

弾性地盤反力法に基づく杭の有限要素解析に関する基礎的研究

Fundamental study of finite element analysis of piles modeled by elastic subgrade-reaction method

山口栄輝*, 菊池喜昭**, 久保喜延***

Eiki YAMAGUCHI, Yoshiaki KIKUCHI and Yoshinobu KUBO

*Ph. D. 九州工業大学助教授 工学部建設社会工学科 (〒804-8550 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

**工修 運輸省港湾技術研究所 基礎工研究室長 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

***工博 九州工業大学教授 工学部建設社会工学科 (〒804-8550 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

A pile is often modeled as a beam on nonlinear elastic foundation so as to take the effect of subgrade reaction into account. Nevertheless, it is not an easy task to solve such a beam problem analytically. Recently, the performance-based design concept has been introduced and its possible inclusion in the design codes is being studied in the field of civil engineering. In this conjunction, the accurate evaluation of coefficient of subgrade reaction will become inevitable. Against these pieces of information, we propose two finite element formulations for the analysis of beams on nonlinear elastic foundation. One formulation is for the ordinary analysis where the deformation of a beam is computed. The other formulation is for the back analysis where the coefficient of subgrade reaction is determined while the deformation of a beam is given. The validity of the two formulations is demonstrated by solving numerical examples.

Key Words: pile, beam on nonlinear elastic foundation, FEM, back analysis

1. はじめに

杭の軸直角方向の支持力を考える際には、杭と地盤の関係を弾性床上の梁として取り扱うことが多い。この場合、地盤をばねとしてモデル化する必要がある。これまでの多くの室内実験や現地載荷試験などの結果から、一般的な地盤の場合、地盤ばねは深度とともに剛性が高くなり、また非線形であることが分かっている。しかしながら、そのような特性を取り込んだ弾性床上の梁の支配方程式を解析的に解くことは非常に困難である。そのため、久保¹⁾は相似則を用いて杭の変形挙動を算定する方法を提案した。この方法を用いることにより、杭の挙動を比較的容易に推定することが可能となったが、現実の複雑な問題への適用性にはやや欠ける面がある。

一方、これまでの研究により、地盤調査の結果から地盤ばねの定数を決定するいくつかの方法が基準類^{2), 3)}に示されている。しかし、その関係には比較的大きなばらつきがあるので、近年のように性能照査型設計の導入が検討され、高精度の地盤ばね定数の推定が要求されるようになると、既存の方法は必ずしも十分とは思われない。

精度良く地盤ばね定数を推定しようとする場合に

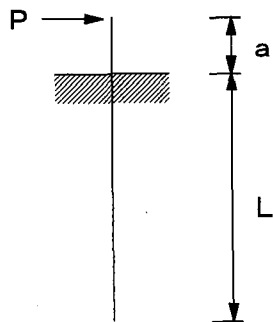
は、現地において載荷試験を実施することが望ましいと考えられる。杭地盤系のモデルを仮定して、地盤ばねから杭の挙動を求める方法が順解析的な手法であるとする、載荷試験結果から地盤ばね定数を推定するにはその逆解析的な手法を必要とする。この種の問題に対して、これまでは試行錯誤的に載荷試験結果から地盤ばね定数を求めることがなされてきたが、解析者の主観が入りやすく客観的な方法とは言えない面があった。

以上の点に鑑み、杭の横抵抗特性を考慮した設計精度の向上に資するための基礎的研究として、ここでは、弾性地盤反力法⁴⁾でモデル化した杭の有限要素法による解析法および載荷試験結果から地盤ばね定数を推定する逆解析手法を提示する。これらの解析法の有効性は、数値計算例により検証する。

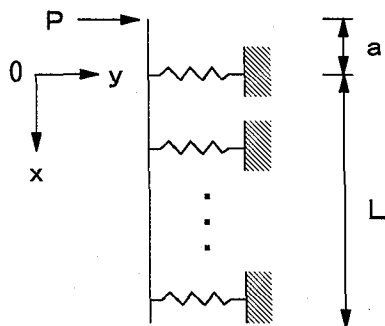
2. 杭の解析手法 (順解析)

