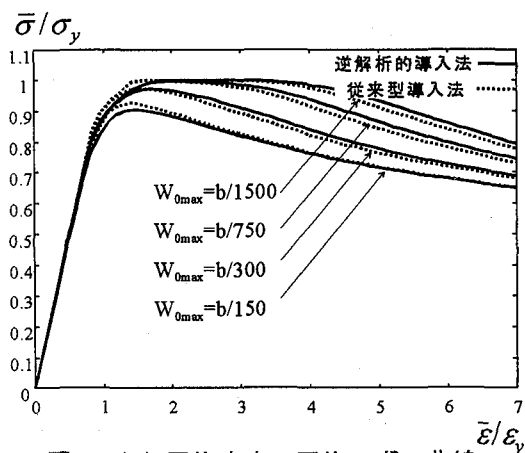


図-4(a) 平均応力-平均ひずみ曲線
(M-TYPE, $b/t=30$)

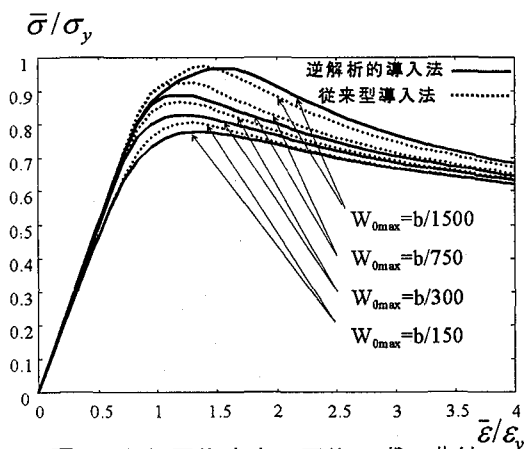


図-4(b) 平均応力-平均ひずみ曲線
(M-TYPE, $b/t=40$)

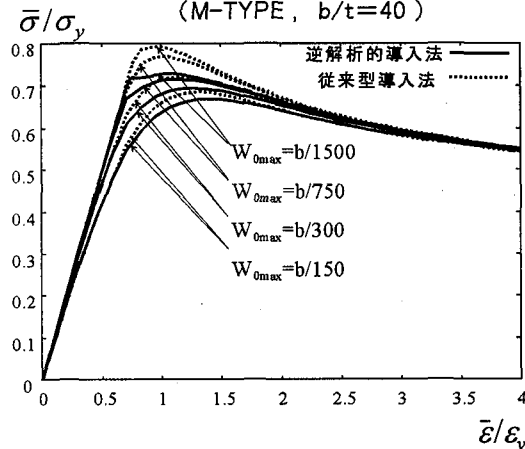


図-4(c) 平均応力-平均ひずみ曲線
(M-TYPE, $b/t=50$)

いて導入される初期たわみは式(28)を十分満足しており、このグラフ上では式(28)との差異は認められない。ちなみに、「逆解析的導入法」では、式(26b)の初期たわみに関する相対誤差 ϵ_u が 0.1%以下となるまで第二ステップの繰り返し計算を行っている。一方、「従来型導入法」による初期たわみは導入目標となる初期たわみよりも大きな値となっており、特に幅厚比が大きくなるほど差が大きくなるが、 $b/t=50$ におけるケースで最大初期たわみの差は約 7%と比較的小さな差であった。

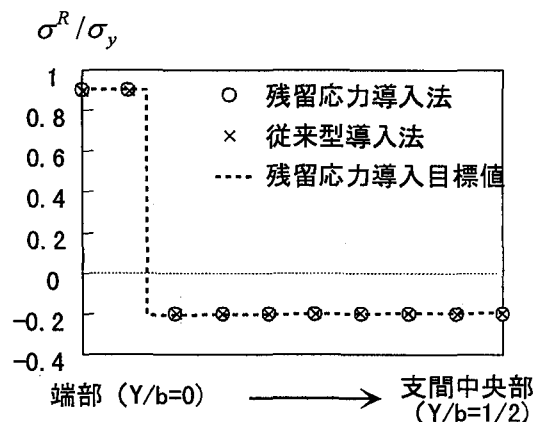


図-5 初期状態のY方向の応力分布
(支間中央 $X=a/2$, 板厚中央面, R-TYPE)

