

## 局所変形の影響を考慮した梁の衝撃力の一計算法

A METHOD FOR ESTIMATING IMPACT FORCE ON BEAMS  
CONSIDERING INFLUENCE OF LOCAL DEFORMATION

柴田俊文\*、三上 隆\*\*、佐藤昌志\*\*\*、須藤敦史\*\*\*\*、荻澤憲吉\*\*\*\*\*

Toshifumi SHIBATA, Takashi MIKAMI, Masashi SATOH, Atsushi SUTOH and Noriyoshi NIRASAWA

\*北海道大学大学院工学研究科修士課程 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

\*\*工博 北海道大学大学院工学研究科教授 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

\*\*\*工博 北海道開発局開発土木研究所室長 (〒062 札幌市豊平区平岸 1 条 3 丁目)

\*\*\*\*工博 (株)地崎工業技術開発部 (〒105 東京都港区西新橋 2 丁目 23 番 1 号)

\*\*\*\*\*工博 北海道大学大学院工学研究科助教授 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

For impact analysis, it is important to consider the contact problem. In the more general case of localized impact problems on the beam, the dynamic responses are solved using the Hertz's contact law. Due to the tedious work of formulating and solving the nonlinear equation, the local contact condition between the beam and the impactor is often approximated by a linear mass-spring model. However, in many cases, the values of mass and spring parameter are determined experientially, and only few attempts have so far been made at simple method for estimating these parameters.

In this study, a static three-dimensional FEM solution procedure is used to obtain the mass and spring parameters. The versatility and accuracy are illustrated through several numerical examples. Only beams are dealt with in the present study. The extension to other structural elements is, however, straightforward.

*Key words: local deformation, Hertz's law, spring-mass model, finite element method, beam*

## 1. はじめに

梁の衝撃挙動を明らかにすることは、設計上重要な問題であり、これまでに実験的あるいは解析的に多くの研究が行われている。この問題は厳密には梁の振動や衝撃点における局所変形を考慮する、いわゆる修正 Hertz 理論に基づき解析する必要がある、Timoshenko<sup>1)</sup>が非線形積分方程式に帰着させて解を得てから、修正 Hertz 理論は板、殻(シェル)等の種々の構造要素に適用されてきた<sup>2,7)</sup>。また最近では、構造要素の離散化手法としての有限要素法と結びつけられた研究もある<sup>8,9)</sup>。しかし、衝撃力を算出するには面倒な非線形方程式を解く必要があり、実用的な解析法とは言い難い面もある。

そのため、衝撃体と被衝撃体の接触点の相互作用を簡易なばね-質量系にモデル化して解析を行う報告も数多いが、ばね(等価剛性)定数と質量(等価質量)の算出根拠は不明確なものが多い。

本研究では、衝撃体を剛球と仮定した質量とばね定数の決定のための一近似算定法を提示し、剛球と梁が付着した状態、分離した状態を含む数値計算を両端単純支持された梁を例に取り上げ行い、その妥当性・適用可能性の検討を行ったものである。なお、梁の離散化には Bernoulli-Euler 梁理論に基づいた有限要素法<sup>10-11)</sup>を採用した。

## 2. 解析手法

## 2. 1 解析モデルと基礎方程式

図-1 に示すように質量  $m_c$  の剛球が速度  $v_0$  で、両端単純支持梁に衝突する場合を考える。ただし、問題を簡易化するために、剛球は梁のスパン中央に衝突するものとし、その衝突面積は小さくて衝撃力は衝撃点に集中力として生じるものと仮定する。また、剛球の衝突による局所変形と振動の影響は、ばね-質量系へのモデル化で考慮され、後述する三次元有限要素法の静的解析結果より得られる