2.1 境界値問題の設定

本研究では、杭頭に水平力 P が作用した杭 (図-1(a)) を解析する。杭の横抵抗特性を考慮するために、ここでは弾性地盤反力法 (弾性曲線法)⁴⁾を採用する。すなわち、地盤を弾性体と仮定し、梁の曲



(a) 杭頭に水平荷重 P が作用した杭



(b) 解析モデル

図-1 杭

げ理論を適用することにより杭の変形を求める。具体的には、図-1 (b) の非線形弾性床上の梁を解析対象とする。図中に x - y 座標系を示すが、 x 軸は原点を地表面に設定し、下向きを正の方向としている。したがって、 $x > 0$ が根入れ長部、 $x < 0$ が自由長部に対応する。

港湾構造物では、これまでの実測結果から、地盤を S 型地盤と C 型地盤に分け、S 型地盤の地盤反力 q については地中深さ x と杭の水平方向変位（たわみ） v を用いて次式で表されるとしてきている²⁾。

$$q = Bk_s x v^{1/2} \quad (1)$$

ここに、 B は杭の幅（奥行き長さ）、 k_s は地盤ばね定数（横抵抗定数）である。なお、 v は図-1 (b) の右向き（ y 軸の正方向）を正にとるが、逆向きの変位が生じた場合には、式(1)の平方根が評価できない。その際には、地盤反力 q の物理的意味に従い、 $-|v|^{1/2}$ で計算を行うものとする。本研究では S 型地盤を考慮の対象とするが、C 型地盤の地盤反力 q は式(1)から x を取り除いた数式で表されるため、本研究で提案する解析手法は、若干の修正を施すだけで C 型地盤

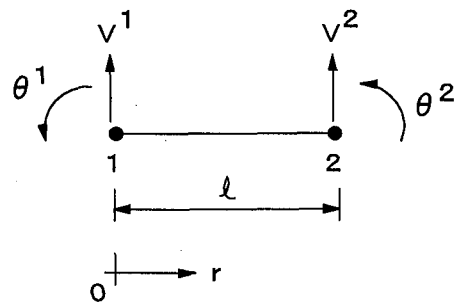


図-2 2節点梁要素

へも適用可能となる。

以上より、本研究で扱う境界値問題（図-1 (b)）は次のように表される。

$$EIv'''' + Bk_s x v^{1/2} = 0 \quad \text{for } -a < x < L \quad (2)$$

$$-EIv'' = 0, \quad EIv''' = P \quad \text{at } x = -a \quad (3)$$

$$EIv'' = 0, \quad -EIv''' = 0 \quad \text{at } x = L \quad (4)$$

ここに EI は杭の曲げ剛性、 a は自由長、 L は根入れ長、 $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$ である。なお、式(2)において、自由長部（ $-a < x < 0$ ）では $k_s = 0$ である。上記境界値問題はいわゆる通常の構造解析であり、4章で記す解析と区別する際には、順解析と呼ぶこととする。

2.2 有限要素定式化

(1) 基礎方程式

ここでは、重み付き残差法⁵⁾を用いて、2.1 に記述した境界値問題の有限要素解析の基礎式を導く。すなわち、次式をもとに有限要素定式化を行う。

$$G = \int_{-a}^L (EIv'''' + Bk_s x v^{1/2}) w dx - [EIv'''' w]_{x=L} + [EIv'' w']_{x=L} + [(EIv''' - P)w]_{x=-a} - [EIv'' w']_{x=-a} = 0 \quad (5)$$

ここに、 w は重み関数である。式(5)で部分積分を実行することにより、次の弱形式が導かれる。

$$G = \int_{-a}^L EIv'' w'' dx + \int_0^L Bk_s x v^{1/2} w dx - Pw(-a) = 0 \quad (6)$$

ここでは、通常の2節点梁要素（図-2）を用いて式(6)を離散化し、有限要素方程式を誘導する。要素内のたわみは、節点量を用いて次式のように表される。

$$v = N_v^1 v^1 + N_\theta^1 \theta^1 + N_v^2 v^2 + N_\theta^2 \theta^2 \quad (7)$$

