

Spline 要素法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析

Vibration of Annular Sector Mindlin Plates with Varying Thickness by the Spline Element Method

水澤富作*

加藤秀一**

Tomisaku Mizusawa

Hidekazu Kato

* 工博 大同工業大学 教授 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

** 大同工業大学大学院 建設工学専攻 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents an application of the spline element method based on the Mindlin plate theory to analyse vibration of annular sector thick plates with varying thickness in the radial direction.

To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods. Good accuracy is obtained. Frequencies of annular Mindlin plates with varying thickness are analysed for the different thickness ratios, radii ratios, the ratio of the width to thickness and sector angles.

Key Words: annular sector thick plate, varying thickness, spline element method, vibration

1. まえがき

扇形板は、曲線スラブ、曲線デッキや種々の構造要素として用いられており、その振動特性を知ることは、設計上重要な課題である。これまでに、一様厚さの扇形板の振動問題は、薄板理論¹⁾、Mindlin 板理論²⁻⁶⁾や3次元弾性理論⁷⁻⁹⁾を適用した種々の解析手法により解析されている。しかしながら、半径方向の2つの直線辺が単純支持された扇形板を除けば⁴⁾、厳密な解を求めることが困難になるので、Rayleigh-Ritz 法や有限要素法などの数値解析法の適用が必要になる。また、実際に用いられる扇形板の板厚は、半径方向または円周方向にステップ状⁹⁾またはテーパ状に変化する場合がある。このような変厚を持つ扇形板の振動解析は、支持される境界条件に関係なく厳密な解を求めることが困難な問題の1つである。また、変厚を持つ円板やリング板の研究と比較して、4つの支持辺を持つ変厚扇形板に関する研究はあまり多く報告されていない。

Kim と Dickinson ら¹⁰⁾は、薄板理論に基づく Ritz 法を用いて、周辺固定された変厚扇形板の振動解析を行っている。Tanaka ら¹¹⁾は、Ritz 法を用いて、半径方向の支持辺が曲線を成す片持ち扇形変厚板の自由振動解析を行っている。Mizusawa ら¹²⁾は、Spline 要素法を用いて、半径方向に線形的な変厚を持ち、任意の境界条件を持つ扇形薄板の振動解析を行っている。さらに、Molaghasemi

ら¹³⁾は、半径方向に変厚である扇形薄板の振動数を、帯板要素モデルに基づく差分法により解析を行っている。

一方、薄板理論で無視される横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した扇形厚板に関する振動解析も行われているが、その多くの研究は、等厚を仮定した扇形厚板を対象にしたものである²⁻⁶⁾。Vaidyanathan ら¹⁵⁾は、Rayleigh-Ritz 法を用いて片持ち変厚 Mindlin 板の応力解析を行っているが、板厚断面が任意の形状を持つ扇形厚板の振動問題については、あまり多く報告されていないように思われる。最近、近藤ら¹⁴⁾は、半径方向の2つの直線辺が単純支持され、また半径方向に直線的に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析へのスプライン帯板法の適用性について検討を行っている。この方法は、境界条件の導入に制約を受けるので、境界条件や板厚変化に制限を受けない解析手法の開発が必要と考えられる。

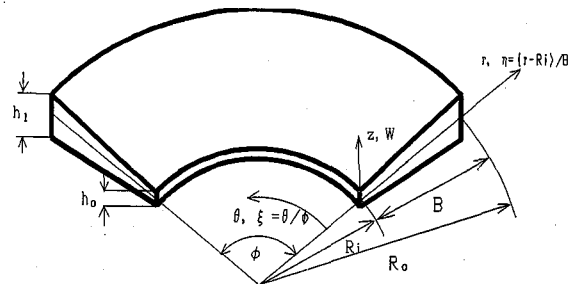


Fig. 1 Annular sector Mindlin plate with varying thickness in the radial direction and coordinate systems

本文では、Mindlin 板理論(一次せん断変形理論)に基づく Spline 要素法を用いて、半径方向に変厚な扇形厚板の振動解析を行っている。本手法の解析精度や収束性に与える要素分割数の影響について検討した。また、任意の境界条件を持つ扇形変厚板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、半径比や中心角などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化

Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、Fig. 1 に示すような半径方向に変厚な Spline 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元極座標系を用いる。

$$\xi = \theta / \phi, \quad \eta = (r - R_i) / B, \quad W = W / B \quad (1)$$

ここで、 W はたわみであり、 $B = R_i(\lambda - 1)$ は板幅、 $\lambda = R_o / R_i$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ扇形板の内径と外径を示す。

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_\theta &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \phi_r &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化された B-Spline 関数である。 W はたわみであり、 ϕ_θ と ϕ_r は回転角である。また、 $i_\theta = k - 1 + M_\theta$ 、 $i_r = k - 1 + M_r$ 、 $[N]_{mn} = [N_{i,k}(\xi) N_{j,k}(\eta), \dots, N_{i_\theta,k}(\xi) N_{j_r,k}(\eta)]$ である。未定係数ベクトルは、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \{A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{i_\theta i_r}\}^T, \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \{B_{11} \ B_{12} \ \dots \ B_{i_\theta i_r}\}^T, \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \{C_{11} \ C_{12} \ \dots \ C_{i_\theta i_r}\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_r と M_θ は、それぞれ半径方向と円周方向の要素分割数である。したがって、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。 $\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn}$ (4)

ここで、

$$[S]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} \begin{bmatrix} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、 $\{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn} \ \{\delta_B\}_{mn} \ \{\delta_C\}_{mn}\}^T$ 、 $\{d\} = \{\phi_\theta, \phi_r, W\}^T$ である。次に、Mindlin 板理論で定義される曲げひずみ $\{\varepsilon_\theta, \varepsilon_r, \gamma_{r\theta}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\gamma_{z\theta}, \gamma_{rz}\}_s$ を無次元極座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\}_b = \begin{Bmatrix} (1/B/\phi/\eta) \partial \phi_\theta / \partial \xi + (1/B/\eta) \phi_r \\ (1/B) \partial \phi_r / \partial \eta \\ (1/B) \partial \phi_\theta / \partial \eta + (1/B/\phi/\eta) \partial \phi_r / \partial \xi - (1/B/\eta) \phi_\theta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon\}_s = \begin{Bmatrix} \phi_\theta + (1/\phi/\eta) \partial W' / \partial \xi \\ \phi_r + \partial W' / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (7)$$

