

サンドイッチアーチの複合非線形解析

GEOMETRICAL AND MATERIAL NONLINEAR ANALYSIS OF SANDWICH ARCH

崎山毅*・松田浩**・森田千尋***野瀬智也****・黄美†・

Takeshi SAKIYAMA, Hiroshi MATSUDA, Chihiro MORITA, Tomoya NOSE and Huang MEI

*正会員 工博 長崎大学教授 工学部 構造工学科 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

**正会員 工博 長崎大学助教授 工学部 構造工学科 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

***正会員 博(工学) 長崎大学講師 工学部 構造工学科 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

****学生会員 長崎大学大学院生 工学研究科 構造工学専攻 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

†非会員 長崎大学大学院生 海洋生産科学研究科 (〒852-8521 長崎市文教町1-14)

In this paper, an analysing method of the geometrical and material nonlinearity of a three-layer sandwich arch with various kind of axis-shape is investigated by using the incremental theory. The discrete-type solution of the incremental-form equilibrium equation of a sandwich arch is obtained by applying the numerical integration method. The discrete-type solution gives a solution at each discrete point uniformly distributed on sandwich arch axis, and it can be obtained for a sandwich arch with nonuniform radius of curvature and cross section as well as sandwich arch with uniform radius of curvature and cross section. It is shown that the numerical solution has a uniform convergency and a good accuracy, and the effect of an elastic core shear modulus to the elastic load-carrying capacity of a sandwich arch is evaluated. Furthermore, as the results of numerical analysis of inelastic sandwich arch are shown.

Key Words : sandwich arch, geometrical and material nonlinearity, face plate, core

1. はじめに

サンドイッチ構造は、高強度材料をフェイスプレート(表面材)に、軽量材料をコア(心材)に使用し、両者を接着することによって、部材全体としての高剛性化、軽量化を図ったものである。力学的には、フェイスプレートで軸力を、コアでせん断力を負担する構造形態であり、荷重分担機能はI型断面と類似したものとなる。

サンドイッチ構造に関する研究は古くから行われているが、サンドイッチアーチに関しては以下のような研究が行われている。Ahmed¹⁾²⁾は、心材に弾性あるいは粘弾性材料を、コア材に用いた弾性コアを用いた3層からなるサンドイッチアーチの振動特性に関する研究を行っている。Sharifi³⁾は弾性ばねを付加することによりアーチの弾性座屈解析を行っている。Mirmiranら⁴⁾は、プレストレスが導入されたサンドイッチアーチに関して、コア材の厚さを変えてパラメトリックな幾何学的非線形解析を行い、サンドイッチアーチの座屈および後座屈性状に関する研究を行い、さらに非弾性座屈解析⁵⁾にまで研究を進めている。

以上のように、サンドイッチアーチの耐荷力性状に関する研究は行われているものの、通常の等質な材料からなるアーチに関する研究と比較すると極めて少なく、任意の曲線形状や境界条件、および任意の荷重を受ける場合の材料非線形性をも考慮した複合非線形性状について

は詳細に研究されていないのが現状である。

本論文は、筆者らが行なってきた、弾性あるいは粘弾性材料をコア材に用いたサンドイッチ梁の自由振動特性⁷⁾、および、リブアーチ橋の幾何学的非線形解析⁸⁾などに関する一連の研究をサンドイッチアーチに拡張適用し、サンドイッチアーチの幾何学的および材料非線形性を考慮した複合非線形解析法を提示するとともに、その挙動特性を例示したものである。

2. 解析方法

はじめに、方向不変の荷重を受けるアーチ部材微小要素の変形後の状態におけるつりあいを考えた有限変形平衡方程式をもとにして、サンドイッチアーチの有限変形の非線形解析を可能にする増分形の平衡方程式を導く。ここでは、次の仮定に従う。

1. フェイスプレートは弾塑性、コアは弾性である。
2. フェイスプレートとコアはずれを生じない。
3. コアの軸力は無視する。
4. コアのせん断ひずみは深さにおいて一定である。
5. アーチ断面においては軸ひずみのみを考慮し、軸ひずみに対する垂直方向のひずみは無視する。

つづいて、正規微分方程式を近似積分により離散的一般解を求め、積分方程式を離散表示することにより無次元化された断面力および変形を求める。

(1) 有限変形平衡方程式

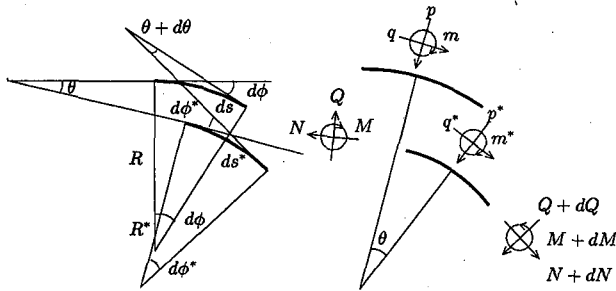


図-1 アーチの微小要素

一般的な平面曲線を軸線とするアーチ部材において、その任意の微小部分は十分な精度で円弧とみなすことができる。図-1に示すように、任意微小要素の変形前および変形後の弧長、曲率半径、中心角をそれぞれ ds , R , $d\phi$ および ds^* , R^* , $d\phi^*$ とすれば載荷変形状態にあるサンドイッチアーチ微小要素に関する力の平衡条件は、次の式にて与えられる⁶⁾。

$$\frac{dQ}{ds^*} + \frac{N}{R^*} + p^* = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dN}{ds^*} - \frac{Q}{R^*} + q^* = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dM}{ds^*} - Q - m^* = 0 \quad (3)$$