圧縮板の終局挙動の解析結果として、図-4に M-TYPE の無次元化された平均応力、平均ひずみによるつり合い曲線を示す。この図より、M-TYPE では初期不整の導入方法の違いが解析結果に大きな差を生じさせていることが分かる。この傾向は幅厚比が大きくなるほど顕著なものとなってくる。また、いずれのケースも、「従来型導入法」によるものは過大な耐荷力が生じている。

以上の結果から、図-4のように「従来型導入法」の耐荷力が「逆解析的導入法」のそれと比べて小さくなる理由として、載荷する初期応力が全般的に小さく、十分な残留応力が導入できていないためと考えられる。

4. 3 R-TYPE の解析結果

図-5は、M-TYPE と同様に、 $b/t=40$, $W_{0max}=b/150$ の初期状態の応力分布を示すが、導入法の違いによる応力分布に大きな差は認められない。これは端部に導入した剛体載荷辺の拘束の影響により初期応力の載荷にともなう X 軸方向の応力増分はほとんど発生していないことに起因する。その結果として、「従来型導入法」によっても、つり合い後の応力分布は、残留応力分布をほぼ正確にトレースできたといえる。ちなみに、「逆解析的導入法」における残留応力の相対誤差 ϵ_s は 0.25%以下である。

図-6は、両手法により導入された初期たわみを示す。M-TYPE と同様に、「逆解析的導入法」では初期たわみの相対誤差 ϵ_u が 0.1%以下となるまで第二ステップの繰り返し計算を行っており、導入目標値を近似的に十分満足していることが分かる。一方、「従来型導入法」では、たわみが全領域で過大に導入されており、 $b/t=50$ のケースでは最大で 15%程度の初期たわみの誤差が認められる。

終局挙動の解析結果として、図-7に R-TYPE の無次元化された平均応力、平均ひずみによるつり合い曲線を示す。この図より、導入法の違いによる明確な終局挙動の違いは認められない。

以上より、耐荷力に影響を及ぼす初期たわみと残留応

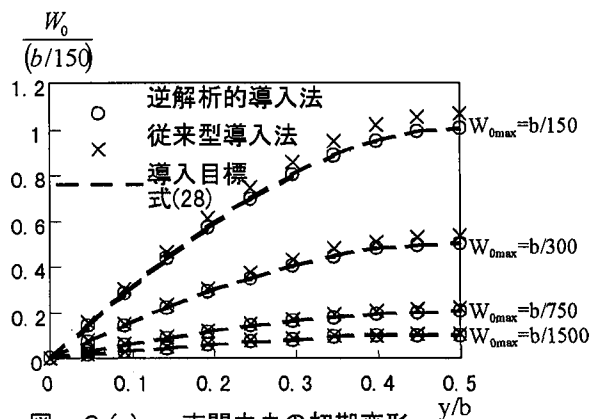


図-6 (a) 支間中央の初期変形 (R-TYPE $b/t=30$)

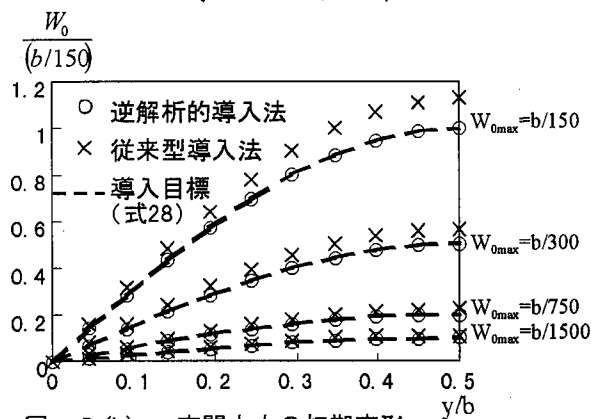


図-6 (b) 支間中央の初期変形 (R-TYPE $b/t=40$)