したがって、式(2)を式(6)と(7)に代入すれば、ひずみベクトル $\{x\}$ は、次式で与えられる。

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_b \\ \{\varepsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (8)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、またひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/B/\phi/\eta) \partial / \partial \xi & (1/B)/\eta & 0 \\ 0 & (1/B) \partial / \partial \eta & 0 \\ (1/B) \partial / \partial \eta - (1/B)/\eta & (1/B) \partial / \partial \xi & 0 \\ 1 & 0 & (1/\phi/\eta) \partial / \partial \xi \\ 0 & 1 & \partial / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[B]_{mn} = [T][S]_{mn}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} (1/B) \begin{bmatrix} N_m \dot{N}_n & (1/\eta) \dot{N}_m N_n & 0 \\ 0 & N_m \dot{N}_n & 0 \\ N_m \dot{N}_n - (1/\eta) \dot{N}_m N_n & (1/\phi/\eta) \dot{N}_m N_n & 0 \\ B \dot{N}_m N_n & 0 & (B/\phi/\eta) \dot{N}_m N_n \\ 0 & B \dot{N}_m N_n & B \dot{N}_m N_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} \begin{Bmatrix} [B_b]_{mn} \\ [B_s]_{mn} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\dot{N}_m = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$ 、 $\dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta$ 、 $N_m = N_{m,k}(\xi)$ 、 $N_n = N_{n,k}(\eta)$ である。

扇形板の板厚は、半径方向に任意の形状で変化すると仮定している。内径での板厚と外径での板厚を h_o と h_l とすると、Fig. 2 に示すように板厚は、次式で仮定される。

板厚が凸型断面の場合は、次式で示される。

$$h(\eta) = h_0 \{ \delta - (\delta - 1)(1 - \eta)^p \} = h_0 H(\eta)$$

また、凹型断面の場合は、

$$h(\eta) = h_0 \{ (\delta - 1)\eta^p + 1 \} = h_0 H(\eta) \quad (11)$$

で与えられる。ここで、 δ は変厚比であり、 h_l/h_0 で表される。また、上式において、板厚断面の形状を表す多項式の次数、 p を1に仮定すると、板厚断面は線形的に変化することになる。

したがって、上式を用いれば、板厚が線形的に変化する場合の扇形板の曲げ剛性は、

$$D(\eta) = Eh(\eta)^3 / [12(1 - \nu^2)] = D_0 \{ (\delta - 1)\eta + 1 \}^3 \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $D_0 = Eh_0^3 / [12(1 - \nu^2)]$ 、 E はヤング係数、また ν はポアソン比である。

等方性な変厚扇形板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは、それぞれ次式で与えられる。

$$[D]_b = Eh(\eta)^3 / 12(1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[D]_s = Gh(\eta)\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 $G = E/2(1 + \nu)$ はせん断弾性係数であり、また κ はせん断修正係数であり、5/6に仮定している。

変厚扇形 Mindlin 板のひずみエネルギー、 U は、

$$\begin{aligned} U &= (\phi B^2 / 2) \int_0^1 \int_0^1 [\{\varepsilon\}_b^T [D]_b \{\varepsilon\}_b \\ &\quad + \{\varepsilon\}_s^T [D]_s \{\varepsilon\}_s] Ad \xi d\eta \\ &= (D_0 \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 [H(\eta)^3 \{ (1/\phi/\eta)(\partial\phi_\theta/\partial\xi) \\ &\quad + (\phi_r/\eta) \}^2 + \nu(\partial\phi_r/\partial\eta)^2 \\ &\quad + 2\nu\{ (1/\phi/\eta)(\partial\phi_\theta/\partial\xi) \\ &\quad + (\phi_r/\eta) \}(\partial\phi_r/\partial\eta) \\ &\quad + 0.5(1 - \nu)\{ (\partial\phi_\theta/\partial\eta) + (1/\phi/\eta)(\partial\phi_r/\partial\xi) \\ &\quad - (\phi_\theta/\eta) \}^2 \\ &\quad + 6(1 - \nu)\kappa(B/h_0)^2 H(\eta) [\{ (1/\phi/\eta)(\partial W'/\partial\xi) \\ &\quad + \phi_\theta \}^2 + \{ (\partial W'/\partial\eta) + \phi_r \}^2]] Ad \xi d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $D_0 = Eh_0^3 / 12(1 - \nu^2)$ 、 $A = \{ \eta + 1/(Ro/Ri - 1) \}$ で与えられる。

また、この板の運動エネルギー、 T は、

$$\begin{aligned} T &= (\rho h_0 / 2) \omega^2 \phi B^4 \int_0^1 \int_0^1 \{ H(\eta) W'^2 \\ &\quad + (1/12)(h_0/B)^2 H(\eta)^3 (\phi_\theta^2 + \phi_r^2) \} Ad \xi d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 ρ は密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。

変厚扇形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、次式で示される。

$$\Pi = U - T \quad (17)$$

したがって、式(2)を式(17)に代入し、 Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{rs} = 0 \quad (18)$$

式(18)をマトリックス表示すれば、次式ようになる。

$$\sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} ([K]_{mnrs} \{\Delta\}_{mn} - n^* [M]_{mnrs} \{\Delta\}_{mn}) = 0 \quad (19)$$