ここに、 Q , N および M は、それぞれ、せん断力、軸力、および曲げモーメントである。また、 p^* および q^* は変形後の微小要素に作用する法線および接線方向強度であり、 m^* は分布モーメント荷重強度である。

アーチ部材軸のひずみを ε_0 とすれば、変形前後の微小要素 ds , ds^* に関して次の関係が成立する。

$$ds^* = (1 + \varepsilon_0)ds \quad (4)$$

$$ds = R d\phi \quad (5)$$

$$ds^* = R^* d\phi^* \quad (6)$$

また、アーチに作用する荷重の変形前微小要素 ds の法線および接線方向強度を p および q とし、分布モーメント荷重を m とすれば、 p^* , q^* , m^* と p , q , m との間には次の関係が成立する。

$$p^* = (p \cos \theta - q \sin \theta) \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \quad (7)$$

$$q^* = (p \sin \theta + q \cos \theta) \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \quad (8)$$

$$m^* = \frac{m}{1 + \varepsilon_0} \quad (9)$$

ここに、 θ はアーチ部材の接線回転角である。

次に微小要素の変形前後の曲率半径 R , R^* 間の関係が次のごとく求められる。微小要素 ds において、

$$\frac{1}{R^*} = \frac{d\phi^*}{ds^*} = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \frac{d\phi^*}{ds} \quad (10)$$

が成立し、また図-1より $d\phi^* = d\theta + d\phi$ なる関係が得られるゆえ

$$\frac{d\phi^*}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{R} \quad (11)$$

となる。(10) および (11) の両式より、 R , R^* 間の関係式として次式が誘導される。

$$\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{\varepsilon_0}{R} \right) \quad (12)$$

微小要素の変形前後における諸量関係式 (4) ~ (6), (7) ~ (9) および (12) を用いて、式 (1) ~ (3) を書き換えれば、変形前の状態における部材軸座標 s 、曲率半径 R 、および荷重強度 p , q , m で表わされた、次のごとき有限変形平衡方程式が求られる。

$$\frac{dQ}{ds} + (1 + R \frac{d\theta}{ds}) \frac{N}{R} + p \cos \theta - q \sin \theta = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dN}{ds} - (1 + R \frac{d\theta}{ds}) \frac{Q}{R} + p \sin \theta + q \cos \theta = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dM}{ds} - (1 + \varepsilon_0)Q - m = 0 \quad (15)$$

(2) 増分形平衡方程式

有限変形平衡方程式 (13) ~ (15) に基づいて、法線および接線方向荷重 p , q 、分布モーメント荷重強度 m なる初期荷重に対する平衡条件は次式で与えられる。

$$\frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} + p = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} + q = 0 \quad (17)$$

$$\frac{dM}{ds} - Q - m = 0 \quad (18)$$

次に、十分小さな増分荷重 Δp , Δq , Δm の負荷により、荷重状態がわずかに変化し、 $p + \Delta p$, $q + \Delta q$, $m + \Delta m$ なる荷重状態になった場合の断面力を、 $Q + \Delta Q$, $N + \Delta N$, $M + \Delta M$ とし、その時に生じるアーチの軸線回転角、接線方向変位および法線方向変位を、それぞれ、 $\Delta \theta$, Δw および Δu とする。このとき、初期荷重 p , q , m に対する平衡位置からの変位を考慮した微小要素の平衡条件は、有限変形平衡方程式 (13) ~ (15) を応用することにより、増分荷重 Δp , Δq , Δm に対する有限変形平衡方程式は次のように書き表わすことができる。

$$\frac{d(Q + \Delta Q)}{ds} + (1 + R \frac{d\Delta \theta}{ds}) \frac{N + \Delta N}{R} + (p + \Delta p) \cos \Delta \theta - (q + \Delta q) \sin \Delta \theta = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d(N + \Delta N)}{ds} - (1 + R \frac{d\Delta \theta}{ds}) \frac{Q + \Delta Q}{R} + (p + \Delta p) \sin \Delta \theta + (q + \Delta q) \cos \Delta \theta = 0 \quad (20)$$

$$\frac{d(M + \Delta M)}{ds} - (1 + \Delta \varepsilon_0)(Q + \Delta Q) - (m + \Delta m) = 0 \quad (21)$$

従って、式 (19) ~ (21) から式 (16) ~ (18) の辺々を差し引けば、荷重増分 Δp , Δq , Δm に対する断面力増分 ΔQ , ΔN , ΔM を規定とする微分方程式として次のごとく、増分形平衡方程式が求められる。

$$\frac{d\Delta Q}{ds} + \frac{\Delta N}{R} + N \frac{d\Delta \theta}{ds} - q \Delta \theta + \Delta p + \Delta p_c = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d\Delta N}{ds} - \frac{\Delta Q}{R} - Q \frac{d\Delta \theta}{ds} + p \Delta \theta + \Delta q + \Delta q_c = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d\Delta M}{ds} - \Delta Q - Q \Delta \varepsilon_0 - \Delta m - \Delta m_c = 0 \quad (24)$$

ここに、 $\Delta \varepsilon_0$ はサンドイッチアーチ部材軸のひずみ増分である。また Δp_c , Δq_c , Δm_c は、各増分段階にお

ける不平衡力の項である。

(3) サンドイッチアーチの断面力と変位の関係式

図-2に示すように、下表面材、上表面材に作用するせん断力を Q_1, Q_2 、軸力を N_1, N_2 、曲げモーメントを M_1, M_2 、また、コアに作用するせん断応力を τ とすると、アーチ全断面に作用するせん断力、軸力、曲げモーメントの関係式は、次のように求められる。

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + hb\Delta\tau \quad (25)$$

$$\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta M &= \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta N_1 d_1 - \Delta N_2 d_2 \\ &= \Delta M_1 + \Delta M_2 - \Delta N d_2 + \Delta N_1 H \end{aligned} \quad (27)$$