ここに、 V^I 、 θ^I はそれぞれ節点 I のたわみ、たわみ角である。また形状関数は次のように定義される。

$$N_v^1 = 1 - \frac{3r^2}{\ell^2} + \frac{2r^3}{\ell^3} \quad (8)$$

$$N_\theta^1 = r - \frac{2r^2}{\ell} + \frac{r^3}{\ell^2} \quad (9)$$

$$N_v^2 = \frac{3r^2}{\ell^2} - \frac{2r^3}{\ell^3} \quad (10)$$

$$N_\theta^2 = -\frac{r^2}{\ell} + \frac{r^3}{\ell^2} \quad (11)$$

図-2に示しているように、 r は梁要素ごとに定義される局所座標、 ℓ は梁要素の長さである。また重み関数にも、式(7)と同じ形状関数を適用した次式を用いる。

$$w = N_v^1 W^1 + N_\theta^1 \eta^1 + N_v^2 W^2 + N_\theta^2 \eta^2 \quad (12)$$

ここに、 W^I 、 η^I はそれぞれ節点 I における重み w および重みの微係数 w' である。

式(7)、(12)を式(6)に代入すれば

$$G = \sum_{e=1}^n G^e - Pw(-a) = 0 \quad (13)$$

を得る。ここに n は要素数、また

$$G^e = (\mathbf{W}^e)^T (\mathbf{K}_{T1}^e \mathbf{U}^e + \mathbf{K}_2^e) \quad (14)$$

$$(\mathbf{W}^e)^T = \{W^1 \quad \eta^1 \quad W^2 \quad \eta^2\} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{T1}^e = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ \text{sym.} & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$(\mathbf{U}^e)^T = \{V^1 \quad \theta^1 \quad V^2 \quad \theta^2\} \quad (17)$$

$$(\mathbf{K}_2^e)^T = \left\{ \int_0^\ell F N_v^1 dr \quad \int_0^\ell F N_\theta^1 dr \quad \int_0^\ell F N_v^2 dr \quad \int_0^\ell F N_\theta^2 dr \right\} \quad (18)$$

$$F = Bk_s(x_1 + r) \left(N_v^1 V^1 + N_\theta^1 \theta^1 + N_v^2 V^2 + N_\theta^2 \theta^2 \right)^{1/2} \quad (19)$$

であり、 x_1 は節点 1 の x 座標である。本研究の有限要素解析では、地表面上に節点を必ず設けることにする。したがって、自由長部 ($-a < x < 0$) の要素で

は $\mathbf{K}_2^e$ は不要となる。

各要素において式(16)、(18)、(19)を計算し、式(14)の総和記号が示すように全体系に組み込めば、重み関数が任意であることから次式を得る。

$$\mathbf{K} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (20)$$

ここに、

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{T1} \mathbf{U} + \mathbf{K}_2 \quad (21)$$

$\mathbf{K}_{T1}$ 、 $\mathbf{K}_2$ は式(16)、(18)から構築される行列ないしベクトルである。 $\mathbf{R}$ は外力ベクトルであり、杭頭に位置する節点の水平力成分のみが非零値の P を有する。本研究では、外力として杭頭の水平力のみを考えているが、他の外力条件を扱った場合には、この外力ベクトル $\mathbf{R}$ がそれに応じて変化することになる。

式(20)を解くことにより、2.1 で設定された境界値問題の解、すなわち杭の変形が得られる。

(2) 線形化方程式

式(20)は非線形方程式であり、直接解くことはできない。そこで、本研究ではニュートン・ラプソン法を適用して解を求める。すなわち、次の線形方程式を繰り返し解くことにより、作用させた荷重に対応する変形を求める。

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{K} \quad (22)$$

ここに、

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{T1} + \mathbf{K}_{T2} \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_{T2}^e = \begin{bmatrix} \int_0^\ell F_T N_v^1 N_v^1 dr & \int_0^\ell F_T N_v^1 N_\theta^1 dr & \int_0^\ell F_T N_v^1 N_v^2 dr & \int_0^\ell F_T N_v^1 N_\theta^2 dr \\ \int_0^\ell F_T N_\theta^1 N_v^1 dr & \int_0^\ell F_T N_\theta^1 N_\theta^1 dr & \int_0^\ell F_T N_\theta^1 N_v^2 dr & \int_0^\ell F_T N_\theta^1 N_\theta^2 dr \\ \int_0^\ell F_T N_v^2 N_v^1 dr & \int_0^\ell F_T N_v^2 N_\theta^1 dr & \int_0^\ell F_T N_v^2 N_v^2 dr & \int_0^\ell F_T N_v^2 N_\theta^2 dr \\ \text{sym.} & & & \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$F_T = \frac{Bk_s}{2} (x_1 + r) \left(N_v^1 V^1 + N_\theta^1 \theta^1 + N_v^2 V^2 + N_\theta^2 \theta^2 \right)^{-1/2} \quad (25)$$