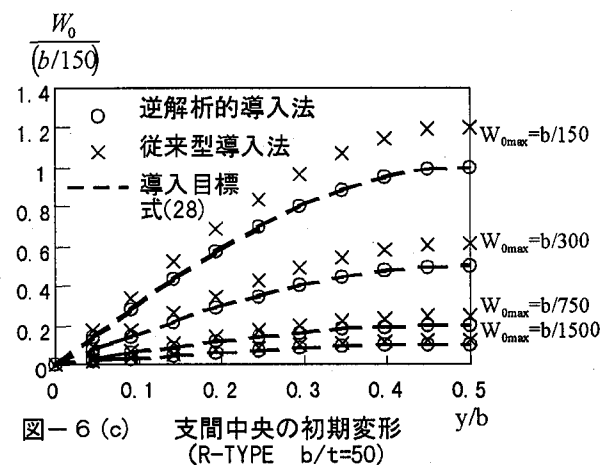


図-6 (c) 支間中央の初期変形 (R-TYPE $b/t=50$)

力の内、残留応力は両導入法において差がないため、初期たわみの差の影響がそのまま耐力の差となって現れたこととなる。この時、初期たわみの差は最大でも約15%程度であるため、これに起因した終局挙動の差はほとんど表われなかったものと考えられる。

4. 4 連続補剛板⁹⁾

図-8に連続補剛板の寸法および諸元を表す。この補剛板は文献9)と同様なものであるが、文献9)では縦補

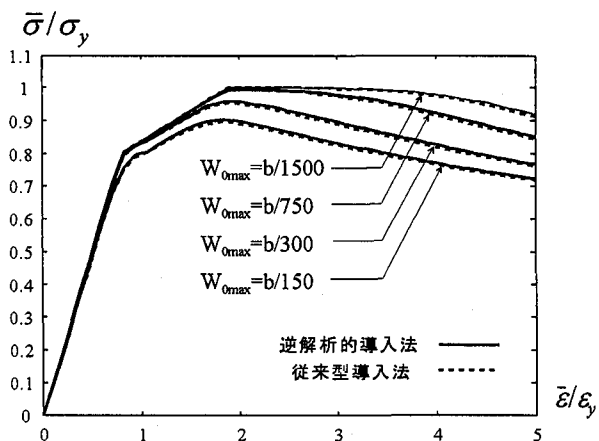


図-7 (a) 平均応力-平均ひずみ曲線 (R-TYPE, $b/t=30$)

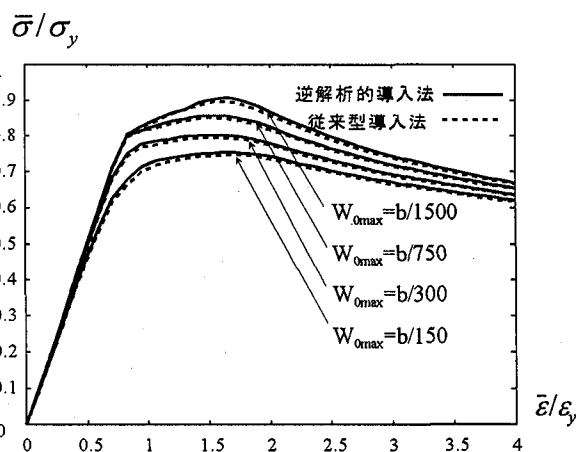


図-7 (b) 平均応力-平均ひずみ曲線 (R-TYPE, $b/t=40$)

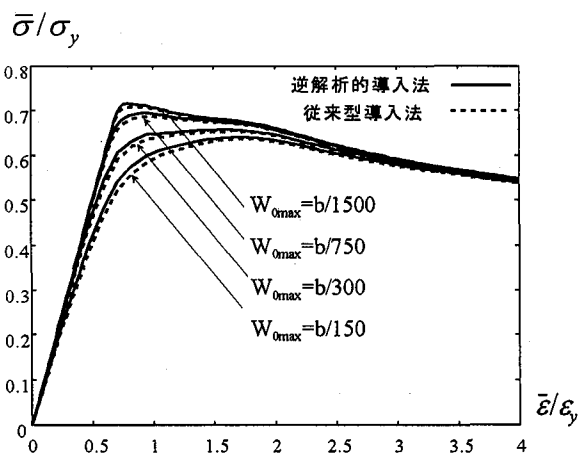
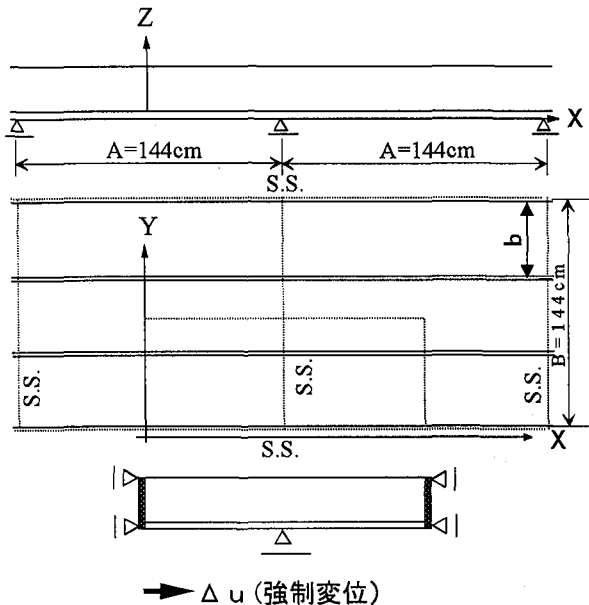