また、下表面材、上表面材に関するたわみ角を θ_1, θ_2 、接線方向変位を w_1, w_2 、法線方向変位を u_1, u_2 、とすると、アーチ軸線に関するたわみ角、接線方向変位、法線方向変位の関係式は、次のように求められる。

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta \quad (28)$$

$$d_2 w_1 + d_1 w_2 = H w \quad (29)$$

$$u_1 = u_2 = u \quad (30)$$

ここに、 d_1, d_2 は、サンドイッチアーチの図心軸から上下表面材の図心までの距離、 H は、上下表面材の図心間の距離、 h はコアの厚さを表わし、 $d_1 + d_2 = H$ 、 $d_2 = (E_1 A_1 / E_2 A_2) d_1$ なる関係がある。

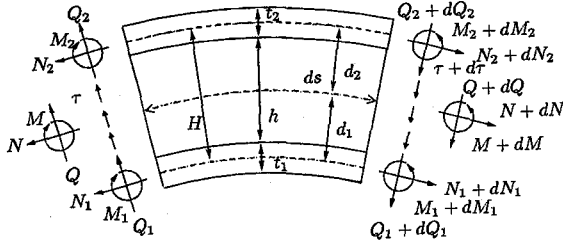


図-2 サンドイッチアーチの微小要素

(4) アーチ軸線における断面力と変位の関係式

微小ひずみと平面保持のもとに、各荷重増分段階における断面力と変位の関係を導く。アーチ部材の任意断面における曲率変化および図心の軸方向ひずみの変化を、各々、 $\Delta\kappa (= 1/R^* - 1/R)$ 、式(12)参照)および $\Delta\epsilon_0$ とすれば、断面内任意点の軸方向ひずみ $\Delta\epsilon$ は、図心からの距離を y として、

$$\Delta\kappa = \frac{d\Delta\theta}{ds} - \frac{\Delta\epsilon_0}{R} \quad (31)$$

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) + y \frac{d\Delta\theta}{ds} \quad (32)$$

にて表わされる。したがって、軸力 ΔN および曲げモーメント ΔM は、次の各式にて与えられることになる。ここで、アーチ橋梁におけるアーチ部材のように、十分細長い大半径のアーチにおいては、 $y/R \ll 1$ であることから無視できるものとする。

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_0 + y \frac{d\Delta\theta}{ds} \quad (33)$$

$$\Delta N = \Delta\epsilon_0 \left(\int E dA \right) + \frac{d\Delta\theta}{ds} \left(\int E y dA \right) \quad (34)$$

$$\Delta M = -\Delta\epsilon_0 \left(\int E y dA \right) - \frac{d\Delta\theta}{ds} \left(\int E y^2 dA \right) \quad (35)$$

一方、サンドイッチアーチのせん断力と変形の間には、平均せん断ひずみの概念にもとづく近似関係の誘導が可能である。すなわち、アーチの変形において、せん断ひずみの影響を厳密に考慮すれば、変形前に部材軸に垂直であった断面は変形後は平面を保持できず曲面状となるゆえ、平均せん断ひずみを用いて、その曲面を平均的な平面に置き換えたせん断変形を考えるものとする。

平均せん断ひずみを $\Delta\gamma_a$ とし、これに対応するせん断応力（以下、相当せん断応力と称する。）を $\Delta\tau_a$ とすれば、相当せん断応力 $\Delta\tau_a$ は、平均せん断応力 $\Delta Q/A$ にせん断補正係数 $\tilde{\kappa}$ を乗じた形で与えられ、次の関係が成立する。

$$\Delta\gamma_a = \frac{\Delta\tau_a}{G}, \quad \Delta\tau_a = \tilde{\kappa} \frac{\Delta Q}{A} \quad (36)$$

ここに、 G はせん断弾性係数であり、せん断補正係数 $\tilde{\kappa}$ は断面の形状寸法のみにより定まる定数である。

せん断補正係数 $\tilde{\kappa}$ の値は、通常、相当せん断応力 $\Delta\tau_a$ および真のせん断応力 $\Delta\tau$ により、部材に蓄えられるひずみエネルギーが等価になるように定められ、矩形断面においては $\tilde{\kappa} = 1.2$ となる。

次に、せん断力によるたわみ角 $\Delta\theta_s$ は、近似的に図心におけるせん断ひずみに等しいとみなすことが可能であるゆえ、

$$\Delta\theta_s = \Delta\gamma_a = \tilde{\kappa} \frac{\Delta Q}{GA} \quad (37)$$

が成立する。したがって、サンドイッチアーチ軸の全たわみ角 $(d\Delta u/ds + \Delta w/R)$ は、曲げモーメントおよびせん断力によるたわみ角 $\Delta\theta$ および $\Delta\theta_s$ の和に等しいことから、所要の関係式が次のごとく求められる。

$$\Delta Q = \frac{GA}{\tilde{\kappa}} \left(\frac{d\Delta u}{ds} + \frac{\Delta w}{R} - \Delta\theta \right) \quad (38)$$

(5) サンドイッチアーチの上・下表面材における断面力と変位の関係式

下・上表面材の曲率半径を R_1, R_2 とすると、上・下表面材の軸力と変位の関係から次式が得られる。

$$\Delta N_1 = \Delta\epsilon_1 \int E_1 dA_1 + \frac{d\Delta\theta}{ds_1} \int E_1 y_1 dA_1 \quad (39)$$

$$\Delta N_2 = \Delta\epsilon_2 \int E_2 dA_2 + \frac{d\Delta\theta}{ds_2} \int E_2 y_2 dA_2 \quad (40)$$