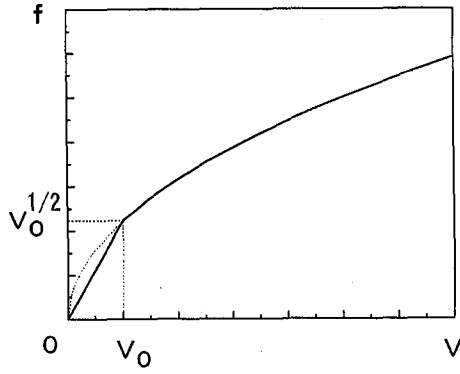


図-3 地盤反力の近似

ΔU は繰り返し計算時の節点変位修正量である。本解析では、この繰り返し計算の収束条件として次式を用いる。

$$\frac{\|\Delta U\|_2}{\|U\|_2} \leq e_1 \quad (26)$$

ここに e_1 は許容値である。

(3) 地盤反力の近似

式(25)の右辺2つめの()内はたわみを表すが、その値が微小の場合、 F_T が非常に大きな値となり、数値計算上の問題が生じる。これは、式(1)の地盤反力 q のたわみ v に関する導関数 q/v が $v=0$ で無限大となることに起因している。そこで、本解析では、式(1)のたわみに関する部分 $f=v^{1/2}$ を、原点近傍においては図-3に示すように一次関数で置換する。すなわち、次式で近似することとする。

$$f = \begin{cases} v_0^{-1/2}v & \text{for } 0 \leq v \leq v_0 \\ v^{1/2} & \text{for } v_0 < v \end{cases} \quad (27)$$

これに伴い、式(19)、(25)は次のように修正される。

$$F = \begin{cases} Bk_s(x_1+r)v_0^{-1/2}(N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2) & \text{for } 0 \leq (N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2) \leq v_0 \\ Bk_s(x_1+r)(N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2)^{1/2} & \text{for } v_0 < (N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2) \end{cases} \quad (28)$$

表-1 近似領域 v_0 の影響

v_0	v_{top}
1 cm	4.7753 cm
1×10^{-1}	4.4174
1×10^{-2}	4.3816
1×10^{-3}	4.3804
1×10^{-5}	4.3804
1×10^{-10}	4.3804
1×10^{-15}	4.3804

$$F_T = \begin{cases} Bk_s(x_1+r)v_0^{-1/2} & \text{for } 0 \leq (N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2) \leq v_0 \\ \frac{Bk_s}{2}(x_1+r)(N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2)^{-1/2} & \text{for } v_0 < (N_v^1V^1+N_\theta^1\theta^1+N_v^2V^2+N_\theta^2\theta^2) \end{cases} \quad (29)$$

3. 数値計算例 (順解析)

2章の定式化に基づいて杭の解析を行い、地盤反力の近似領域 v_0 、要素数、有効性について検討した。計算例には杭幅 $B=20\text{cm}$ 、曲げ剛性 $EI=3 \times 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$ 、自由長 $a=22.5\text{cm}$ 、根入れ長 $L=200\text{cm}$ の杭を取り上げた。地盤ばね定数 k_s は 0.05 kgf/cm^3 、式(26)の収束条件の許容値 e_1 は 10^{-10} とし、すべての計算例で Sun SPARCstation 2 を使用して倍精度計算を行った。なお、式(18)、(24)の積分には、8点のガウス積分公式を用いることとした。

3.1 近似領域 v_0

線形挙動する自由長部を1、根入れ長部は50の計51要素で杭を要素分割した上で、近似領域 v_0 を変化させて解析を行った。近似領域 v_0 は、数値計算上の問題を回避するために導入しており、解析結果には多大な影響を及ぼさないよう設定する必要がある。ここでの解析は、近似領域 v_0 を適切に設定するために必要な情報の収集を目的とするものである。