ここで、 n^* は振動数パラメータであり、 $\omega B^2 \sqrt{\rho h_0} / D_0$ で表している。

剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ と質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$[K]_{mnrs} = D_0 \begin{bmatrix} [K\phi_\theta\phi_\theta] & [K\phi_\theta\phi_r] & [K\phi_\theta W'] \\ [K\phi_r\phi_\theta] & [K\phi_r\phi_r] & [K\phi_r W'] \\ [KW'\phi_\theta] & [KW'\phi_r] & [KW'W'] \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[M]_{mnrs} = \rho h_0 \phi B^2 \begin{bmatrix} [M\phi_\theta\phi_\theta] & 0 & 0 \\ 0 & [M\phi_r\phi_r] & 0 \\ 0 & 0 & [MW'W'] \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のマトリックスの大きさは、 $3 \times (k + M_\theta - 1)(k + M_r - 1)$ で与えられる。ただし、 $k - 1$ はスプライン関数の次数であり、また M_r と M_θ はそれぞれ半径方向と円周方向の要素分割数である。Appendix には、これらのサブマトリックスが示してある。

3. 数値計算例および考察

ここでは、変厚扇形 Mindlin 板の振動解析への本手法の適用性について示す。また、変厚扇形 Mindlin 板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、半径比や中心角などの影響について示す。さらに、扇形板の境界条件は CF -

SCのように表し、それぞれ半径方向の2つの直線辺($\xi=0,1.0$)で、固定辺(C),自由辺(F)であり、他の2つの円弧辺($\eta=0,1.0$)が単純支持辺(S)と固定辺(C)に相当している。なお、以下の数値計算では、ポアソン比は0.3とする。

Table 1 には、半径方向に、線形的に板厚が変化する扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^*=\omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ の収束性に与える要素分割数の影響が示されている。ここで、変厚比 $h1/h_0=2.0$ 、中心角 $\phi=60^\circ$ 、半径比 $Ro/Ri=2.0$ 、 $\nu=0.3$ に仮定している。また、幅厚比 B/h_0 は、5、10と100にとり、また要素分割数、 $M_r=M_\theta$ は8分割から14分割まで変化させている。また、比較のために、薄板理論に基づく Spline 要素法により求められた値¹²⁾も示してある。これより、幅厚比や境界条件に無関係に、要素分割数の増大に従って、一定値への安定した収束状態が得られている。また、幅厚比を100程度にとれば、薄板理論による値と良く一致した結果が得られている。従って、以降の計算例では、 $k-1=3, M_r=M_\theta=14$ を用いている。

Table 2 には、半径方向に、板厚が直線的および放物線状に変化する周辺固定された扇形薄板の振動数パラメータ、 $n^*=\omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ の精度比較が示してある。ここで、 $h1/h_0=2.0$ 、 $\phi=60^\circ$ 、 $Ro/Ri=5.0$ 、 $\nu=0.3, B/h_0=100$ に仮定している。Kim ら¹⁰⁾は、直交多項式を変位関数に用いた Ritz 法により解析している。また Molaghasemi らの結果¹³⁾は、差分法を用いて求めたものである。これより、本手法による解は、他の数値解析法による値と良く一致している。

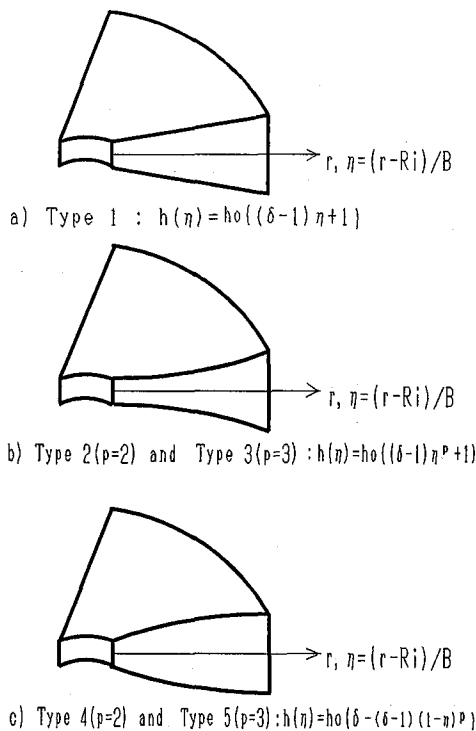


Fig. 2 Variation of varying thickness in the radial direction

Table 1. Convergence study of frequency parameters, $n^*=\omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ of annular sector thick plates of tapered thickness in the radial direction: $\phi=60^\circ, k-1=3, Ro/Ri=2.0$ and $h1/h_0=2.0$

Boundary conditions	B/h ₀	M _r =M _θ	Modes					
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
SS-SS	5.0	8	17.14	29.16	42.96	44.82	51.73	61.67
		10	17.16	29.21	42.98	44.88	51.81	61.76
		12	17.18	29.23	42.99	44.91	51.84	61.80
		14	17.19	29.25	42.99	44.93	51.86	61.82
		Kondo et. al.[14]	17.19	29.23	42.90	44.84	51.74	-
	10.0	8	19.56	35.68	55.83	59.36	69.69	87.90
		10	19.59	35.73	55.85	59.42	69.78	87.88
		12	19.60	35.76	55.87	59.46	69.83	87.91
		14	19.61	35.78	55.88	59.49	69.86	87.94
		Kondo et. al.[14]	19.64	35.82	55.85	59.48	69.85	-
	100.0	8	20.77	39.60	64.72	71.40	83.62	116.3
		10	20.77	39.53	64.58	70.21	83.50	114.1
		12	20.77	39.52	64.55	69.96	83.47	112.0
		14	20.77	39.52	64.54	69.89	83.46	111.5
		Thin plate theory[12]	20.79	39.58	64.65	70.01	83.67	-
		Kondo et. al.[14]	20.78	39.53	64.54	69.87	83.48	-
CC-CC	5.0	8	25.57	35.69	48.63	49.54	56.56	64.88
		10	25.58	35.72	48.65	49.58	56.60	64.92
		12	25.59	35.73	48.65	49.60	56.62	64.94
		14	25.59	35.74	48.66	49.61	56.63	64.95
		Kondo et. al.[14]	25.59	35.74	48.66	49.61	56.63	64.95
	10.0	8	33.89	49.41	72.44	72.92	85.17	100.4
		10	33.89	49.43	72.46	72.92	85.21	100.2
		12	33.90	49.44	72.47	72.93	85.24	100.2
		14	33.90	49.44	72.48	72.93	85.25	100.2
		Kondo et. al.[14]	33.90	49.44	72.48	72.93	85.25	100.2
	100.0	8	39.72	60.83	97.53	99.46	117.2	153.2
		10	39.64	60.53	95.75	96.84	116.4	148.0
		12	39.62	60.45	95.06	96.61	116.2	143.1
		14	39.61	60.43	94.87	96.54	116.1	141.8
		Thin plate theory[12]	39.68	60.58	95.13	96.88	116.6	-