式(39)より次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_1} \frac{d\Delta\theta}{ds} \int E_1 y_1 dA_1 + \frac{R}{R_1} \frac{d\Delta w_1}{ds} \int E_1 dA_1 \\ = \frac{R}{R_1} \frac{\Delta u}{R} \int E_1 dA_1 + \Delta N_1 \end{aligned} \quad (41)$$

また、式(39)、(40)と、式(26)の関係から次式が導かれる。

$$\frac{R}{R_2} \frac{d\Delta\theta}{ds} \int E_2 y_2 dA_2 + \frac{H}{d_1} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta w}{ds} \int E_2 dA_2$$

$$-\frac{d_2}{d_1} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta w_1}{ds} \int E_2 dA_2$$

$$= \Delta N - \Delta N_1 + \frac{R}{R_2} \frac{\Delta u}{R} \int E_2 dA_2 \quad (42)$$

さらに、上・下表面材の曲げモーメントと変位の関係から次式が得られる。

$$\Delta M_1 = -\Delta \varepsilon_1 \int E_1 y_1 dA_1 - \frac{d\Delta \theta}{ds_1} \int E_1 y_1^2 dA_1 \quad (43)$$

$$\Delta M_2 = -\Delta \varepsilon_2 \int E_2 y_2 dA_2 - \frac{d\Delta \theta}{ds_2} \int E_2 y_2^2 dA_2 \quad (44)$$

上の2式を式(27)に代入することにより、次式が導かれる。

$$\left(\frac{R}{R_1} \int E_1 y_1^2 dA_1 + \frac{R}{R_2} \int E_2 y_2^2 dA_2 \right) \frac{d\Delta \theta}{ds}$$

$$+ \frac{H}{d_1} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta w}{ds} \int E_2 y_2 dA_2 +$$

$$\left(\frac{R}{R_1} \int E_1 y_1 dA_1 - \frac{d_2}{d_1} \frac{R}{R_2} \int E_2 y_2 dA_2 \right) \frac{d\Delta w_1}{ds}$$

$$= -d_2 \Delta N - \Delta M + H \Delta N_1 +$$

$$\left(\frac{R}{R_1} \int E_1 y_1 dA_1 + \frac{R}{R_2} \int E_2 y_2 dA_2 \right) \frac{\Delta u}{R} \quad (45)$$

上・下表面材のせん断力と変位の関係式(38)から次式が得られる。

$$\Delta Q_1 = \frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \left(\frac{d\Delta u}{ds_1} + \frac{\Delta w_1}{R_1} - \Delta \theta \right) \quad (46)$$

$$\Delta Q_2 = \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \left(\frac{d\Delta u}{ds_2} + \frac{\Delta w_2}{R_2} - \Delta \theta \right) \quad (47)$$

(6) コアのせん断応力と下表面材の軸力との関係式

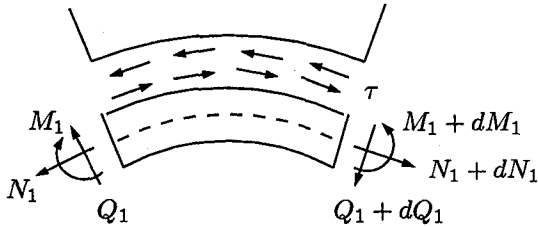


図-3 コアとフェイスプレートの関係

図-3を参照するとコアと下表面材の軸線方向の力のつり合いは次のように書ける。

$$\Delta N_1 + \frac{ds_1}{R_1} \Delta Q_1 + \Delta \tau b ds_1 - (\Delta N_1 + d\Delta N_1) = 0$$

上式より次式が得られる。

$$\frac{d\Delta N_1}{ds} = \frac{\Delta Q_1}{R} + \frac{R_1}{R} b \Delta \tau \quad (48)$$

また、コアのせん断応力は次式で与えられる。

$$\Delta \tau = \frac{G}{h} \left\{ H \frac{d\Delta u}{ds} + \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \Delta w_1 - \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \Delta w_2 \right\} \quad (49)$$

式(46), (47), (49)を式(25)に代入すると次式が得られる。

$$\left(\frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{R}{R_1} + \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \frac{R}{R_2} + GHb \right) \frac{d\Delta u}{ds} \quad (50)$$

$$= \Delta Q + \left(\frac{G_1 A_1}{\kappa_1} + \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \right) \Delta \theta$$

$$- \frac{H}{d_1} \left\{ \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \frac{1}{R_2} - Gb \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \right\} \Delta w -$$

$$\left\{ \frac{G_1 A_1}{\kappa_1 R_1} - \frac{d_2}{d_1} \frac{G_2 A_2}{\kappa_2 R_2} + Gb \left(\frac{H}{d_1} + \frac{d_1 - d_2}{d_1} \frac{h}{2R} \right) \right\} \Delta w_1$$

また、式(48), (46), (49)から次式が得られる。

$$\left(\frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R_1} + Gb \frac{H}{h} \frac{R_1}{R} \right) \frac{d\Delta u}{ds} - \frac{d\Delta N_1}{ds} \quad (51)$$

$$= \frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R} \Delta \theta + G \frac{H}{d_1} \frac{b}{h} \frac{R_1}{R} \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \Delta w -$$

$$\left\{ \frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R} \frac{1}{R_1} + G \frac{b}{h} \frac{R_1}{R} \left(\frac{H}{d_1} + \frac{d_1 - d_2}{d_1} \frac{h}{2R} \right) \right\} \Delta w_1$$

なお、コアと上表面材との関係式は、上記の式を用いて書き表わすことができ、また、以降の基礎微分方程式では下表面材の関係式を用いて表わすことができるのでここでは省略した。