杭頭に作用させる水平荷重 P を 200tf とし、得られた杭頭たわみ v_{top} を表-1にまとめている。これより、近似領域を $v_0=1 \times 10^{-3}\text{cm}$ 以下に設定すれば、5桁まで一致した結果の得られることが理解される。さらに、101個の要素で同様の検討を行ったが、この場合にも、近似領域を $v_0=1 \times 10^{-3}\text{cm}$ 以下に設定すればよいとの結果を得た。また、いずれの場合でも、

表-2 要素分割の影響

要素数	v_{top}
6	4.3238 cm
11	4.3783
51	4.3804
81	4.3805
101	4.3805
201	4.3805

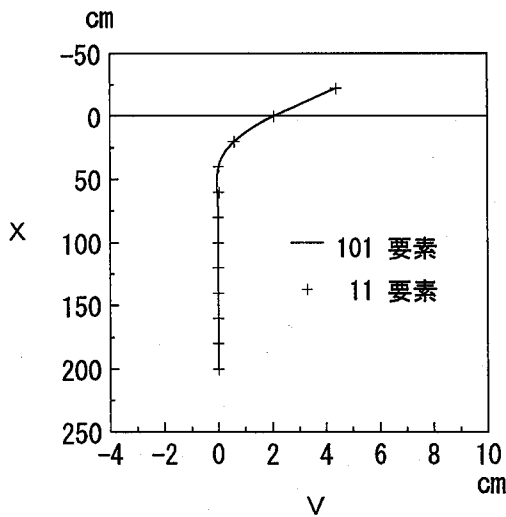


図-4 杭の変形解析結果

$v_0 = 1 \times 10^{-15}$ cm 程度の小さな領域を設定しても、数値計算上の問題は生じなかった。なお、当然のことではあるが、 $v_0 = 0$ cm では解は得られなかった。

3.2 要素数

離散化に伴う誤差を調べるために、根入れ長部の要素分割数を変化させ、 $v_0 = 1 \times 10^{-10}$ cm として前節と同じ解析を行った。得られた杭頭たわみ v_{top} を表-2に示している。この表より、要素数を増加すればたわみは収束し、要素分割数を 51 以上にすれば4桁まで、81 以上にすれば5桁まで収束解と一致した結果の得られることが分かる。また、要素分割が6の場合で誤差は 1.3%、11 の場合で 0.05%に過ぎず、実用上は、かなり少ない要素数でも十分と思われる。要素数 101 で解析した場合の杭の変形図を、11 要素で得られた節点たわみとともに図-4に示している。11 要素でも杭の全長にわたって十分精度良い結果の得られることが、この図から理解される。

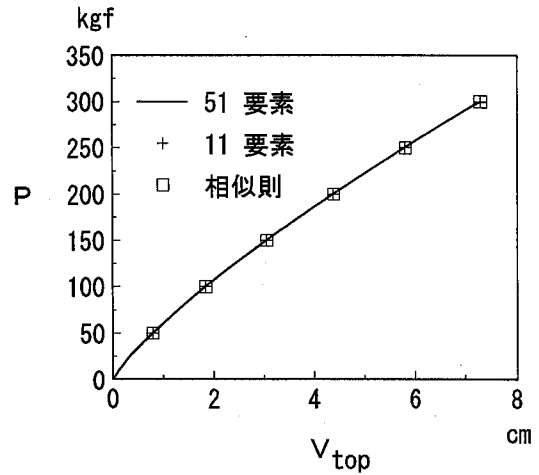


図-5 荷重-たわみ曲線

3.3 有効性

荷重 P を漸次増加させながら杭の変形を追跡した。この解析では 11 個と 51 個の要素を用い、近似領域を $v_0 = 1 \times 10^{-10}$ cm とした。得られた杭頭での荷重 P - たわみ v_{top} 曲線を図-5に示している。地盤反力がたわみの大きさに応じて変化するため、荷重-たわみ関係は非線形となっているが、2種類の要素分割による解析結果は互いによく一致している。

同じ問題を、久保の提案した相似則による計算法^{1), 2)}でも解き、結果を図-5に示している。この図から分かるように、本解析結果は相似則による解析結果と良く一致し、差はすべての点で 0.2%以内に収まっている。これは本解析手法の有効性を示すものである。