Table 2. Comparison of frequency parameter, $\omega Ro^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ for thin, fully clamped annular sector plates with linearly and parabolically varying thickness in the radial direction: $h1/h_0=2.0, Ro/Ri=5.0, \phi=60^\circ, B/h_0=100$ and $\nu=0.3$

Variation of thickness	1	2	3	4	5	6
Linearly varying thickness						
Present method	102.05	191.44	209.27	304.47	345.43	352.49
Kim et. al.[10]	102.1	191.4	209.2	304.0	345.1	351.6
Molaghasemi et. al.[13]	102.49	191.80	207.66	303.63	343.58	-
Parabolically varying thickness						
Present method	109.91	207.34	225.13	328.64	374.91	378.15
Kim et. al.[10]	109.9	207.3	225.1	329.0	374.8	377.3
Molaghasemi et. al.[13]	108.93	206.80	221.24	327.82	371.59	-

Table 3. The effect of $h1/h_0$ on the frequency parameters, $n^*=\omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ of annular sector plates tapered in the radial direction: $Ro/Ri=2.0, \phi=45^\circ$ and CC-CC

B/h ₀	h1/h ₀	Modes							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
5	1.0	23.77	38.44	44.77	56.72	57.53	70.26	75.66	76.19
	1.25	25.53	40.88	46.93	59.83	60.00	72.81	78.45	79.85
	1.5	27.00	42.82	48.62	61.95	62.22	74.79	80.63	82.59
	1.75	28.23	44.40	49.98	63.52	64.12	76.38	82.39	84.70
	2.0	29.29	45.70	51.10	64.82	65.65	77.70	83.83	86.36
10	1.0	28.68	49.59	59.69	77.88	79.21	101.1	109.0	110.0
	1.25	31.79	54.79	64.85	85.49	85.72	108.4	116.9	120.5
	1.5	34.61	59.37	69.32	90.87	92.37	114.5	123.4	129.0
	1.75	37.19	63.42	73.22	95.66	98.07	119.6	129.1	136.1
	2.0	39.54	67.04	76.66	99.66	103.0	124.0	133.9	142.0
100	1.0	31.36	56.78	70.10	94.47	96.51	128.9	140.2	142.3
	1.25	35.50	64.81	78.73	108.3	108.9	144.5	157.3	165.3
	1.5	39.48	72.53	86.99	119.5	122.8	159.5	173.6	187.6
	1.75	43.35	80.01	94.96	130.4	136.2	173.8	189.3	207.5
	2.0	47.13	87.30	102.7	140.9	149.3	187.8	204.4	224.0

Table 3 と Fig. 3 は、半径方向へ直線的に変厚する周辺固定された扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ に与える変厚比、 h_1/h_0 と幅厚比、 B/h_0 の影響を示している。ここで、 $\phi = 45^\circ$ と $R_o/R_i = 2.0$ を用いている。変厚比は 1.0 から 2.0 まで変化させ、また幅厚比は 5、10 と 100 に仮定している。これより、変厚比の増大とともに、振動数は増大する。また、Fig. 3 から分かるように、幅厚比が大きいと直線的に変化するが、板厚の増大に伴い、横せん断変形と回転慣性の影響により、振動数パラメータは非線形な性状を示す。

Table 4 と Fig. 4 は、半径方向に直線的に変厚する周辺固定された扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ に与える変厚比、 h_1/h_0 と中心角、 ϕ の影響を示している。ここで、 $R_o/R_i = 2.0$ 、 $B/h_0 = 10$ を用いている。中心角は 30° から 90° まで変化させ、また変厚比は 1.0、1.5 と 2.0 に仮定している。これより、振動数パラメータは、中心角の増大とともに漸減してくる。

Table 5-a), b), c) には、それぞれ、周辺固定支持(CC-CC)、周辺単純支持(SS-SS)と片持ち支持(FI-FC)された場合について、半径方向に直線的に変厚する扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ に与える変厚比、 h_1/h_0 と半径比、 R_o/R_i の影響が示されている。また、Fig. 5-a), b), c) には、それぞれ固有振動数パラメータに与えるこれらの影響が示されている。ここで、 $\phi = 60^\circ$ 、 $B/h_0 = 10$ を用いている。半径比は 1.25 から 4.0 まで変化させ、また変厚比は、1.0、1.5、2.0 に仮定している。これより、半径比が増大すると、振動数パラメータは増大し、また変厚比の影響も大きく現れてくる。

最後に、Table 6 には、Fig. 2 に示す 5 種類の変断面性状を持つ扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ が示されている。ここで、 $B/h_0 = 10$ 、 $R_o/R_i = 2.0$ 、 $h_1/h_0 = 2.0$ に仮定し、また中心角を 30° 、 60° 、 90° に変化させている。Type 1 は、板厚が半径方向へ線形的に変化し、その他は、板厚断面が凹または凸状に曲線的に変化している。これより、振動数パラメータに与える板厚断面の形状の影響は、中心角が小さいほど大きく見られる。また、変厚板では、板厚断面の形状を変化させれば、振動特性または剛性を効果的に変化させることが可能と思われる。