(7) サンドイッチアーチの基礎微分方程式

以上より、サンドイッチアーチの複合非線形性を考慮した増分形基礎微分方程式は以下ようになる。

$$\frac{d\Delta Q}{ds} + \frac{\Delta N}{R} + N \frac{d\Delta \theta}{ds} - q \Delta \theta + \Delta p + \Delta p_c = 0 \quad (52)$$

$$\frac{d\Delta N}{ds} - \frac{\Delta Q}{R} - Q \frac{d\Delta \theta}{ds} + p \Delta \theta + \Delta q + \Delta q_c = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d\Delta M}{ds} - \Delta Q - Q \Delta \varepsilon_0 - \Delta m - \Delta m_c = 0 \quad (54)$$

$$\left(\alpha_1 E_1 I_1 \frac{R}{R_1} + \alpha_2 E_2 I_2 \frac{R}{R_2} \right) \frac{d\Delta \theta}{ds} + \gamma_2 \frac{E_2 I_2}{l} \frac{H}{d_1} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta w}{ds}$$

$$+ \left(\gamma_1 \frac{E_1 I_1}{l} \frac{R}{R_1} - \gamma_2 \frac{E_2 I_2}{l} \frac{d_2}{d_1} \frac{R}{R_2} \right) \frac{d\Delta w_1}{ds}$$

$$= -d_2 \Delta N - \Delta M$$

$$+ \left(\gamma_1 \frac{E_1 I_1}{l} \frac{R}{R_1} + \gamma_2 \frac{E_2 I_2}{l} \frac{R}{R_2} \right) \frac{\Delta u}{R} + H \Delta N_1 \quad (55)$$

$$\gamma_2 \frac{E_2 I_2}{l} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta \theta}{ds} + \beta_2 E_2 A_2 \frac{H}{d_1} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta w}{ds}$$

$$- \beta_2 E_2 A_2 \frac{d_2}{d_1} \frac{R}{R_2} \frac{d\Delta w_1}{ds}$$

$$= \Delta N + \beta_2 E_2 A_2 \frac{R}{R_2} \frac{\Delta u}{R} - \Delta N_1 \quad (56)$$

$$\left(\frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{R}{R_1} + \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \frac{R}{R_2} + GHb \right) \frac{d\Delta u}{ds}$$

$$= \Delta Q + \left(\frac{G_1 A_1}{\kappa_1} + \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \right) \Delta \theta - \frac{H}{d_1} \left\{ \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \frac{1}{R_2} \right.$$

$$- Gb \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \left. \right\} \Delta w - \left\{ \frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R_1} - \frac{d_2}{d_1} \frac{G_2 A_2}{\kappa_2} \frac{1}{R_2} \right.$$

$$+ Gb \left(\frac{H}{d_1} + \frac{d_1 - d_2}{d_1} \frac{h}{2R} \right) \left. \right\} \Delta w_1 \quad (57)$$

$$\left(\frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R_1} + Gb \frac{H}{h} \frac{R_1}{R} \right) \frac{d\Delta u}{ds} - \frac{d\Delta N_1}{ds}$$

$$= \frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R} \Delta \theta + G \frac{H}{d_1} \frac{b}{h} \frac{R_1}{R} \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \Delta w$$

$$- \left\{ \frac{G_1 A_1}{\kappa_1} \frac{1}{R_1} + G \frac{b}{h} \frac{R_1}{R} \left(\frac{H}{d_1} + \frac{d_1 - d_2}{d_1} \frac{h}{2R} \right) \right\} \Delta w_1 \quad (58)$$

$$\gamma_1 \frac{E_1 I_1}{l} \frac{R}{R_1} \frac{d\Delta \theta}{ds} + \beta_1 E_1 A_1 \frac{R}{R_1} \frac{d\Delta w_1}{ds}$$

$$= \beta_1 E_1 A_1 \frac{R}{R_1} \frac{\Delta u}{R} + \Delta N_1 \quad (59)$$

ここで、 $\Delta p_c, \Delta q_c, \Delta m_c$ (Appendix 参照) は不平衡力項であり、また、下・上表面材の断面2次モーメントを

I_1, I_2 , 弾性係数を E_1, E_2 , 断面積を A_1, A_2 , せん断弾性係数を G_1, G_2 , せん断補正係数を κ_1, κ_2 であり, b は奥ゆきを示す。また, α, β, γ , は

$$\alpha = \frac{\int E_t y^2 dA}{EI_0}, \quad \beta = \frac{\int E_t dA}{EA_0}, \quad \gamma = \frac{l \int E_t y dA}{EI_0} \quad (60)$$

であり, それぞれ断面内の塑性域の拡大に伴う曲げ剛性および伸び剛性の低下率と断面1次モーメントの無次元量を示している。ここで, E_t は, 材料の応力ひずみ関係における接線係数である。なお, 弾性解析の場合は $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$ となる。

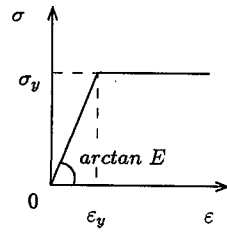


図-4 応力 - ひずみ関係

上記の増分形基礎方程式 (52)~(59) を用いて, アーチ軸線形状の変化に基づく幾何学的非線形および断面の非弾性化に基づく材料非線形を考慮した変断面任意形サンドイッチアーチの複合非線形解析を行うことができる。

(8) 離散的一般解

式 (52) ~ (59) の基礎微分方程式を積分方程式へ変換し, 積分方程式の近似解法を応用することにより, アーチ軸等分点あるいはアーチ支間等分点に対応するアーチ軸分割点に関する基礎微分方程式の離散的な一般解が求められる。