ここでは室内模型実験の杭寸法を用いて検討したが、これ以外にも、実大の杭の寸法である $B = 60$ cm, $EI = 2.0 \times 10^{11}$ kgf·cm², 根入れ長 10 m を用いた解析も行ない、相似則による計算結果と一致することを確認めた。なお、この場合にも近似領域は $v_0 = 1 \times 10^{-10}$ cm でよいことを確認した上で、この値を使用して解析した。

4. 地盤ばね定数の推定法 (逆解析)

杭の載荷試験結果から、地盤ばね定数 k_s を推定する方法を提示する。2, 3章の解析を順解析と呼称するのに対し、ここで記す解析を逆解析と呼ぶ。

2章および3章から明らかなように、 k_s が与えられれば、式(20)を解くことにより、たわみは一意に定まる。このことから分かるように、 k_s を決定するためには、条件がもう一つ必要となる。載荷試験

により杭のいくつかの点でたわみが得られていれば、要素分割に際してそれらの点に節点を配置することにより、地盤ばね定数 k_s を推定するための条件として、次式で定義される E の最小化が考えられる。

$$E = \sum_{I=1}^N \frac{C_I}{2} (V^I - \bar{V}^I)^2 \quad (30)$$

ここに、 I は節点番号、 N は総節点数、 $\bar{V}^I$ は載荷試験で得られたたわみである。また C_I は係数であり、載荷試験でたわみが得られている節点では 1、それ以外の節点では 0 の値を取るものとする。ここでは、 k_s の値を変えて式 (30) で定義される E を最小化するので、次の式を考えることになる。

$$\frac{\partial E}{\partial k_s} = \sum_{I=1}^N C_I (V^I - \bar{V}^I) \frac{\partial V^I}{\partial k_s} = 0 \quad (31)$$

V^I と k_s は式 (20) で関連づけられ、そこから誘導される次の連立一次方程式を式を $\partial U / \partial k_s$ について解けば、式 (31) の $\partial V^I / \partial k_s$ は求められる。

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial k_s} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_s} \quad (32)$$

結局、本研究では、式 (20) と式 (31) を連立して解くことにより、地盤ばね定数の推定を行う。しかしながら、いずれの式も非線形であるため、本研究では、次の連立一次方程式を繰り返し解いて、地盤ばね定数および対応する杭の変形を求める。

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_s} \Delta k_s = \mathbf{R} - \mathbf{K} \quad (33)$$

$$\sum_{I=1}^N C_I \frac{\partial V^I}{\partial k_s} \Delta V^I = -\sum_{I=1}^N C_I (V^I - \bar{V}^I) \frac{\partial V^I}{\partial k_s}$$

また、収束判定条件は、

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}\|_2}{\|\mathbf{U}\|_2} + \frac{|\Delta k_s|}{|k_s|} \leq e_2 \quad (34)$$

とする。

本解析法では、式 (33) に先だって、まず式 (32) を解く必要がある。式 (32) の係数行列は、有限要素解析特有の性質である疎（零の成分が多い）や帯（非

零成分が対角項付近に集まっている）といった性質を有している。そこで、そうした特長を生かすため、本解析ではスカイライン法⁵⁾をソルバーとして採用する。同様の観点から、式 (33) の解法でもスカイライン法を採用し、係数行列のうち、 $\mathbf{K}_T$ の部分から三角分解を行うことにすれば、その計算は式 (32) の三角分解と全く同じとなる。したがって、式 (32) の解法過程における三角分解の結果を計算機内部に記憶しておけば、式 (33) の解法時にも再利用が可能となる。有限要素解析では、一般に、連立一次方程式の解法が計算時間の多くを占め、連立一次方程式の解法の中では、前進消去や後退代入の計算過程に比して、三角分解の計算時間が圧倒的に長い。そのため、式 (32) の解法過程で行った三角分解の結果を再利用すれば、式 (33) では $\mathbf{K}_T$ にかかわらない部分のごく限られているため、式 (33) を解くのに必要な計算時間は大幅に短縮される。本研究で開発したプログラムでは、このような観点から計算速度を向上させている。