4. あとがき

本文では、Mindlin 板理論に基づく Spline 要素法を用いて、半径方向に変厚な扇形厚板の振動解析を行い、本手法の有用性について検討を行った。本文で得られた主な結果をまとめると、以下ようになる。

1) 本手法を用いれば、任意の境界条件を持つ変厚扇形 Mindlin 板の振動解析ができ、また解の安定した収束性と精度が得られる。

2) 変厚扇形 Mindlin 板の振動数は、変厚比、半径比、幅厚比や中心角の影響を大きく受ける。とくに、幅厚比

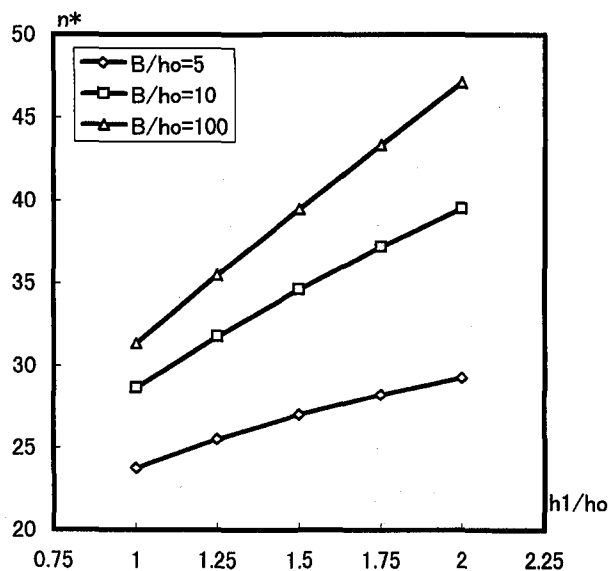


Fig. 3. The effect of h_1/h_0 on the fundamental frequency parameter, n^* of annular sector plates tapered in the radial direction: $R_o/R_i = 2.0$, $\phi = 45^\circ$ (○), CC-CC

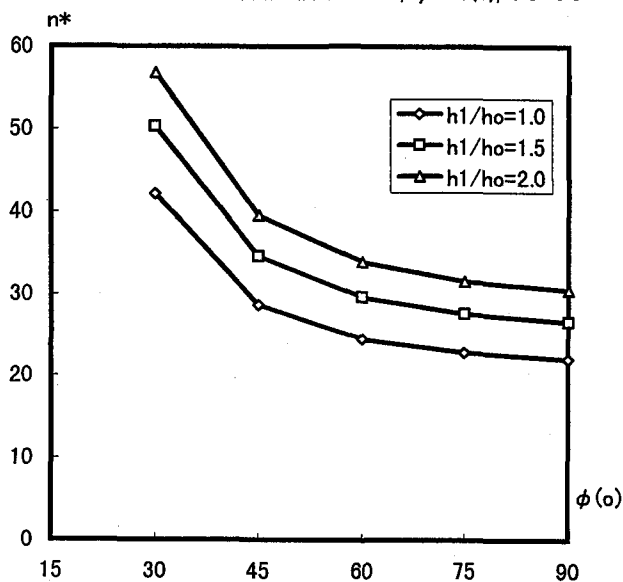


Fig. 4. The effect of the sector angle and h_1/h_0 on the n^* of annular sector plates tapered in the radial direction: $R_o/R_i = 2.0$, $B/h_0 = 10$, CC-CC

Table 4. The effect of sector angle and h_1/h_0 on the frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ of annular sector plates tapered in the radial direction: $R_o/R_i = 2.0$, $B/h_0 = 10$ and CC-CC

ϕ (°)	h_1/h_0	Modes							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
30	2.0	56.85	89.19	108.4	133.3	138.4	166.7	145.2	184.4
	1.5	50.35	81.21	98.09	123.5	128.2	153.3	164.1	173.0
	1.0	42.15	70.63	83.46	109.7	114.0	132.7	148.4	156.4
45	2.0	39.54	67.04	76.66	99.66	103.0	124.0	133.9	142.0
	1.5	34.61	59.37	69.32	90.87	92.37	114.5	123.4	129.0
	1.0	28.68	49.59	59.69	77.88	79.21	101.1	109.0	110.0
60	2.0	33.90	49.44	72.48	72.93	85.25	100.2	105.4	121.1
	1.5	29.60	43.36	64.24	65.53	77.24	89.44	96.15	111.7
	1.0	24.49	35.95	53.58	56.46	66.73	75.09	83.86	98.49
75	2.0	31.63	41.05	56.48	71.10	76.14	78.81	91.57	98.46
	1.5	27.62	35.87	49.60	64.16	67.33	71.24	83.07	87.70
	1.0	22.85	29.65	41.13	55.09	56.09	61.34	71.85	73.52
90	2.0	30.54	36.67	47.26	61.59	70.26	75.41	78.57	84.12
	1.5	26.67	32.00	41.33	54.12	63.39	68.10	69.44	76.13
	1.0	22.09	26.43	34.17	44.88	54.40	57.82	58.54	66.67

Table 5-a) The effects of R_o/R_i and h_1/h_o on the frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho} h_o / D_o$ of annular sector plates tapered in the radial direction: $\phi = 60^\circ$, $B/h_o = 10$ and CC-CC

R_o/R_i	h_1/h_o	1st	2nd	3rd	Modes 4th	5th	6th	7th	8th
1.25	2.0	28.86	29.95	31.92	34.89	38.97	44.18	50.55	58.25
	1.5	25.32	26.29	28.02	30.64	34.24	38.87	44.62	51.70
	1.0	21.10	21.91	23.36	25.55	28.58	32.51	37.47	43.74
1.5	2.0	29.97	34.52	42.64	54.14	68.43	69.78	73.65	80.20
	1.5	26.25	30.23	37.41	47.68	60.60	63.02	66.55	72.56
	1.0	21.83	25.12	31.12	39.80	50.80	54.16	57.27	62.59
2.0	2.0	33.90	49.44	72.48	72.93	85.25	100.2	105.4	121.1
	1.5	29.60	43.36	64.24	65.53	77.24	89.44	96.15	111.7
	1.0	24.49	35.95	53.58	56.46	66.73	75.09	83.86	98.49
3.0	2.0	44.19	77.13	80.75	112.9	115.5	127.3	154.7	155.2
	1.5	38.59	68.26	73.06	103.3	103.7	117.5	141.6	143.3
	1.0	31.80	56.67	62.95	87.12	90.23	103.9	120.7	126.3
4.0	2.0	52.79	89.25	93.41	134.2	134.3	137.8	177.3	183.7
	1.5	46.22	81.04	83.22	123.4	124.2	124.9	165.7	168.6
	1.0	38.05	69.32	70.11	105.6	108.1	110.3	145.1	149.3