アーチ軸長, アーチ支間, 基準断面2次モーメントおよび基準断面積をそれぞれ l, L, I_0 および A_0 として,

$$X_1 = -l^2 \Delta Q / EI_0, \quad X_2 = -l^2 \Delta N / EI_0$$

$$X_3 = -l \Delta M / EI_0, \quad X_4 = \Delta \theta, \quad X_5 = \Delta w / l$$

$$X_6 = \Delta u / l, \quad X_7 = \frac{h}{GHbl} \Delta N_1, \quad X_8 = \frac{1}{H} \Delta w_1, \quad \eta = s / l$$

なる無次元量 X_t および無次元座標 η を導入すれば, 基礎微分方程式 (52)~(59) は次式のように整理される。

$$\Delta X_{pi} = \sum_{d=1}^8 a_{pid} \Delta X_{d0} + q_{pi} \quad (p = 1 \sim 8) \quad (61)$$

$$a_{pid} = \sum_{t=1}^8 A_{pt} a_{t0d} + \sum_{t=1}^8 \sum_{f=0}^{i-1} \frac{\alpha_{if}}{\cos \phi_f} B_{pt} a_{tfd}$$

$$q_{pi} = \sum_{t=1}^8 A_{pt} q_{t0} + \sum_{t=1}^8 \sum_{f=0}^{i-1} \frac{\alpha_{if}}{\cos \phi_f} B_{pt} q_{tf}$$

$$+ \sum_{f=0}^i \frac{\alpha_{if}}{\cos \phi_f} \{ (\Delta \bar{p}_c + \Delta \bar{p} \Delta p_0) \gamma_{p1} + (\Delta \bar{q}_c + \Delta \bar{q} \Delta p_0) \gamma_{p2} - (\Delta \bar{r}_c + \Delta \bar{r} \Delta p_0) \gamma_{p3} \}$$

ここに, $A_{pt}, B_{pt}, \gamma_{pt}$ は基礎微分方程式中の X_{pi} の係数である。また, a_{pid}, q_{pi} は伝達マトリクス法における伝達マトリクスに相当するものである。なお, 式 (52)~(59) から式 (61) の誘導過程は文献 8) を参照されたい。

式 (61) が式 (52)~(59) の基礎微分方程式の離散的一

般解である。式中 ΔX_0 は未知量で, $s = 0$ なる点の断面力 ($\Delta Q, \Delta N, \Delta M, \Delta N_1$), 変形量 ($\Delta \theta, \Delta w, \Delta u, \Delta w_1$) を表わす。これらの未知量は $s = l$ なる点の境界条件を用いて決定することができる。

式 (61) を用いて, 種々の境界条件, 荷重条件および曲率を有するサンドイッチアーチの複合非線形解析を行うことができる。

3. 弾塑性有限変形解析

アーチ構造はその曲率そのものに力学的合理性を依存した形態抵抗系構造であるが, そのために軸力抵抗系に特有な全体座屈の危険性や大変形が生じやすい。この全体座屈現象および複合材料からなるサンドイッチアーチの耐荷力特性を調べることを目的として, フェイスプレートの弾性係数 E とコアのせん断弾性係数 G の比 G/E をパラメータとして解析を行なった。

表-1 解析における諸量

形状	2 ヒンジ円弧アーチ 2 ヒンジ放物線アーチ
アーチ軸長	71.12 cm
ライズスパン比 (f/L)	0.15
コア (心材厚)	1.27 cm
フェイスプレート (表面材厚)	0.04572 cm
表面材弾性係数	2.1×10^6 kgf/cm ²
材料定数 E/σ_y	875
せん断補正係数 κ	1.2

3.1 解の収束性と精度

サンドイッチアーチの複合非線形解析において, 離散的一般解に基づく本解析法による数値解の収束性の検証を目的として, 軸方向における有効な分割数 m を算出するために, m をパラメータとして解析を行なった。ライズ-スパン比 $f/L = 0.15$ をもつ2ヒンジ円弧アーチにデッキ荷重を満載した荷重-変位曲線の収束性を図-5に示す。図-5中の変位の無次元量 u_c/L は, アーチクラウン部の鉛直変位である。同図より, 分割数 $m = 48$ のとき十分な精度で収束していることがわかる。座屈後の不安定挙動を追跡解析するために, 分割数 $m = 48$ として解析を進める。

3.2 弾性有限変形解析

アーチ形状を円弧, 放物線の2つとし, デッキ荷重全載荷の状態で解析を行なった。解析を行なうにあたって, K.M.Ahmed の文献¹⁾ を参考にして表-1の諸量を用いた。なお数値解析では, 軸方向の分割数 $m = 48$ で微小変位増分で行った。