図-7 (c) 平均応力-平均ひずみ曲線 (R-TYPE, $b/t=50$)

剛材にはり柱要素を利用しているが、ここではフランジおよび縦補剛材にシェル要素を使用する。分割数はフランジ 24×60 、縦補剛材 10×60 である。なお、解析に使用する要素は ABAQUS Ver.5.7 の四節点厚肉シェル要素



フランジ厚 : 1.2cm
 リブ厚 : 1.2cm
 リブ高 : 9.0065cm
 フランジ、リブ材質 : SS400
 降伏応力 : 2400kgf/cm²
 材料構成則 : 完全弾塑性
 幅厚比パラメータ $R=0.7$
 縦補剛材剛比 $\gamma/\gamma^*=1.0$
 γ^* は道路橋示方書の
 必要縦リブ剛比

図-8 連続補剛板の解析モデル

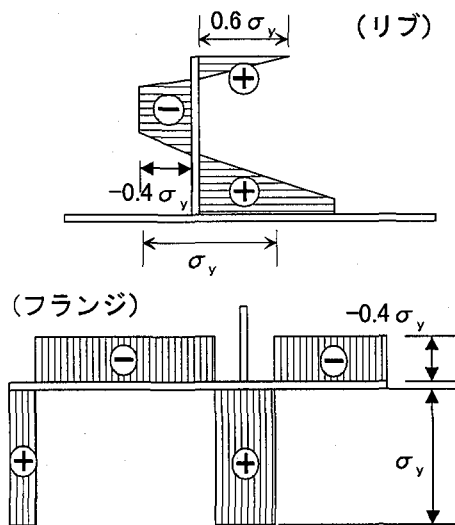


図-9 残留応力分布図

(S4R)である。この要素は低減積分要素であり、面内の1点に対して、板厚方向に5つの積分点を有するものである。ここでは、板厚中央面の積分点における応力を対応する要素の応力評価値として用いる。また、文献9)と同様に、初期たわみは次式により定義し、残留応力分布^{9),10)}は図-9のとおりとする。

