

異方性平面梁の弾性衝撃応答解析

TRANSIENT RESPONSE OF TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATES IN PLANE STRAIN STATE

小林治俊*, 米田幸司**

Harutoshi KOBAYASHI and Koji YONEDA

*工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科 (〒558-0022 大阪市住吉区杉本3-3-138)

**修士(工学) 日本道路公団東北支社 (〒980-0021 仙台市青葉区中央3-2-1 青葉通りプラザビル)

The elastodynamic response of a plate in plane strain state, with the axis of transverse isotropy normal to the top and bottom surfaces of a plate, is investigated analytically by using the method of eigenfunction expansion. The calculated responses at some locations of interest of a plate are shown for a partially distributed uniform load suddenly applied on a plate top surface, and then comparisons between the results of isotropic and transversely isotropic cases are made. Graphite/epoxy composite and E glass/epoxy composite are chosen as an example of transversely isotropic material.

Keywords: elastodynamics, stress wave, transversely isotropy, plate in plane strain, method of eigenfunction expansion

1. はじめに

近年、複合材料の開発が大いに進展して、軽量でしかも高強度という繊維補強複合材料はその特性に応じた種々な工学的目的に使用されている。このような複合材料は、分散相とマトリックス相の適当な構成よりなるが、巨視的には異方性となすことが可能である。例えば、Graphite/epoxy, E glass/epoxy などは横等方性を示す材料である。したがって、このような異方性材料モデルの力学的特性を解明する必要性が高まっている。

衝撃荷重を受ける弾性体の波動伝播を動弾性論を用いて究明する研究は、これまではほとんどが等方弾性体を対象としており、異方性体の解析例は少ない。その理由として、異方性体のつり合い式が等方性体のものに比べると格段に複雑であり、静的、動的問題ともにつり合い式から非連成偏微分方程式を導くための適切な変位ポテンシャルを見いだすことが困難であること、異方性体そのものの工学的適用が少なく理論的、解析的興味にやや偏向していたという背景があげられる。一方、波動伝播特性や自由振動特性は必然的に材料特性の解明と密接に関連しているので、AE (acoustic emission) をはじめ実験的研究が多くなされているものの、平板や、平面はりを対象とした解析的研究は少ない。例えば、Chang-Sun [1]は、衝撃の物体力を受ける横等方性帯板を空間、時間ともに差分近似して、変位応答を実験結果と比較し

ている。また Weaver ら[2]は、表面に集中パルス荷重を受ける横等方性無限板の問題を空間に対して Hankel 変換、時間変数を Laplace 変換し、Laplace 逆変換には高速フーリエ変換 (FFT) を適用した数値逆変換により変位応答を求めて実験値との比較を行っている。このように両研究は変位応答に留まっていて、衝撃破壊に関連する応力の応答については不明である。

本研究は、材料異方性が応力の応答に及ぼす影響について検討するため、横等方性平面はりの衝撃応答解析を動弾性論に基づいて行ったものである。衝撃荷重を受ける物体の波動伝播解析では、応力波の波頭を正確に表現することが根幹である。そのため解析手法には著者らがこれまで等材料よりなる多層板構造[3]や横等方性円板[4]の衝撃応答解析に適用した固有関数展開法を用いた。本法によれば、波動伝播解析において通常用いられる時間消去法としての Laplace 変換と困難になりがちなその逆変換は不要であり、一般構造物の動的応答解析で用いられているモード法と同様の取り扱いが出来るものである。固有関数(振動モード関数)を求める際に必要な波動方程式は静的問題に対する Hu のポテンシャル関数[5]を拡張して導いた。数値計算例では、横等方性材料としての Graphite/epoxy および E glass/epoxy の複合材料を対象に、等方性体との比較を通じ、材料異方性が応答に及ぼす影響を調べた。

2. 衝撃応答解析

2.1 基礎方程式

図-1は横等方性平面はりの座標系で、はりはスパン長が ℓ 、はり高 h の平面ひずみ問題として取り扱う。xy-面を等方面、z-軸を異方軸とし、x, z 方向の変位を u, w とする (y-軸は紙面に鉛直で、図では省略)。はり両端 ($x=0, \ell$) での境界条件は単純支持である。

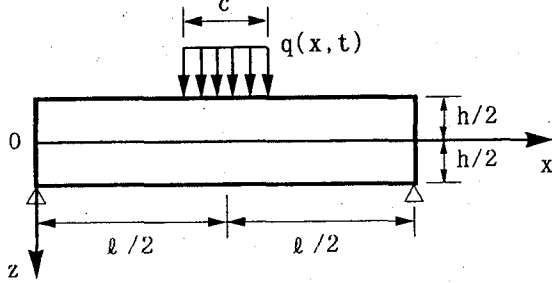


図-1 平面はりの座標系 (平面ひずみ)