等価剛性  $k_1$  と等価質量  $m_1$  とを用いて算定する。

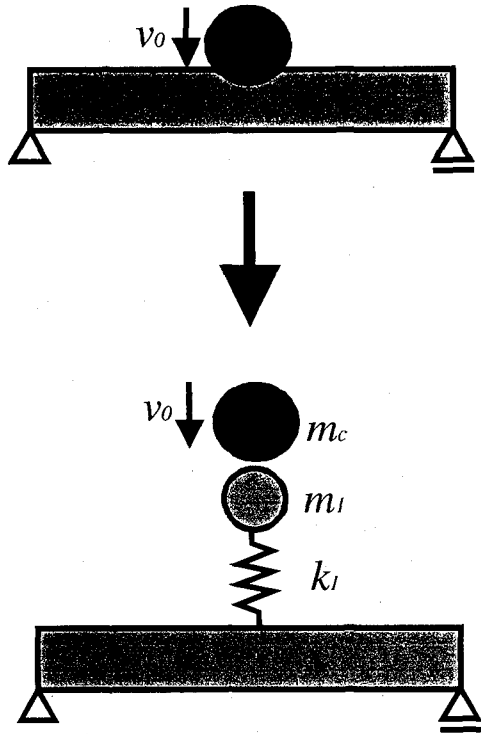


図-1 ばね-質量系へのモデル化

さて、梁を有限要素法で離散化し、減衰の影響は小さいものとしてその影響を無視すれば、剛球と梁が付着(接触)している状態の運動方程式は、梁要素の剛性・質量マトリックス、等価剛性  $k_1$  と等価質量  $m_1$  及び剛球の質量  $m_c$  を用いて次式のようにマトリックス表示される。

$$[M]\{d^2u/dt^2\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

ここで  $t$  は時間、 $[M]$  は質量マトリックス、 $[K]$  は剛性マトリックス、 $\{u\}$  は変位ベクトルである。

また衝撃力  $f$  は次式より求められる。

$$f = -(m_1 + m_c)d^2u_1/dt^2 \quad (2.a)$$

または

$$f = k_1(u_1 - u_2) \quad (2.b)$$

ここで  $u_1$  は等価質量の変位、 $u_2$  は梁のスパン中央の変位である。

式(1)は、剛球と梁の付着、分離の状態が生じる時刻の変位、速度に関する条件を用い、Newmark  $\beta$  法を使用して解くことができる。各状態の条件は以下のように整理することができる。

#### <1>初期条件

剛球衝突後に等価質量と剛球(質量  $m_c$ )が一体となって運動するため  $m_1 + m_c$  が全質量となる。剛球の衝突速度を  $v_0$  とすると等価質量の初期速度は運動量保存則を用いて

$$\dot{u}_{1,0} = m_c v_0 / (m_1 + m_c) \quad (3)$$

で表すことができる。また、梁の初期変位と初期速度、及び等価質量の初期変位は0である。

#### <2>付着から分離状態に移行する時の条件

剛球が梁に付着している状態では  $u_c$  (剛球の変位) =  $u_1$  であり、 $d^2u_c/dt^2 = d^2u_1/dt^2 < 0$  が成立しなければならない。従って  $d^2u_c/dt^2 = d^2u_1/dt^2 = 0$  (式(2.a)より  $f = 0$ ) が付着から分離に移行する時刻を与える。このときの変位、速度を求め、それらを分離状態のスタート時の条件として用いる。

#### <3>分離から付着状態に移行する時の条件

分離に移行した状態では等速運動( $d^2u_c/dt^2 = 0$  より)を行う剛球と等価質量の相対変位を求め、相対変位が0になるときが分離から付着に移行する時刻( $t_1$ と便宜的に記す)となる。従って付着状態のスタート時の条件には時刻  $t_1$  における梁の速度及び梁と等価質量の変位を使用し、また等価質量の速度( $\dot{u}_{1,t_1}$ )は次式より近似的に算定した。

$$\dot{u}_{1,t_1} = (m_1 \dot{u}_{1,t_1-1} + m_c \dot{u}_{c,t_1-1}) / (m_1 + m_c) \quad (4)$$

ここで添字  $t_1 - 1$  は時刻  $t_1 - \Delta t$  を意味し、また  $\dot{u}_{c,t_1-1}$  は分離状態での剛球の衝突速度を表すが時間刻み幅  $\Delta t$  によらず一定値をとる。

なお本論文では、付着から分離に移行あるいは分離から付着に移行するときの判定は、剛球の運動を追跡する必要から運動方程式に基づいているが、式(2.b)を用いて  $u_1 - u_2 > 0$  あるいは  $u_1 - u_2 \leq 0$  の関係からも判断できる。

## 2. 2 等価剛性と等価質量の算定

局所変形の影響を考慮したばね-質量系の等価剛性  $k_1$  と等価質量  $m_1$  を解析的に求めることは困難なのでここでは近似的に静的な三次元有限要素法を用いて求めることにする。