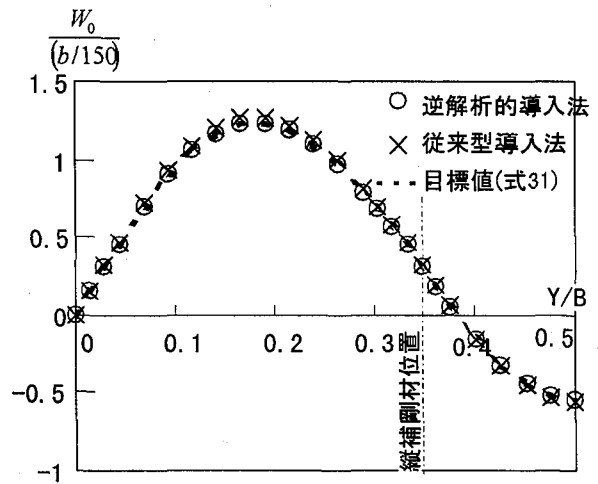


図-10 支間中央 ($X=0$) の面外たわみ

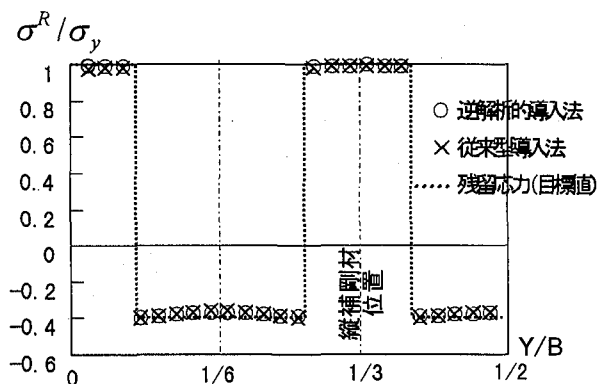


図-11 初期状態のY方向の応力分布
(支間中央 ($X=0$), 板厚中央面)

$$W_0 = A/1000 \min(3Y/B, 1) \cos(\pi X/A) + b/150 \cos(3\pi X/A) \sin(3\pi Y/B) \quad (31)$$

初期応力載荷時の境界条件は連続補剛板の対称性を考慮し、4.3のR-TYPEと同様に、面内回転が拘束された剛体を導入する。終局挙動の解析における荷重載荷は、図に示すように $Y=0$ の位置 (支間中央) に一様な強制変位 Δu を与えることで行う。

4.5 連続補剛板の解析結果

各手法に関して、初期応力導入後のつり合い状態 (Q_0) における支間中央部 ($X=0$) のフランジ断面の面外たわみを図-10に示す。この図から「逆解析的導入法」の初期たわみは導入目標値である式(31)の値を十分に満足していることが分かる。ちなみに、「逆解析的導入法」に関しては、式(26b)の初期たわみの相対誤差 ε_u が0.1%以下となるまで第二ステップの繰り返し計算を行っている。一方、「従来型導入法」に関しては、初期たわみのピークのところに若干の誤差が認められ、この相対誤差は約3%で

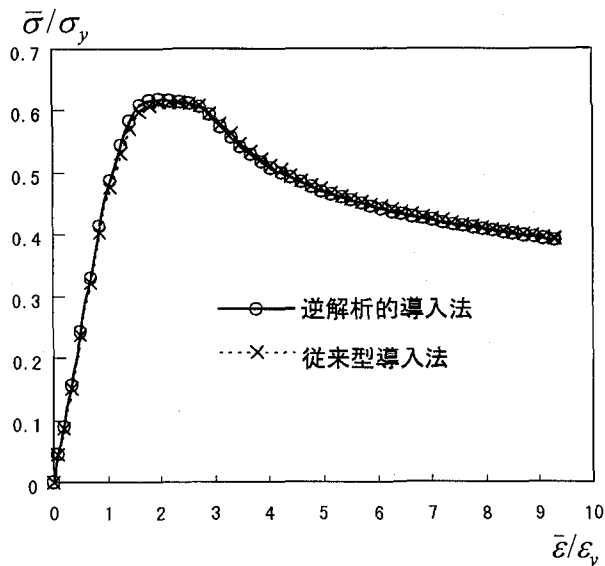


図-12 平均応力—平均ひずみ曲線

ある。また、最大荷重に大きな影響を及ぼすものと考えられるフランジと縦補剛材の溶接位置での初期たわみは、両手法間においてほとんど差が認められない。

次に、 Q_0 における応力分布を図-11に示す。概ね、「逆解析的手法」と「従来型導入法」および残留応力の値は等しくなっている。両手法間の関係についてさらに詳しく見ると部材端 ($Y=0$) 付近において、「逆解析的手法」の方が残留応力により近い分布形となっている。また、結果に関しては省略したが、縦補剛材に関しても両手法間の応力分布を比較しており、その結果、両手法での差はほとんど認められず、どちらも導入目標となる残留応力分布に極めて近い応力分布となっていた。ちなみに、「逆解析的導入法」における残留応力に関する相対誤差 ε_r は約 2.5% である。

図-12には両手法における平均応力—平均ひずみの関係を表す。上述した初期たわみと残留応力の関係からも推察されるように、これらの曲線に大きな差異は認められない。この理由を考察すると、4.3の R-TYPE と同様に、連続補剛板の対称性保持のため導入した剛体載荷辺の拘束力の影響により載荷した初期応力にとまらぬ応力増分がほとんど発生しないためと考えられる。