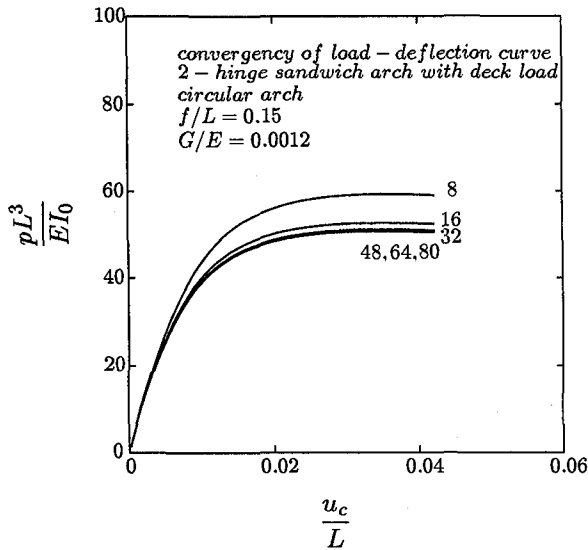


図-5 荷重 - 変位曲線

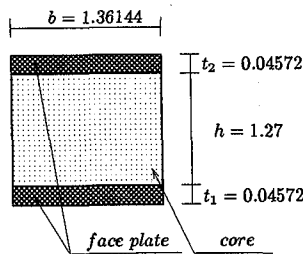


図-6 断面形状

図-7は、2 ヒンジ円弧アーチにデッキ荷重が全載荷した場合の G/E をパラメータとした荷重 - 変位曲線である。ここで、変位はアーチクラウン部の変位である。同図から、 G/E の値によって荷重 - 変位曲線の経路が異なっており、 G/E が大きくなると変形は小さくなることからわかる。これは、2 ヒンジ円弧アーチに全載荷デッキ荷重が作用する場合は純軸圧縮状態とならず、曲げおよびせん断が発生し、 G/E が大きくなると、曲げおよびせん断に対する抵抗負担率が大きくなるからである。

図-8は、2 ヒンジ放物線アーチに全載荷デッキ荷重を受ける場合の荷重 - 変位曲線である。放物線アーチの場合は、円弧アーチの場合と異なり、分岐座屈荷重に至るまでの経路は G/E にかかわらず同じ経路をとることがわかる。これは、2 ヒンジ放物線アーチに全載荷デッキ荷重を受ける場合には、曲げおよびせん断は生じず、軸圧縮のみで外力に抵抗するからである。

また、分岐座屈荷重は、円弧アーチおよび放物線アーチともに、 G/E の増加とともに同程度に増加している。さらにフェイスプレートの弾性係数 E とコアのせん断弾性係数 G の比 G/E を 0.1 とすると、I 形断面とほぼ同等の耐荷力特性をもつことがわかる。

これらの結果より、サンドイッチアーチの分岐座屈荷

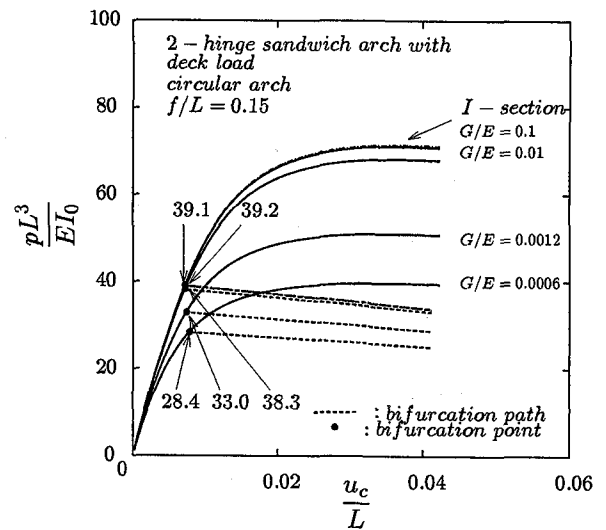


図-7 荷重 - 変位曲線

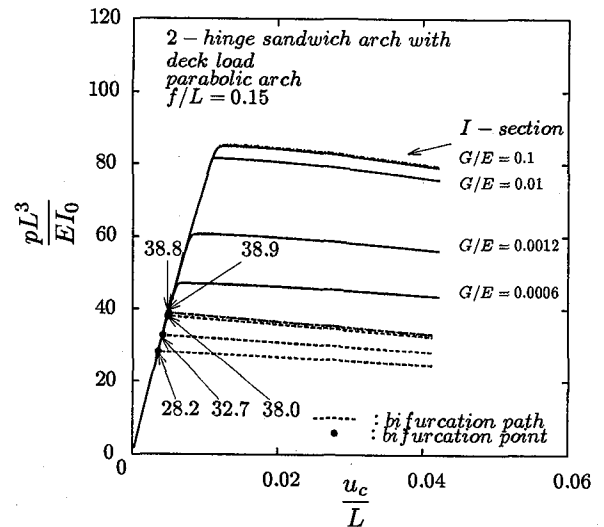


図-8 荷重 - 変位曲線

重はコアのせん断弾性係数の大きさに左右されることがわかる。これは、せん断弾性係数が小さくなるとコアが軸力とせん断力によるせん断変形の影響を受けやすくなるためと思われる。なお両図においては、分岐座屈経路を点線で、弾性座屈経路を実線で示す。

3.3 弾塑性有限変形解析

図-9は、2 ヒンジ円弧アーチにデッキ荷重が全載荷した場合の弾塑性有限変形解析を行った結果の荷重 - 変位曲線である。なお、断面諸量は 3.1 と同様のものを用いた。同図では、上・下面の両フェイスプレートがほぼ同時に初期降伏を起こし、また、薄肉であるため、その時点でフェイスプレートの全断面が塑性に至り、終局状態となる。

図-9の解析例では、フェイスプレートの断面積が全体の 7%(上下面 3.5%) と非常に薄い断面形状となっており、そのため塑性開始後すぐに全断面塑性化に至るものと考えられる。