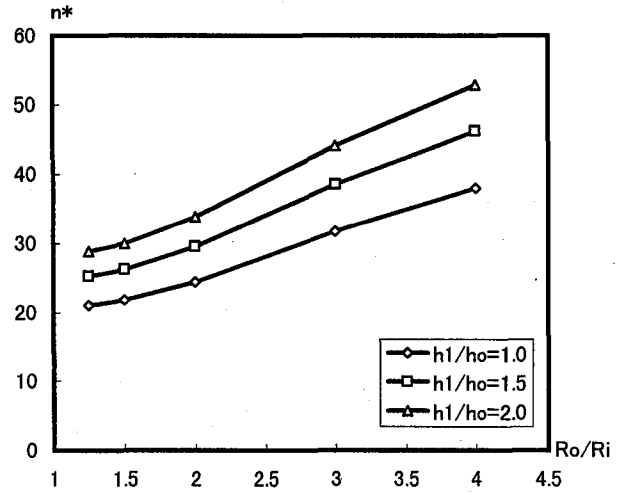


Fig. 5-a) The effect of R_o/R_i and h_1/h_o on the frequency parameter, n^* of annular sector plates tapered in the radial direction: $B/h_o = 10$, $\phi = 60^\circ$ and CC-CC

Table 5-b) The effects of R_o/R_i and h_1/h_o on the frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho} h_o / D_o$ of annular sector plates tapered in the radial direction: $\phi = 60^\circ$, $B/h_o = 10$ and SS-SS

R_o/R_i	h_1/h_o	1st	2nd	3rd	Modes 4th	5th	6th	7th	8th
1.25	2.0	14.32	16.25	19.37	23.59	28.84	35.06	42.24	50.49
	1.5	12.36	13.96	16.58	20.18	24.72	30.18	36.58	44.06
	1.0	10.13	11.40	13.51	16.44	20.18	24.72	30.11	36.57
1.5	2.0	15.79	21.90	31.46	44.03	52.56	57.47	59.10	65.44
	1.5	13.58	18.70	26.93	37.94	45.97	50.41	51.34	57.67
	1.0	11.11	15.21	21.91	30.96	38.27	42.08	42.11	48.43
2.0	2.0	19.61	35.78	55.88	59.49	69.86	87.94	91.70	105.4
	1.5	16.75	30.54	48.96	51.25	61.73	76.55	81.95	94.60
	1.0	13.62	24.68	40.84	41.48	52.00	62.25	69.91	81.00
3.0	2.0	27.01	59.30	63.28	96.28	99.63	111.7	140.4	141.1
	1.5	22.91	50.68	55.65	85.94	86.47	100.6	126.1	127.4
	1.0	18.42	40.52	46.62	69.72	73.03	86.47	103.2	109.2
4.0	2.0	32.66	70.15	73.76	116.9	118.0	121.4	162.4	170.1
	1.5	27.61	61.84	63.17	104.5	106.1	106.6	148.9	152.5
	1.0	22.03	50.34	51.40	85.87	88.70	91.91	126.0	130.7

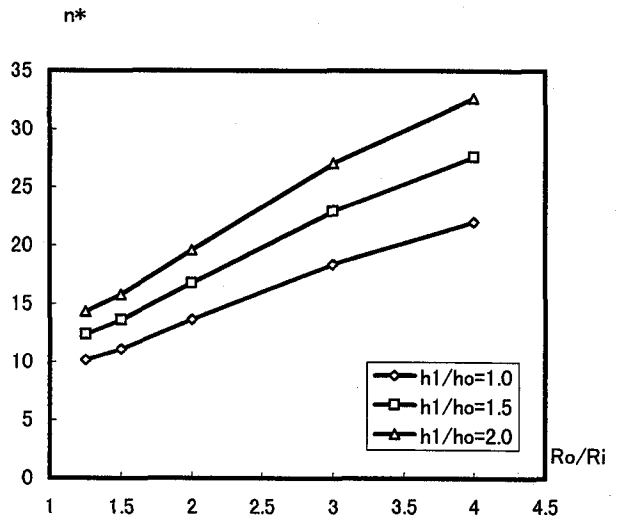


Fig. 5-b) The effect of R_o/R_i and h_1/h_o on the frequency parameter, n^* of annular sector plates tapered in the radial direction: $B/h_o = 10$, $\phi = 60^\circ$ and SS-SS

Table 5-c) The effects of R_o/R_i and h_1/h_o on the frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho} h_o / D_o$ of annular sector plates tapered in the radial direction: $\phi = 60^\circ$, $B/h_o = 10$ and FF-FC