5. まとめ

本研究では、有限要素法を利用した終局挙動の解析における初期条件としての残留応力と初期たわみの導入法に関して、従来から行われてきた導入法の問題点を整理し、「仮想外力による方法」による正確な初期不整の導入法と独自の新たな導入法（「逆解析的導入法」）を提案した。

「仮想外力による方法」は逆解析的なアプローチを行う必要はなく、順解析により正確な導入が行えるため効率的な手法と考えられる。しかしながら、現在の汎用プログラムへの適用性については、内部が black box 化された汎用構造解析ソフトを利用する場合、変位関数や数値積分法を一般には知ることはできないので、この手法の適用は難しいと考えられる。

一方、「逆解析的導入法」は、応力および変位の離散的な Green 関数を利用し、これによる収束計算を行うので、数多くの線形計算を行う必要があるが、現在市販されるあらゆる汎用プログラムの任意要素にも柔軟に対応でき、かつ、汎用プログラム自身を変更する必要がないため、汎用プログラムへの適用には優れている。

数値計算例としては、周辺単純支持板と連続補剛板を取り上げ「従来型導入法」と「逆解析的導入法」のそれぞれの手法を用いて終局挙動の解析を行った。「従来型導入法」により導入された増分 0 ステップ (Q_0) における内部応力およびたわみの結果から、それらが目標値となる残留応力分布と初期たわみを満足していない点を明らかにした。一方、「逆解析的導入法」ではその手法の妥当性を確認することができた。また、終局挙動の解析結果から、初期応力導入時の境界条件の選択がその結果に影響を及ぼすことも分かった。特に、初期応力導入時に軸方向の拘束のない M-TYPE では、「従来型導入法」と「逆解析的導入法」の解析結果に大きな差が生じるため、本手法の適用の重要性が明らかとなった。逆に、導入した初期応力分布と残留応力分布がほぼ一致するような R-TYPE や連続補剛板のケースでは、両手法間での耐荷力に明確な差は現れなかった。しかし、「従来型導入法」では、導入目標となる初期不整と解析初期状態との間に必然的に誤差が生ずる。このため、初期不整に対して敏感な構造物を解析する場合や精度の高い終局挙動の解析が必要とされる場合、それによる解析結果の信頼性が乏しくなる。そこでこのような場合には、今回提示した「逆解析的手法」のように、解析の初期状態を、導入目標となる初期不整と一致させることが重要であると考えられる。

参考文献

- 1) 後藤芳顕, 王慶雲, 高橋宣男, 小畑誠: 繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.189-206, 1998.4.
- 2) 土木学会: 座屈設計ガイドライン, 技報堂出版, 1987.
- 3) 小松定夫, 北田俊行, 宮崎清司: 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No.244, pp.1-14, 1975.
- 4) 小松定夫, 北田俊行: 補剛された圧縮板の弾塑性有限変位挙動の一解析手法, 土木学会論文報告集, No.296, pp.1-12, 1980.

- 5) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，培風館，1972.
- 6) 久保司郎：逆問題，培風館，1992.
- 7) 日本マーク株式会社：MARC プログラム ユーザー・マニュアル，A-E 編，1994.
- 8) ABAQUS/Standard User's Manual, Ver.5.7, 1997.
- 9) 奈良敬，小松定夫，北田俊行：連続補剛板の極限圧縮強度特性に関する研究，土木学会論文集，No.392/I-9, pp.273-280, 1988.
- 10) 小松定夫，牛尾正之，北田俊行：補剛板の溶接残留応力および初期たわみに関する実験的研究，土木学会論文報告集，No.265, pp.25-35, 1977.
- 11) Zienkiewicz, O.C.: (吉識雅夫，山田嘉昭訳)：マトリックス有限要素法，培風館，1975.
- 12) 土木学会：鋼構造物の終局強度と設計，技報堂出版，1994.
- 13) Yabuki, T., Arizumi, Y. and Yashiro, S.: Ultimate Strength and Its Practical Evaluation of Cylindrical Steel Shell Panels under Various Compressions, Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE, No.489/I-27, pp.37-47, 1994.

1998 年 9 月 18 日 受付