ところで、この章で扱った問題は、式 (20) の制約条件のもとで式 (30) を最小化する問題である。これは典型的な最適化問題であり、解法もすでに提案されている⁶⁾。実際、本研究の初期段階でも、その代表的な解法であるペナルティ法^{6), 7)}の適用を検討した。しかしながら、その解法では係数行列が疎や帯といった性質を有さず、多大な計算時間を必要とすることが判明した。したがって、この解法は取り下げ、数値計算の効率性に優れた上記の解析法を本研究では提案した。

5. 数値計算例（逆解析）

4 章で提示した地盤ばね定数推定法の有効性を検討するために、まず順解析で得た結果を載荷試験結果と見なして地盤ばね定数を推定し、正しい値が得られるかを調べた。次いで、実際の室内試験結果を用いて地盤ばね定数の推定を試みた。3 章での検討結果をもとに近似領域 v_0 は 1×10^{-10} cm、また式 (34) の収束条件の許容値 e_2 は 10^{-10} とした。なお、3 章と同様に、以下の解析は Sun SPARCstation 2 を用いた倍精度計算である。

5.1 数値解析結果をもとにした地盤ばね定数の推定

3.2 で 51 個の要素を用いて得られた節点たわみを載荷試験結果と見なして、地盤ばね定数の推定を行った。したがって、この載荷試験結果には、実際の実験値の場合のような誤差が含まれていないため、

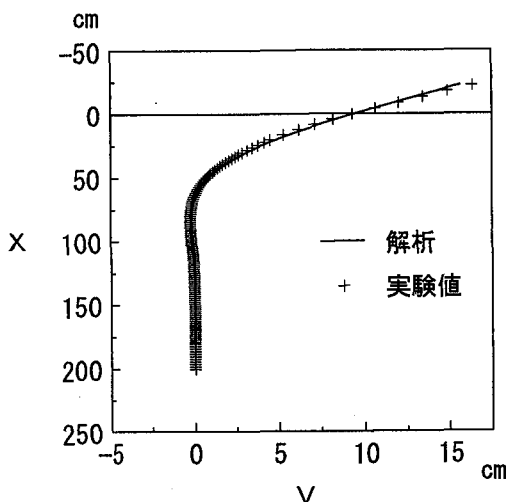


図-6 解析結果と実験結果の比較（杭の変形）

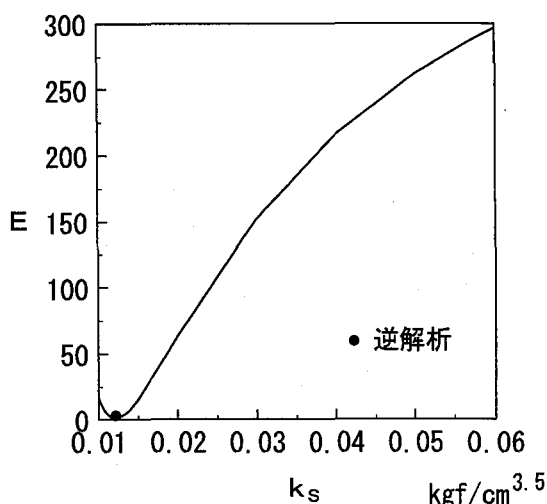


図-7 順解析による E の評価

地盤ばね定数 k_s は順解析で使用した $0.05 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ ，対応するたわみは載荷試験結果として与える値そのものが正解値となる。

4章に記したように，逆解析では繰り返し計算を必要とする．そのためには何らかの初期値を与える必要がある．自然な発想としては，載荷試験結果をたわみの初期値に用いることが考えられるが，ここでは載荷試験結果自体が逆解析で得べきたわみ（正解値）であるため，本逆解析法の有効性チェックには必ずしもふさわしいとは思われない．そこで，(a) 載荷試験結果に加え，(b) 載荷試験結果を 10% 増加したもの，(c) 載荷試験結果を 10% 減少したもの，(d) 10% の増減を交互に与えたものの 4 種類をたわみの初期値として考慮することにした．また地盤ばね定数 k_s の初期値は $0.10 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ とした．

逆解析でも要素数 51 で離散化を行って計算を実施した．その結果，たわみの初期値の与え方によらず，(a)～(d) の 4 ケースすべての場合において正しい地盤ばね定数の値を得ることができた．