R_o/R_i	h_1/h_o	1st	2nd	3rd	Modes 4th	5th	6th	7th	8th
1.25	2.0	7.671	8.033	9.468	11.79	15.04	19.27	24.48	30.20
	1.5	5.624	6.004	7.370	9.537	12.55	16.47	21.31	26.07
	1.0	3.618	4.033	5.331	7.309	10.04	13.60	17.96	20.73
1.5	2.0	8.073	9.823	14.63	22.24	32.00	33.91	34.08	39.41
	1.5	5.939	7.625	12.01	18.97	27.01	28.68	29.33	33.81
	1.0	3.842	5.469	9.320	15.51	21.04	22.59	24.63	27.47
2.0	2.0	8.726	14.15	26.98	33.81	38.64	48.57	52.76	72.59
	1.5	6.454	11.41	22.93	28.19	33.09	42.48	46.50	65.22
	1.0	4.209	8.579	18.52	21.83	26.81	35.36	39.19	54.90
3.0	2.0	9.676	21.43	35.05	48.62	48.78	75.48	80.20	85.68
	1.5	7.192	17.51	29.29	41.94	42.59	66.75	72.03	75.09
	1.0	4.718	13.24	22.75	34.15	35.36	55.76	61.70	61.93
4.0	2.0	10.32	26.20	36.06	57.00	61.59	76.83	95.88	100.8
	1.5	7.691	21.44	30.14	50.03	53.28	67.86	86.66	91.02
	1.0	5.057	16.16	23.42	41.66	43.27	56.61	74.80	76.62

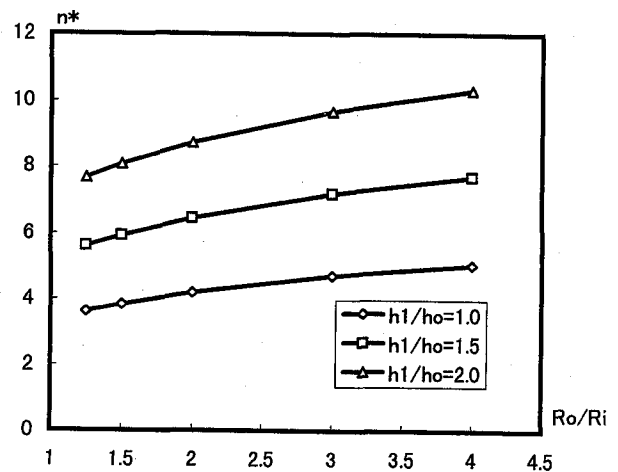


Fig. 5-c) The effect of R_o/R_i and h_1/h_o on the frequency parameter, n^* of annular sector plates tapered in the radial direction: $B/h_o = 10$, $\phi = 60^\circ$ and FF-FC

が大きいと直線的に変化するが、板厚の増大に伴い、横せん断変形と回転慣性の影響により、振動数パラメータは非線形な性状を示す。

3) 変厚板の振動数は、板厚断面の形状によっても大きな影響を受ける。その影響は、境界条件の拘束が大きな場合や中心角が小さい場合に顕著に見られる。また、変厚板では、幅厚比、変厚比や板厚断面の形状を変化させれば、振動特性または剛性を効果的に変化させることが可能と思われる。

最後に、数値計算には、大同工業大学情報処理センタ一を利用して頂きました。また、貴重なご意見を頂いた査読者に謝意を表します。

Appendix

式(20)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 K\phi_\theta\phi_\theta &= (1/\phi)^2 I_{mr}^{11} J_{ns}^{00-13} + 0.5(1-\nu)[I_{mr}^{00} J_{ns}^{1113} \\
 &\quad - I_{mr}^{00} J_{ns}^{1003} - I_{mr}^{00} J_{ns}^{0103} + I_{mr}^{00} J_{ns}^{0103}] \\
 &\quad + 6(1-\nu)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{00} J_{ns}^{0011} \\
 K\phi_\theta\phi_r &= (1/\phi) I_{mr}^{10} J_{ns}^{00-13} + (\nu/\phi) I_{mr}^{10} J_{ns}^{0103} \\
 &\quad + 0.5(1-\nu)(1/\phi)[I_{mr}^{01} J_{ns}^{1003} - I_{mr}^{01} J_{ns}^{00-13}] \\
 K\phi_\theta W' &= 6(1-\nu)(1/\phi)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{01} J_{ns}^{0001} \\
 K\phi_r\phi_\theta &= (1/\phi) I_{mr}^{01} J_{ns}^{00-13} + (\nu/\phi) I_{mr}^{01} J_{ns}^{1003} \\
 &\quad + 0.5(1-\nu)(1/\phi)[I_{mr}^{10} J_{ns}^{0103} - I_{mr}^{10} J_{ns}^{00-13}] \\
 K\phi_r\phi_r &= I_{mr}^{00} J_{ns}^{00-13} + \nu I_{mr}^{00} J_{ns}^{1003} \\
 &\quad + \nu I_{mr}^{00} J_{ns}^{0103} + I_{mr}^{00} J_{ns}^{1113} \\
 &\quad + 0.5(1-\nu)(1/\phi)^2 I_{mr}^{11} J_{ns}^{00-13} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{00} J_{ns}^{0011} \\
 K\phi_r W' &= 6(1-\nu)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{00} J_{ns}^{0111} \\
 K W'\phi_\theta &= 6(1-\nu)(1/\phi)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{10} J_{ns}^{0001} \\
 K W'\phi_r &= 6(1-\nu)(1/\phi)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{00} J_{ns}^{1011} \\
 K W' W' &= 6(1-\nu)(1/\phi)^2 (B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{11} J_{ns}^{00-11} \\
 &\quad + 6(1-\nu)(B/h_o)^2 \kappa I_{mr}^{00} J_{ns}^{1111}
 \end{aligned}$$

また、式(21)で示されるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 M\phi_\theta\phi_\theta &= I_{mr}^{00} J_{ns}^{0011} \\
 M\phi_r\phi_r &= (1/12)(h_o/B)^2 I_{mr}^{00} J_{ns}^{0013} \\
 M W' W' &= (1/12)(h_o/B)^2 I_{mr}^{00} J_{ns}^{0013}
 \end{aligned}$$

ここで、 I_{mr}^{ij} と J_{ns}^{ijkl} は次式で表され、また数値積分には、Gauss の数値積分公式を用いている。

$$\begin{aligned}
 I_{mr}^{ij} &= \int_0^1 [d^i N_{m,k}(\xi)/d\xi^i \times d^j N_{r,k}(\xi)/d\xi^j] d\xi \\
 J_{ns}^{ijkl} &= \int_0^1 [d^i N_{n,k}(\eta)/d\eta^i \times d^j N_{s,k}(\eta)/d\eta^j \\
 &\quad \times \{\eta + 1/(Ro/Ri - 1)\}^k H(\eta)^L] d\eta
 \end{aligned}$$