平面ひずみ問題での応力-変位関係は次のように与えられる[6]。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xz} &= C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

ここで C_{ij} は材料定数であり、等方面内でのヤング率、ポアソン比を E, ν とし、等方面に垂直な面内でのヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数をそれぞれ E', ν', G' とすれば次のように表される。

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{E[1-(\nu')^2(E/E')]}{(1+\nu)R}, \quad C_{13} = \frac{E\nu'}{R}, \\ C_{33} &= \frac{E'(1-\nu)}{R}, \quad C_{44} = G'\end{aligned}\quad (2)$$

ただし、

$$R = 1 - \nu - 2(\nu')^2(E/E') \quad (3)$$

変位で表した運動方程式は、 ρ を密度として、

$$\begin{aligned}L_x(u, w) &= \rho \ddot{u} \\ L_z(u, w) &= \rho \ddot{w}\end{aligned}\quad (4)$$

と表される。ただし、ドットは時間微分 ($\dot{} = \partial/\partial t$) を意味し、微分演算子 L_x, L_z の内容は、

$$L_x(u, w) = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

$$L_z(u, w) = (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (5)$$

はりの両端、上下辺での境界条件を次のように規定する。

$$\begin{aligned}w &= \sigma_x = 0 & (x=0, \ell) \\ \tau_{xz} &= 0, \quad \sigma_z = -q(x, t) & (z=-h/2) \\ \tau_{xz} &= \sigma_z = 0 & (z=h/2)\end{aligned}\quad (6)$$

ここで、作用荷重 $q(x, t) = f(t)q(x)$ はフーリエ展開により次のように表せる。

$$\begin{aligned}q(x, t) &= f(t) \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = m\pi/\ell \\ q_m &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} q(x) \sin \alpha_m x \, dx\end{aligned}\quad (7)$$

初期条件は静止状態からの衝撃応答を考えると次式で与えられる。

$$u = w = 0, \quad \dot{u} = \dot{w} = 0 \quad (t=0) \quad (8)$$

2.2 固有関数展開法による衝撃応答解析

固有関数展開法[3, 4]によれば、式(4)の解を次のように慣性項を無視した準静的解 u^s, w^s と慣性項の影響を考慮した擾乱解 u^d, w^d の和で与える。

$$\begin{aligned}u &= u^s(x, z, t) + u^d(x, z, t) \\ w &= w^s(x, z, t) + w^d(x, z, t)\end{aligned}\quad (9)$$

同時に、境界条件(6)を各解に対応させて次のように分離する。すなわち、準静的解に対して

$$\begin{aligned}w^s &= \sigma_x^s = 0 & (x=0, \ell) \\ \tau_{xz}^s &= 0, \quad \sigma_z^s = -q(x, t) & (z=-h/2) \\ \tau_{xz}^s &= \sigma_z^s = 0 & (z=h/2)\end{aligned}\quad (10)$$

一方、擾乱解に対しては

$$\begin{aligned}w^d &= \sigma_x^d = 0 & (x=0, \ell) \\ \tau_{xz}^d &= \sigma_z^d = 0 & (z=\pm h/2)\end{aligned}\quad (11)$$

さて、準静的解はつり合い式：

$$L_x(u^s, w^s) = 0, \quad L_z(u^s, w^s) = 0 \quad (12)$$

および式(10)の境界条件式を満足するものである。ただし、応力は式(1)より

$$\begin{aligned}\sigma_x^s &= C_{11} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w^s}{\partial z} \\ \sigma_z^s &= C_{13} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w^s}{\partial z} \\ \tau_{xz}^s &= C_{44} \left(\frac{\partial u^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (13)$$

で与えられる。

次に、擾乱解は未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ と固有関数 (振動モード関数) $U_{mn}(x, z)$, $W_{mn}(x, z)$ の積より成る次の級数で与える。ただし、 m, n はそれぞれ x, z 方向の波数である。

$$(u^d, w^d) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) [U_{mn}(x, z), W_{mn}(x, z)] \quad (14)$$

固有関数は本問題の自由振動解析から得られる振動モード関数であるから、 ω_{mn} を mn 次の固有円振動数とすれば、式(4)より得られる方程式：

$$\begin{aligned} L_x(U_{mn}, W_{mn}) &= -\rho \omega_{mn}^2 U_{mn} \\ L_z(U_{mn}, W_{mn}) &= -\rho \omega_{mn}^2 W_{mn} \end{aligned} \quad (15)$$