次に，載荷試験結果としてのたわみ情報をひとつ置きに間引き，25 点のたわみを用いて同様の解析を行ったが，すべての初期値ケースにおいて地盤ばね定数およびたわみの正解値が得られた．さらに，ここでは誤差を含まない理想的な載荷試験結果を用いていることに鑑み，杭頭たわみのみを用いた逆解析も行い，この場合にも正解値を得た．

これらの計算結果は，4章で提示した地盤ばね定数推定法の有効性を示すものである．

5.2 載荷試験結果をもとにした地盤ばね定数の推定 運輸省港湾技術研究所で行われた室内模型実験結

果⁸⁾をもとに，地盤ばね定数 k_s の推定を試みた．杭の寸法等は 3 章の数値計算で用いたものと同じであり，荷重 P は 290.3 kgf である．実験結果に基づき，杭上の 126 点におけるたわみが得られているので，地盤ばね定数の推定に当たっても，125 要素（126 節点）を用いて杭の離散化を行った．この計算では初期値として，たわみには実験値，地盤ばね定数 k_s には，通常的地盤では $0.003 \sim 0.1 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ の範囲にある²⁾ことを考慮し，その中間値である $0.0515 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ を採用した．逆解析の結果， $k_s = 0.0120 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ との推定値が得られた．対応するたわみを実験値とともに図-6に示している．

この解析結果の有効性を確かめるために，地盤ばね定数 k_s の値を順次変更しながら順解析を行い，その際に得られたたわみをもとに式(30)で定義される E を計算し，結果を図-7に示している．図中，黒丸で示すのが逆解析で得られた地盤ばね定数の推定値であり， E の最小値に対応している．これより，本逆解析結果の妥当性が理解される．

また，杭頭から 5 点ごとに計 25 点のたわみを用いて逆解析を行った．得られた地盤ばね定数は $k_s = 0.0118 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ であり，先の結果と約 2% の差が生じた．次に，杭頭から連続した 25 点のたわみを用いて逆解析を行ったところ， $k_s = 0.0120 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ が得られ，さらに地盤内の上方に位置する 25 点（地表面上の点を含む）でのたわみを用いた逆解析では， $k_s = 0.0127 \text{ kgf/cm}^{3.5}$ となった．これらの結果は，地盤ばね定数を載荷試験結果から精度良く推定するには，測定点数のみならず測定位置についても検討が必要であることを示唆している．

6. まとめ

本研究では、弾性地盤反力法でモデル化した杭の変形挙動を有限要素法で解析するための定式化を提示した。さらに、杭の変形状態から地盤ばね定数を求める逆解析の定式化も示した。これらの解析法の有効性は、数値計算例により検証した。また、本解析法において数値計算上の都合から導入した地盤反力の近似領域は、ごく小さく設定しても数値計算上の問題を避けるのに有効であること、近似領域を十分に小さく設定すれば、解析結果に及ぼす影響は実用上無視できる程度に小さくなること、本問題は指数関数を含んではいるが、それほど多くの要素を用いなくても実用上十分な精度の解が得られること、係数行列 $\mathbf{K}_T$ の三角分解の結果を再利用することにより、計算効率の良い逆解析法を構築できること、地盤ばね定数を精度良く推定するには、載荷試験における測定点数のみならず測定位置についても検討が必要であることなどを示した。今後は、実地盤を念頭に置き、本解析手法の多層地盤への拡張に取り組む予定である。

謝辞

本研究の一部は、平成9～10年度文部省科学研究

費補助金・基盤研究(C)(2)(研究代表者：山口栄輝)の援助を受けて行いました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 久保浩一：くいの横抵抗の新しい計算法，港湾技術研究所報告第2巻3号，pp.1-37，1964.
- 2) 運輸省港湾局監修：港湾の施設の技術上の基準・同解説，上巻，1989.
- 3) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 IV下部構造編，1996.
- 4) 海野隆哉，垂水尚志：地盤工学，コロナ社，1993.
- 5) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- 6) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，河井忠彦：有限要素法ハンドブック，I 基礎編，培風館，1981.
- 7) Hughes, T.J.R.: The Finite Element Method, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- 8) 菊池喜昭，高橋邦夫，鈴木操：繰返し水平荷重下で大変形する砂地盤中の杭の挙動，港湾技術研究所報告第31巻第4号，pp.33-60，1992.

(1998年9月18日受付)