局所変形を作り出すために剛球の衝撃点に対応する梁の上下辺2点に集中荷重  $P$  を正反対方向に作用させる。マトリックス表示すれば次式となる。

$$[K_s]\{u_s\} = \{P_s\} \quad (5)$$

ここで添字  $s$  は静的問題を意味する。

上式を解き、衝撃点における変位を  $\delta$  と記せば、等価剛性  $k_1$  は次式より得られる。

$$k_1 = P / \delta \quad (6)$$

等価質量は式(5)の解  $\{u_s\}$  とモード解析法の等価質量の算定法を援用して求めることにする。

モード解析法によれば  $n$  次の等価質量  $M_n$  は次式で定義される。

$$M_n = \{\phi_n\}^T [M_s] \{\phi_n\} \quad (7)$$

ここで  $\{\phi_n\}$  は  $n$  次の固有モード、 $[M_s]$  は質量マトリックスである。

従って上式を参照し、式(5)から得られる変形  $\{u_s\}$  を衝撃点における変位  $\delta$  で規準化した変位ベクトルを固有モードに採用すれば、等価質量  $m_1$  は次式より得られる。

$$m_1 = \{u_s\}^T [M_s] \{u_s\} / \delta^2 \quad (8)$$

式(8)から得られる等価質量は式(5)の変位  $\{u_s\}$  から理解できるように一次の局所変形モードに対応する質量であり、またその算定法は静的な変形解を用いて固有振動数を求めるエネルギー法<sup>12)</sup>に類似なものである。

なお3.の数値計算例では20節点の立体要素を、質量マトリックスは集中質量マトリックスを採用した。

### 3. 数値計算例

以下にここで提示した等価剛性と等価質量を用いて求めた衝撃荷重の時系列変化の結果を示すが、その妥当性の検討は修正 Hertz 理論及び有限要素法を併用し Newton-Raphson 法により板の衝撃応答解析を試みている文献9)の手法の結果との比較で行った。

#### 3. 1 要素分割数及び時間刻み幅による精度の検討

離散化条件(要素分割数  $N$  と時間刻み幅  $\Delta t$ )の解の精度に与える影響は Timoshenko<sup>1)</sup>が使用した単純支持梁(長さ  $L$ 、高さ  $h$  及び幅  $b$  の中実矩形断面)のスパン中央に半径  $r$  の剛球が速度  $v_0$  で衝突する場合を例に取り調べた。用いた諸元<sup>1)</sup>は下記である。

例-1:  $L = 0.1535(\text{m})$ 、 $b = h = 0.01(\text{m})$ 、  
 $r = 0.01(\text{m})$ 、 $v_0 = 0.01(\text{m/sec})$

例-2:  $L = 0.307(\text{m})$ 、 $b = h = 0.01(\text{m})$ 、  
 $r = 0.02(\text{m})$ 、 $v_0 = 0.01(\text{m/sec})$

なお、剛球と梁の弾性係数は  $E = 0.22 \times 10^{12}(\text{N/m}^2)$ 、密度は  $\rho = 0.79 \times 10^4(\text{kg/m}^3)$  である。要素分割は対称性より梁の半分の  $N = 20$  及び  $N = 50$  に等分割し、時間刻み幅  $\Delta t$  を梁の基本固有周期の約  $1/250$  として解析した衝撃力の結果を図-2(例-1を(a)、例-2を(b))に示す。なお、図で実線(Exact)は文献9)の手法によるものである。

図よりわかるように、結果は分割数を変化させても相違がないこと、また時間刻み幅を基本固有周期の約

$1/100$  とした場合も結果に影響を与えなかったので以後の解析では要素分割数を20、時間刻み幅は梁の基本固有周期の約  $1/250$  とした。

表-1 梁の諸元

|         | 梁-A  | 梁-B  |
|---------|------|------|
| $b/h$   | 1.0  | 0.5  |
| $L/h$   | 15.0 | 10.0 |
| $h_0/h$ | 0.2  | 0.1  |
| $b_0/h$ | 0.2  | 0.1  |