と式(11)に対応した固有関数に関する境界条件：

$$\begin{aligned} W_{mn} = \sigma_{x, mn} &= 0 & (x=0, l) \\ \tau_{xz, mn} = \sigma_{z, mn} &= 0 & (z=\pm h/2) \end{aligned} \quad (16)$$

を満たすものである。ただし、応力モードは式(1)より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{x, mn} &= C_{11} \frac{\partial U_{mn}}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial W_{mn}}{\partial z} \\ \sigma_{z, mn} &= C_{13} \frac{\partial U_{mn}}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial W_{mn}}{\partial z} \\ \tau_{xz, mn} &= C_{44} \left(\frac{\partial U_{mn}}{\partial z} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

固有関数には仮想仕事の原理より導かれる次の直交性がある。

$$\int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} (U_{ij} U_{mn} + W_{ij} W_{mn}) dx dz = \delta_{im} \delta_{jn} N_{mn}^2 \quad (18)$$

ここに δ_{im} , δ_{jn} はクロネッカのデルタ、 N_{mn} はノルムである。

以上より求められる準静的解および擾乱解の和である式(9)の動的解が式(6)の境界条件を満足していることは明らかである。したがって次に未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ を求める手順を示す。式(9), (14)を式(4)へ代入し、式(12), (15)を利用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn}) U_{mn} &= -\ddot{u}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn}) W_{mn} &= -\ddot{w}^s \end{aligned} \quad (19)$$

ここで第1式の両辺に U_{ij} 、第2式では W_{ij} を掛けて2式を加え合わせ、次に物体全体にわたって積分し、式(18)の固有関数の直交性を利用すると $Q_{mn}(t)$ に関する次の2階の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn} = \ddot{Z}_{mn}(t) \quad (20)$$

ただし

$$Z_{mn}(t) = \frac{-1}{N_{mn}^2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} (u^s U_{mn} + w^s W_{mn}) dx dz \quad (21)$$

式(20)の解は周知のように次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Q_{mn}(t) &= Q_{mn}(0) \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \dot{Q}_{mn}(0) \sin \omega_{mn} t \\ &+ \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \ddot{Z}_{mn}(\tau) \sin[\omega_{mn}(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

積分定数 $Q_{mn}(0)$, $\dot{Q}_{mn}(0)$ を決めるため、初期条件の式(8)に式(9), (14)を代入すると、まず $u(x, z, 0) = w(x, z, 0) = 0$ より

$$\begin{aligned} u^s(x, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(0) U_{mn}(x, z) \\ w^s(x, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(0) W_{mn}(x, z) \end{aligned} \quad (23)$$

が得られ、第1、第2式の両辺にそれぞれ U_{ij} , W_{ij} を掛けて2式を加え合わせ、さらに物体全体にわたって積分し、固有関数の直交性を用いれば、

$$Q_{mn}(0) = Z_{mn}(0) \quad (24)$$

同様にして

$$\dot{Q}_{mn}(0) = \dot{Z}_{mn}(0) \quad (25)$$

を得る。

以上が固有関数展開法による定式化であり、次の3、4節で固有関数および準静的解の具体式を求める。

3. 固有関数

式(15)の解を求めるため、静的問題に対する H_u の変位関数[5]を拡張する。すなわち、 U_{mn} , W_{mn} を変位ポテンシャル ψ_{mn} を用いて次のように探る。

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial x \partial z} \\ W_{mn} &= \frac{-1}{C_{13} + C_{44}} \left[C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right] \psi_{mn} \end{aligned} \quad (26)$$

これを式(15)に代入すると、 ψ_{mn} に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} \left[\left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right) \left(C_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \rho \omega_{mn}^2 \right) - (C_{13} + C_{44})^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} \right] \psi_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、式(16a)の単純支持条件を満足するように ψ_{mn} を次のようにおく。

$$\psi_{mn} = \Phi_{mn}(z) \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = m\pi/l \quad (28)$$

これを式(27)へ代入し整理すると、次の $\Phi_{mn}(z)$ に関する4階の微分方程式を得る。

$$A \frac{d^4 \Phi_{mn}}{dz^4} + B \frac{d^2 \Phi_{mn}}{dz^2} + C \Phi_{mn} = 0 \quad (29)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A &= C_{33}C_{44} \\ B &= (C_{13}^2 + 2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33})\alpha_m^2 + (C_{33} + C_{44})\rho\omega_{mn}^2 \\ C &= (C_{11}\alpha_m^2 - \rho\omega_{mn}^2)(C_{44}\alpha_m^2 - \rho\omega_{mn}^2) \end{aligned} \quad (30)$$