Table 6. The effect of variation of varying thickness on frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho} h_o / Do$ of annular sector thick plates tapered in the radial direction: $Ro/Ri=2.0$, $h_l/h_o=2.0$ and $B/h_o=10.0$

ϕ (°)	Boundary conditions	Types	Modes							
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
30	CC-CC	1	56.85	89.19	108.4	133.3	138.9	166.7	175.2	184.4
		2	52.64	84.07	101.8	126.6	130.5	159.4	166.6	176.1
		3	50.39	81.45	97.63	123.1	126.5	153.9	162.3	171.7
		4	60.38	93.43	113.4	138.8	144.7	172.2	181.9	191.1
		5	62.00	95.47	115.3	141.4	147.7	174.0	185.3	194.3
	FF-FC	1	8.696	21.83	33.59	50.26	63.55	74.39	89.13	90.43
		2	7.914	19.67	30.27	46.04	58.21	68.16	82.45	83.58
		3	7.171	18.26	28.77	44.42	55.50	65.62	79.72	80.84
		4	9.299	23.69	36.71	54.25	68.29	79.95	95.10	96.63
		5	9.272	24.23	38.27	56.65	70.51	83.19	98.60	100.3
60	CC-CC	1	33.90	49.44	72.48	72.93	85.25	100.2	105.4	121.1
		2	32.17	45.82	67.02	69.00	80.26	93.05	98.82	115.0
		3	31.25	43.90	63.90	66.98	77.70	88.75	95.54	111.8
		4	35.50	52.63	75.87	77.38	89.45	105.9	110.9	126.0
		5	36.28	54.10	77.32	79.41	91.48	108.1	113.6	128.4
	FF-FC	1	8.726	14.15	26.98	33.81	38.64	48.57	52.76	72.59
		2	7.953	12.81	24.46	30.42	35.20	44.20	48.38	66.98
		3	7.219	11.95	23.12	28.90	33.77	42.08	46.69	64.79
		4	9.323	15.35	29.30	36.98	41.89	52.56	56.86	77.74
		5	9.300	15.75	30.34	38.56	43.66	54.50	59.30	80.83
90	CC-CC	1	30.54	36.67	47.26	61.59	70.26	75.41	75.41	78.57
		2	29.31	34.58	43.86	56.74	66.75	71.34	72.40	79.19
		3	28.65	33.46	42.05	54.12	64.86	68.93	69.20	76.66
		4	31.67	38.58	50.30	65.77	73.18	78.83	83.72	88.30
		5	32.23	39.49	51.71	67.66	74.49	80.43	85.93	90.32
	FF-FC	1	8.721	11.53	18.45	28.93	33.61	35.89	42.43	44.29
		2	7.957	10.49	16.71	26.28	30.29	32.45	38.93	40.05
		3	7.230	9.760	15.74	24.97	28.81	30.97	37.50	38.09
		4	9.311	12.44	20.05	31.40	36.73	39.14	45.76	48.18
		5	9.290	12.68	20.73	32.60	38.29	40.82	47.63	50.14

参考文献

1. Kobayashi, H., Ishikawa, K. and Furuichi, T.: A survey of literature on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ., Vol. 33, pp. 115-136, 1992.
2. Xiang, Y., Liew, K.M. and Kitipornchai, S.: Transverse vibration of thick annular sector plates. J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 119, pp. 1579-1599, 1993.
3. Mizusawa, T., Kito, H. and Kajita, T.: Vibration of annular sector Mindlin plates by the spline strip method. Comput. and Struct., Vol. 53, pp. 1205-1215, 1994.

4. McGee, O.G., Huang, C.S. and Leissa, A.W.: Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 37, pp. 537-566, 1995.
5. Liew, R.M., Kitipornchai, S. and Xiang, Y.: Vibration of annular sector Mindlin plates with internal radial line and circumferential arc supports. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 183, pp. 401-419, 1995.
6. Mizusawa, T. and Ushijima, H.: Vibration of annular sector Mindlin plates with intermediate arc supports by the spline strip method. *Comput. and Struct.*, Vol. 61, pp. 819-829, 1996.
7. 高木信治, 水澤富作: Spline Prism 法を用いた扇形厚板の三次元解析について, 構造工学論文集, Vol. 40A, pp. 1-12, 1994.
8. 水澤富作, 田中宏明: Spline layer 法を用いた扇形厚板の自由振動解析, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp. 1-9, 1998.
9. Mizusawa, T.: Vibration of stepped annular sector plates by the spline element method. *Comput. and Struct.*, Vol. 41, pp. 377-383, 1991.
10. Kim, C.S. and Dickinson, S.M.: On the free, transeverse vibration of annular and circular, thin, sectorial plates subjected to certain complicating effects. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 134, pp. 407-421, 1989.
11. Tanaka, K., Yamada, G., Kobayashi, Y. and Miura, S.: Free vibration of a cantilever annular sector plate with curved radial edges and varying thickness. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 143, pp. 329-341, 1990.
12. Mizusawa, T. and Takami, K.: Vibration of tapered thickness annular sector plates by spline element method. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 154, pp. 147-160, 1992.
13. Molaghasemi, H.R. and Harik, I.E.: Free vibration and dynamic stiffening of sector plates wiyh radial variation in rigidity. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 169, pp. 284-288, 1994.
14. 近藤八重、水澤富作: スプライン帯板法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析. 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, I-63, pp. 129-130, 1997.
15. Vaidyanathan, S., Busby, H.R. and Houser, D.R.: A numerical approach to the static analysis of an annular sector Mindlin plate with applications to bevel gear design. *Comput. and Struct.*, Vol. 51, pp. 255-266, 1994.

(1998年9月18日受付)