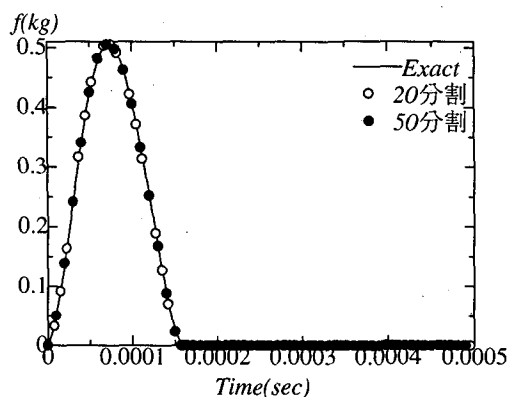


図-2(a) 要素分割数の検討(1)

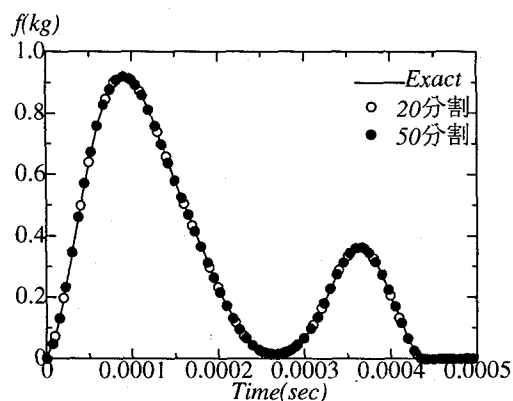


図-2(b) 要素分割数の検討(2)

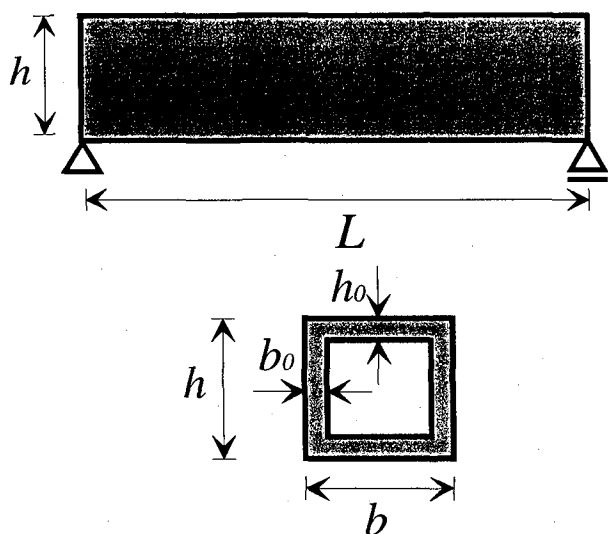


図-3 梁の横断面図

### 3. 2 提示した解法の妥当性の検討

提示した解法による衝撃力の妥当性を検討するために図-3 に示す長さ  $L$ 、一様な曲げ剛性  $EI$  ( $E$  = 弾性係数  $I$  = 断面二次モーメント) の長方形中空断面の単純支持梁を例にして固有周期の異なる梁-A 及び梁-B の二種類の諸元(表-1)について解析を行った。ただし梁-A の基本固有周期は  $(c/h)T_0 \approx 447$ 、そして 梁-B は

$(c/h)T_0 \approx 174$  である。

なお、結果は次のようなパラメーターで整理した。

$$v = v_0 / c \quad m_a = m_c / M_0$$

$$k = k_1 / k_0 \quad m = m_1 / m_0$$

ここで、 $(v, m_a, k, m)$  はそれぞれ(衝突速度、剛球の質量、ばねの等価剛性、ばねの等価質量)を表すパラメーターであり、さらに衝突速度のパラメーターの表示式に現れる  $c$  は梁を伝播する縦波の速度、 $M_0$  は梁の全質量であり、 $k_0$  及び  $m_0$  はそれぞれ梁中央に集中荷重が作用するものとして評価した曲げ変形に対する等価剛性、及び一次振動モードを仮定したときの曲げ変形に対する等価質量<sup>12)</sup>で次式で与えられる。

$$k_0 = 48 EI / L^3, \quad m_0 = 17 M_0 / 35$$

なお、三次元有限要素法により求めた各梁の  $k, m$  は以下の通りである。

$$\text{梁-A: } k = 0.60 \times 10^2 \quad m = 0.12 \times 10^{-1}$$

$$\text{梁-B: } k = 0.20 \times 10^2 \quad m = 0.26 \times 10^{-1}$$

また次に示す結果は全て、無次元化した衝撃力の時刻歴応答を無次元化した時間に対して示したもので破線が文献9)の解法による結果(以下、便宜的に厳密解と称する)で、実線がここで提示した手法による結果である。