次に、

$$\Phi_{mn} = e^{\beta z} \quad (31)$$

とおき、式(29)へ代入すると β に関する特性方程式

$$A\beta^4 + B\beta^2 + C = 0 \quad (32)$$

を得る。これは β^2 の2次方程式と見なせるが、 A, B, C すなわち材料定数 C_{ij} 、固有円振動数 ω_{mn} および α_m によって根の形式が異なる。 $A > 0$ であることに留意して、全ての根の形式を考えるとすれば、(1) 2正根 ($B^2 - 4AC > 0, C > 0, B < 0$)、(2) 1正根、1負根 ($C < 0$)、(3) 2負根 ($B^2 - 4AC > 0, C > 0, B > 0$)、(4) 共役複素根 ($B^2 - 4AC < 0, C > 0$) である。したがって、式(32)の4根はこれらの場合に対応して、(1) 4実根、(2) 2実根、2虚根、(3) 4虚根、(4) 2共役複素根となるので、 $\Phi_{mn}(z)$ の解形式も異なったものになる。以下では煩雑さをさけるため、4実根の場合の解形式のみ示すことにする。なお、等方性の場合、根は上述の(1)-(3)のいずれかに該当し、(4)の2共役複素根とはならない。

さて、式(32)を β^2 の2次式とみなした場合の2正根を β_1^2, β_2^2 とすれば、式(29)の解は $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を積分定数として

$$\begin{aligned} \Phi_{mn} &= (A_{mn} \sinh \beta_1 z + B_{mn} \cosh \beta_1 z) / \alpha_m \beta_1 \\ &+ (C_{mn} \sinh \beta_2 z + D_{mn} \cosh \beta_2 z) / \alpha_m \beta_2 \end{aligned} \quad (33)$$

と与えられ、これを式(28)へ代入し、さらに式(26)へ代入すると、変位モード式が

$$\begin{aligned} U_{mn} &= -(A_{mn} \cosh \beta_1 z + B_{mn} \sinh \beta_1 z \\ &+ C_{mn} \cosh \beta_2 z + D_{mn} \sinh \beta_2 z) \cos \alpha_m x \\ W_{mn} &= -[\mu_1 (A_{mn} \sinh \beta_1 z + B_{mn} \cosh \beta_1 z) \\ &+ \mu_2 (C_{mn} \sinh \beta_2 z + D_{mn} \cosh \beta_2 z)] \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (34)$$

と求められる。ここで、

$$\mu_i = \frac{C_{44}\beta_i^2 - C_{11}\alpha_m^2 + \rho\omega_{mn}^2}{(C_{13} + C_{44})\alpha_m\beta_i} \quad (i=1, 2) \quad (35)$$

この変位モード式を式(17)に代入して応力式的具体式を決定し、それらを式(16)の境界条件式に代入すると、積分定数に関する次の4元連立同次方程式を得る。

$$C [A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}]^T = 0 \quad (36)$$

C は 4×4 の係数行列。したがって、固有円振動数 ω_{mn} を定める振動数方程式は次式となる。

$$|C| = 0 \quad (37)$$

上式より ω_{mn} が定まれば、式(36)より積分定数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ 間の比が決定し、したがって固有関数(振動モード関数)が確定する。

4. 準静的解

次に、式(10)、(12)に示されている準静的問題では、慣性項が関与しないので、つり合い式は自由振動問題で $\rho\omega_{mn}^2$ を省略したものに対応する。よって、式(26)を参照して、変位 u^s, w^s を以下のようにおく。

$$\begin{aligned} u^s &= \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial x \partial z} \\ w^s &= \frac{-1}{C_{13} + C_{44}} \left[C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi^s \end{aligned} \quad (38)$$

これを式(12)に代入すると、変位ポテンシャル ψ^s は次式を満足する2つの関数 ψ_1^s, ψ_2^s の和 ($\psi^s = \psi_1^s + \psi_2^s$) として与えられる。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi_i^s = 0 \quad (i=1, 2) \quad (39)$$

ここに、 γ_i^2 は方程式

$$C_{33}C_{44}\gamma^4 + (C_{13}^2 + 2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33})\gamma^2 + C_{11}C_{44} = 0 \quad (40)$$