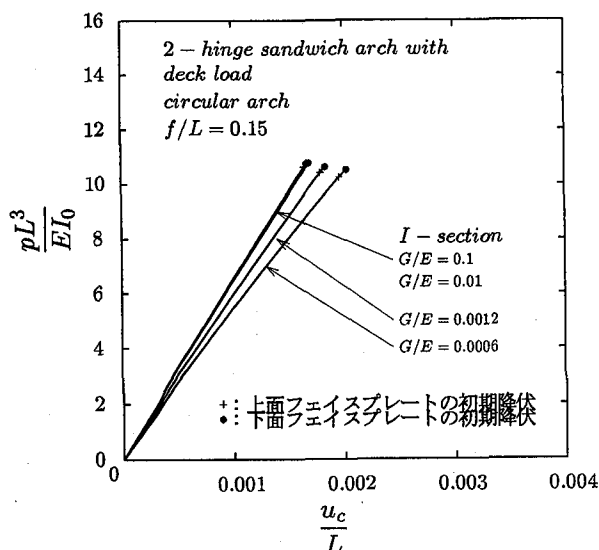


図-9 荷重-変位曲線

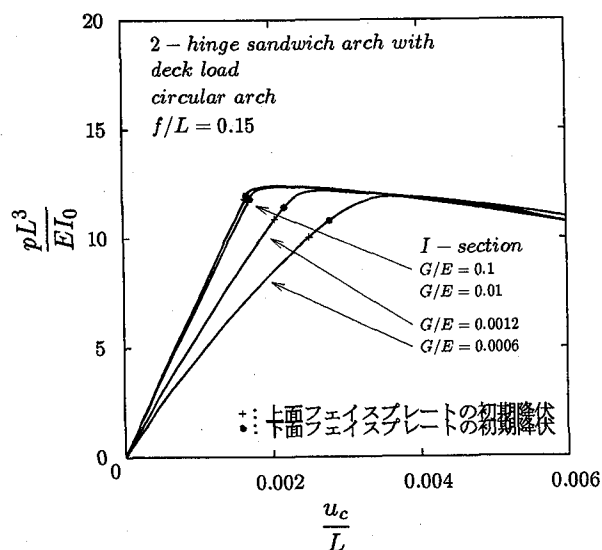


図-10 荷重-変位曲線

そこで、フェイスプレートの断面積を全体の20%(上下面10%)として計算を行なった。その他の諸量は3.1と同様である。その結果を図-10に示す。フェイスプレートの断面積を上下面10%とすると、塑性開始後および分岐座屈後の変形挙動を追跡することができる。

なお、弾塑性有限変形解析においては、塑性開始前付近では変位増分を小さくし、また、フェイスプレートの塑性化に伴う剛性の評価には断面細分割法(30分割)を用いて行った。

4. まとめ

本論文で得られた結果は次のようにまとめられる。

1. 有限変形平衡方程式から、サンドイッチアーチの幾何学的非線形解析を可能とする増分平衡方程式を導き、また材料非線形解析を可能とする増分基礎微分方程式を導いた。
2. 基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、基礎微分方程式の離散的な一般解が求められ、これに基づく、さまざまな軸形態や、境界条件、荷重条件などを有するサンドイッチアーチの複合非線形解析を行なうことができる解析法を提示した。
3. 円弧、放物線の軸線を有する2ヒンジアーチにデッキ荷重が全載荷した場合の複合非線形解析結果を取り挙げた。その解析結果から、サンドイッチ構造の耐荷力は、コアのせん断弾性係数の大きさに左右されることがわかった。
4. フェイスプレートの弾性係数 E とコアのせん断弾性係数 G の比 G/E を0.1 とすると、 I 形断面とほぼ同等の耐荷力特性をもつことがわかった。ここで、 I 形断面は、ウェブでせん断力を受けもち、フランジで曲げモーメントを負荷する構造形態であるが、サンドイッチ構造もコアがウェブに、フェイスプレートがフランジに相当する構造形態となっている。

5. あとがき

これからの課題としては任意形状の軸線を有するものや、アーチ形態として不利である、デッキ荷重が半載荷した場合などさまざまなパラメトリックな解析を行っていく予定である。また、サンドイッチアーチの複合非線形解析に関して、実験や他文献との比較検証を行って、本解析結果の妥当性を検討していく予定である。

Appendix

$$\Delta p_c = \Delta N \frac{d\Delta\theta}{ds} - \Delta q \Delta\theta + (p + \Delta p)(\cos\Delta\theta - 1) - (q + \Delta q)(\sin\Delta\theta - \Delta\theta)$$

$$\Delta q_c = -\Delta Q \frac{d\Delta\theta}{ds} + \Delta p \Delta\theta + (p + \Delta p)(\sin\Delta\theta - \Delta\theta) + (q + \Delta q)(\cos\Delta\theta - 1)$$

$$\Delta m_c = \Delta Q \Delta\epsilon_0$$

参考文献

- 1) K.M.Ahmed : Free vibration of curved sandwich beams by the method of finite elements, Journal of Sound and Vibration 18, pp61-74, 1971.
- 2) K.M.Ahmed : Dynamic analysis of sandwich beams, Journal of Sound and Vibration 21, pp263-276, 1972.
- 3) Parviz Sharifi and Egor P. Popov : Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Arches Proc. of

ASCE, Engineering Mechanics vol.97, No.5 pp.1397-1412, 1971.

- 4) Amir Mirmiran and Amde M. Wolde-Tinsae : Buckling and Postbuckling of Prestressed Sandwich Arches, Proc. of ASCE, Structural Engineering vol.119, No.1 pp.262-287, 1993.
- 5) Amir Mirmiran and Amde M. Wolde-Tinsae : Inelastic Buckling of Prestressed Sandwich or Homogeneous Arches , Proc. of ASCE, Structural Engineering vol.119, No.9 pp.2733-2743, 1993.

6) 山崎徳也著: 構造力学 I , 共立出版, 1970.

- 7) 崎山毅, 松田浩, 森田千尋 : Free Vibration Analysis of Continuous Sandwich Beams with Elastic or Viscoelastic Cores by Applying the Discrete Green Function, Journal of Sound and Vibration 第 198 号 pp.439-454, 1996
- 8) 崎山毅 : Geometrically Nonlinear Analysis of Nonuniform Arches of Any Shape, 土木学会論文集 第 289 号 pp.31-42, 1979.

(1999 年 9 月 18 日 受付)