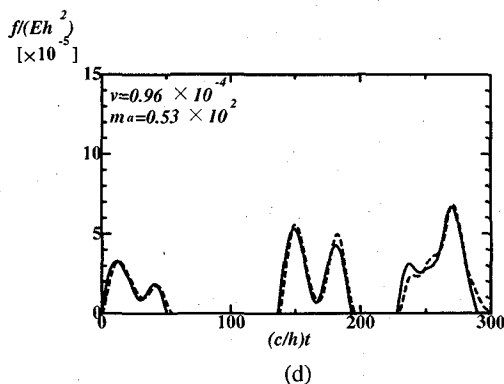
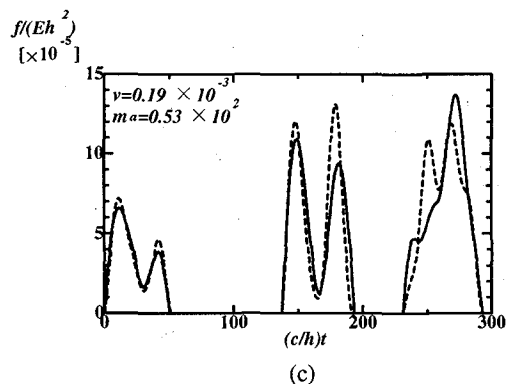
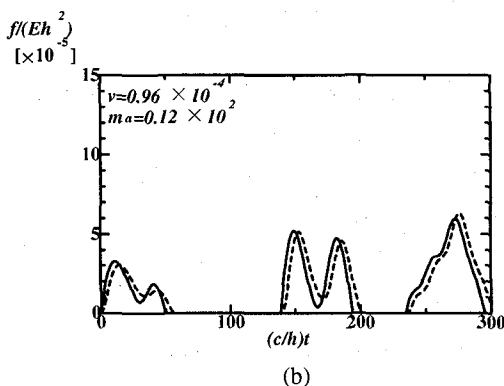
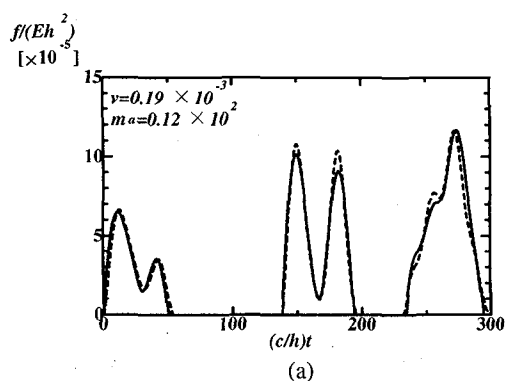
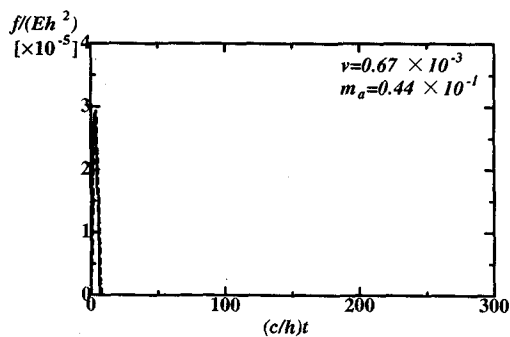
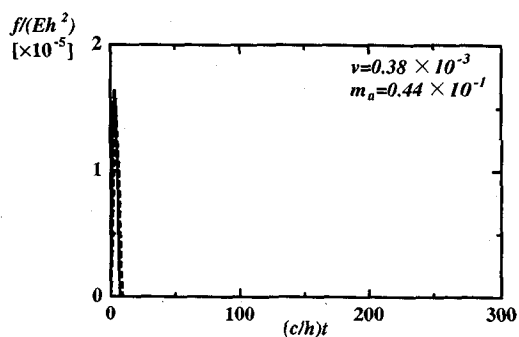


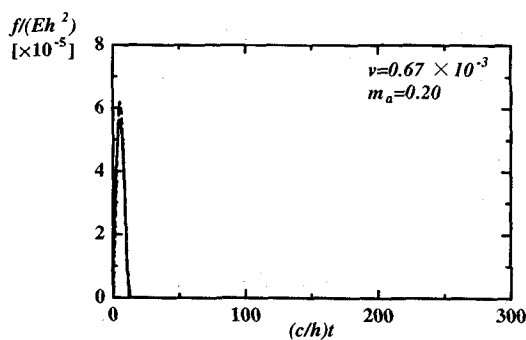
図-4 梁-A の衝撃力波形



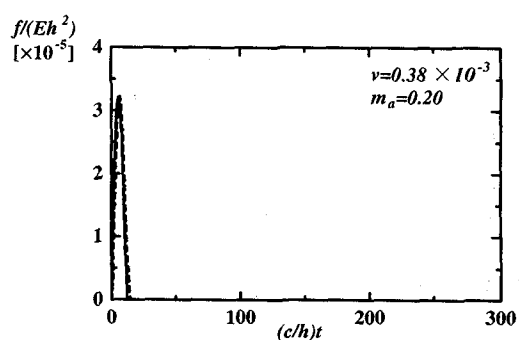
(a)



(b)

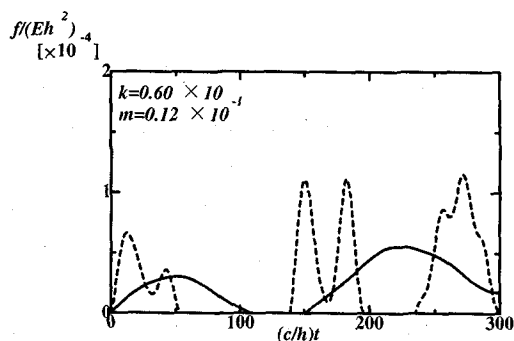


(c)

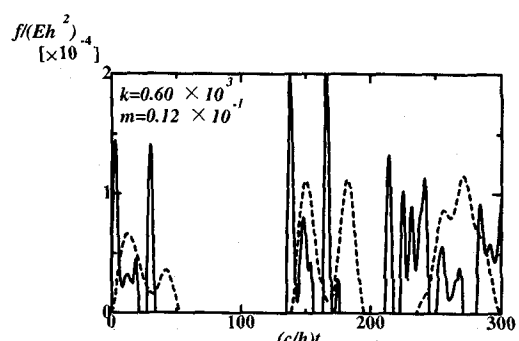


(d)

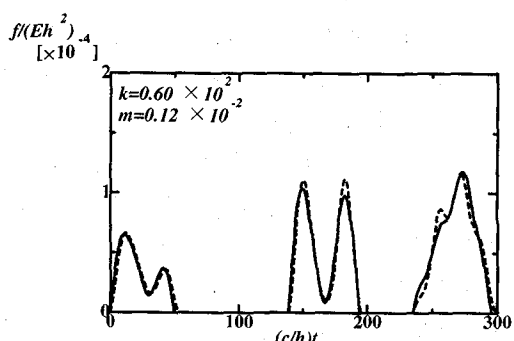
図-5 梁-Bの衝撃力波形



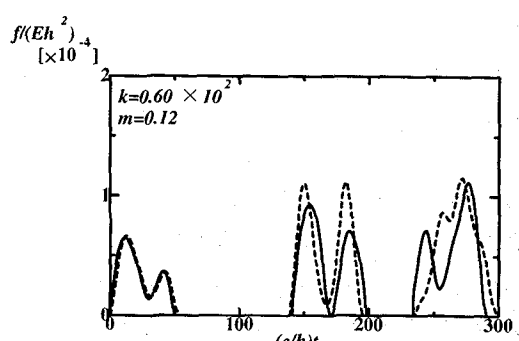
(a)



(b)

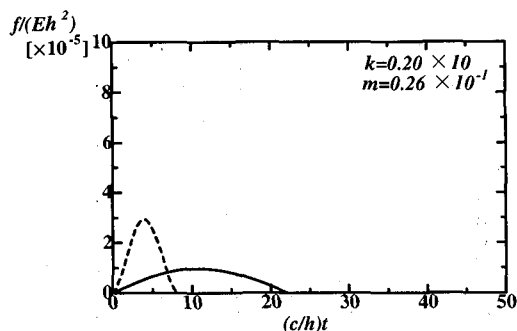


(c)

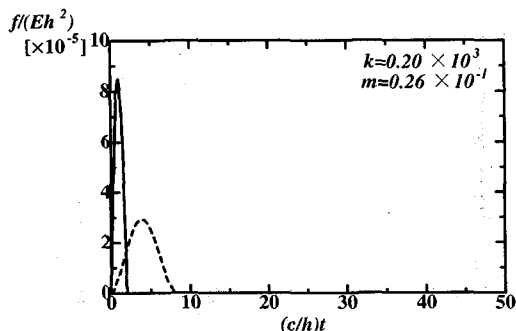


(d)

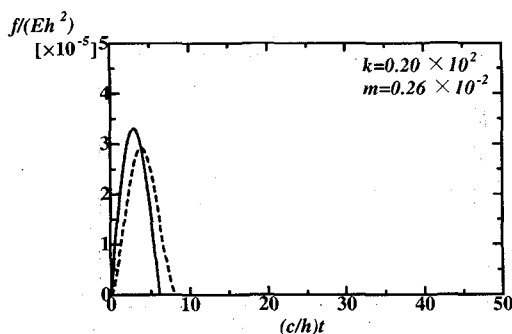
図-6 衝撃力波形に及ぼす等価剛性と等価質量の影響(梁-A)



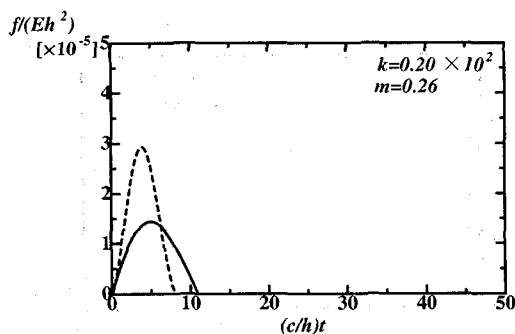
(a)



(b)



(c)



(d)

図-7 衝撃力波形に及ぼす等価剛性と等価質量の影響(梁-B)

図-4は梁-Aについて衝突速度 $v$ と剛球の質量 $m_a$ の種々の組み合わせに対する衝撃力の時間応答曲線を時間 $0 \leq (c/h)t \leq 300$ の範囲で示したものである。これによれば複数回の衝撃を繰り返し、いずれの場合も $(v, m_a)$ の組み合わせによらず近似解は厳密解と比較して衝撃時間、衝撃力の時刻歴の全体的挙動をよく再現していると判断できるが、衝突速度と剛球の質量が大きい場合は、衝撃力のピーク値に差が生じている(特に二回目以降の衝撃)ことがわかる。これはここでは衝撃体と被衝撃体の相互作用を単一のばね-質量系にモデル化し、その等価剛性と等価質量は静的解析より定めたものであり、従ってモデル化の正確さや等価剛性の算定の正確な評価の必要性を示唆している。

図-5は梁-Bの衝撃力の時間応答曲線を、図-4と同様に種々の $(v, m_a)$ について同じ時間領域で示したものである。これによれば、一回の衝撃で衝撃現象が終了し、厳密解との比較では衝突速度と剛球の質量が大きい場合に衝撃力のピーク値等に差異が認められるのは図-4と同様であるが、近似解法は梁に作用する衝撃力の基本的特性(ピーク値、衝撃時間、衝突回数等)を把握するには実用的には十分であると判断できる。

既に述べたように、衝撃体と被衝撃体の相互作用をばね-質量系にモデル化して解析している報告も多いが、等価剛性と等価質量の算出根拠を明確にしているのは少ないようである。以下では、等価剛性と等価質量の評価の精度が衝撃力の基本的特性にどのような影響を与えるかを調べてみる。

図-6に、衝突速度 $v=0.19 \times 10^{-3}$ 及び剛球の質量 $m_a=0.12 \times 10^2$ の梁-Aを例にとり(図-4(a))、ここで提示した方法で算定した等価質量 $m$ を用い、等価剛性を提示した方法で算定した等価剛性 $k$ の1/10倍と10倍とした場合の結果(図(a)と(b))、及び算定した等価剛性 $k$ を用い、等価質量 $m$ を1/10倍と10倍とした場合の結果(図(c)と(d))を示す。これによれば、等価剛性 $k$ と等価質量 $m$ の評価は衝撃力の特性に大きな影響を及ぼし、特に剛性 $k$ の評価は衝撃力のピーク値、衝撃時間、衝突回数等、時刻歴応答全体に影響を与え、剛性 $k$ を正しく評価すれば質量 $m$ は、二回目以降の衝撃力のピーク値に影響を与えている。

図-7は、衝突速度 $v=0.67 \times 10^{-4}$ 及び剛球の質量 $m_a=0.44 \times 10^{-1}$ の梁-Bを例にとり(図-5(a))、図-6と同様に等価剛性と等価質量を変化させ、衝撃力の時刻歴応答を示したものである。これによれば、等価剛性の過大評価はピー

ク値を大きめ、及び衝撃時間は短めの結果を与え、また等価剛性の過小評価は逆の結果を与える傾向にある。一方、等価質量の過大評価はピーク値を小さめ、及び衝撃時間は長めの結果を、また等価質量の過小評価は反対の結果を与えるものの、図-6の場合と同様に等価剛性の算定の精度が大きな影響を与えることがわかる。

#### 4. まとめ

本研究では、衝撃体を剛球と仮定し局所変形の等価剛性(ばね定数)と等価質量を有限要素法を用いて求め、剛球と梁が付着した状態、分離した状態を考慮に入れて衝撃力を算定し修正 Hertz 理論と比較することによってその妥当性の検討を行った。以下に本研究の主要な結論を示す。

<1>ここで提示した等価剛性  $k$  と等価質量  $m$  を用いた衝撃力の時刻歴応答は、ほぼ妥当な結果を示している。

<2>一般に衝撃力の基本的特性(ピーク値、衝撃時間、衝突回数等)を適切に把握するには等価剛性を精度良く算定する必要がある。

<3>等価質量を大きめ(小さめ)に評価すると衝撃力のピーク値は小さく(大きく)、衝撃時間は長く(短く)なり、一方、等価剛性を小さめ(大きめ)に評価すると衝撃力のピーク値は小さく(大きく)なる傾向があり、衝撃時間は長く(短く)なる傾向にある。

<4>ここで提示した手法は梁と剛球の相互作用を単一のばね-質量系にモデル化し、その等価剛性と等価質量を静的問題に置換して算出している。そのため明確な適用限界を示す必要がある。

#### 参考文献

- 1) Timoshenko, S. : Zur Frage der Wirkung eines Stosses auf Einer Balken, Zeitschrift fur Mathematik and Physik, Vol.62, pp.198-209, 1913.
- 2) Sun, C.T. and Chattopadhyay, S. : Dynamic response of

anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mass, Journal of Applied Mechanics, pp.693-698, 1975.

- 3) Shivakumar, K.N. , Elber, W. and Illg, W. : Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.52, pp.674-680, 1985.
- 4) Lee, Y. , Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. : The lumped parameter method for elastic impact problems, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.50, pp.823-827, 1983.
- 5) 神宮利夫, 松本浩之, 根津紀久雄, 坂本賢治 : 球の平板への衝突における衝撃荷重に及ぼす衝突接触挙動の影響, 日本機械学会論文集 (A 編), 53 巻 496 号, pp.2331-2335, 1987.
- 6) 戸部俊美, 加藤正名 : 梁の横衝撃に関する研究, 日本機械学会論文集 (第 1 部), 38 巻 314 号, pp.2506-2513, 1972.
- 7) Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. : Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads, Transactions of the ASME, Vol.57, pp.376-382, 1990.
- 8) Hsi-Yung, T.Wu, and Fu-Kuo Chang, : Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact, Computers & Structures, Vol.31, No.3, pp.453-466, 1989.
- 9) Liao, C.L., and Tsai, J.S. : Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact using a partial mixed 3-D finite element, Computers & Structures, Vol.53, No.1, pp.53-61, 1994.
- 10) 鷲津久一郎他共著 : 有限要素法ハンドブック II 応用編, 培風館, 1983.
- 11) 河島佑男 : 動的応答解析, 培風館, 1972.
- 12) 谷下市松 : ティモシェンコ 工業振動学, コロナ社, 1939.

(1997 年 9 月 26 日受付)