を γ^2 の2次式と見なした場合の2根である。この場合、根の種別は式(32)とちがって容易に判定できる。後の数値計算例で用いる複合材料の Graphite/epoxy では $\gamma^2 = 10.68, 0.30$ 、E glass/epoxy では $\gamma^2 = 15.91, 0.68$ といずれも2実根である。また自然界に存在する物質で、例えば Magnesium では $\gamma^2 = 10.97, 2.93$ のように2正根であり、Zinc は共役複素根 $\gamma^2 = 4.51 \pm i 8.18$ である。ここでは先の自由振動解析と同様に、2正根として議論を進めることにする。なお等方性の場合、 $\gamma^2 = 1$ と重根になるので、解形式を代える必要がある[7]。

式(39)の解は、境界条件、式(10)を満足するように

$$\psi_i = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{m,i}^s(z) \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = m\pi/l \quad (41)$$

とおき、式(39)へ代入して $\Phi_{m,i}^s(z)$ の具体式を求め、更にそれを式(38)へ代入すれば、次の変位式を得る。

$$\begin{aligned} u^s &= \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^s \cosh \gamma_1 z + B_m^s \sinh \gamma_1 z + C_m^s \cosh \gamma_2 z \\ &+ D_m^s \sinh \gamma_2 z) \cos \alpha_m x \end{aligned}$$

$$w^s = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mu_1^s (A_m^s \sinh \gamma_{1z} + B_m^s \cosh \gamma_{1z}) + \mu_2^s (C_m^s \sinh \gamma_{2z} + D_m^s \cosh \gamma_{2z}) \right] \sin \alpha_m x \quad (42)$$

ただし,

$$\mu_i^s = \frac{C_{44} \gamma_i^2 - C_{11} \alpha_m^2}{(C_{13} + C_{44}) \alpha_m^2 \gamma_i} \quad (i=1, 2) \quad (43)$$

これらを、応力式(13)に代入し、更にそれらを境界条件式(10)に代入すれば、積分定数 $A_m^s, B_m^s, C_m^s, D_m^s$ が決定し、したがって準静的解が確定する。

5. 数値計算結果

部分等分布荷重(強度 q_0)が、はりの上辺中央部に載荷幅 $c/l=0.2$ で、また時間に関してはステップ状に作用する場合 $[q(x, t)=q_0 H(t): H(t)$ はステップ関数]で、はり高比を $h/l=0.2$ として数値計算を行った。

横等方性を示すものとして自然界には Magnesium や Zinc があり、また横等方性を示す広範な複合材料とその材料定数は Tsai [8] の成書などに示されている。ここでは横等方性を示す複合材料の Graphite/epoxy および E glass/epoxy を採り上げる。これらの材料定数は、

Graphite/epoxy:

$$C_{11}=8.2, C_{13}=3.2, C_{33}=86.8, C_{44}=4.1 \text{ (GPa)}$$

E glass/epoxy:

$$C_{11}=15.1, C_{13}=6.1, C_{33}=46.8, C_{44}=4.7 \text{ (GPa)}$$

であり、比較用の等方性体は軟鋼 ($\nu=0.3$) である。

振動数方程式(37)は、はさみうち法により数値的に解き、固有値 $\Omega_{mn} [= \omega_{mn} h (\rho/C_{11})^{1/2}]$ を求め、その

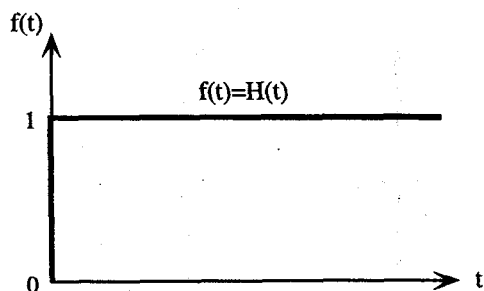


図-2 ステップ関数

固有値分布を図-3に示している。図中、実線は x 軸に関する対称モードに対応する固有値であり、点線は逆対称モードに対応する。

さて、以下の応答計算は全て無次元化して行い、時間に関しては、等方面 (xy -面) 内での縦波の速度 $c_L = (C_{11}/\rho)^{1/2}$ を基準にした無次元時間 $\tau = c_L t/h$ を用い、応答図は時間きざみを $\Delta \tau = 0.01$ として描いた。

応答計算での級数の収束状況は用いる材料、着目点、時刻によっても変化する。一例として、収束が極めて遅いはり高方向の応力 σ_z のはり中央点 ($x=l/2, z=0$) での収束状況を図-4に示している。材料は Graphite/epoxy である。この図から荷重のフーリエ展開に関係する級数項 m が収束に寄与していること、また $m \geq 100, n \geq 500$ 程度採用すれば、応答の不連続的な変化を十分に表現できることが分かる。それで応力 σ_z は $m=100, n=500$ として計算を行い、これに比べて収束の良い他の応力や変位についてはこれを参考に収束程度を確かめて応答計算を行った。

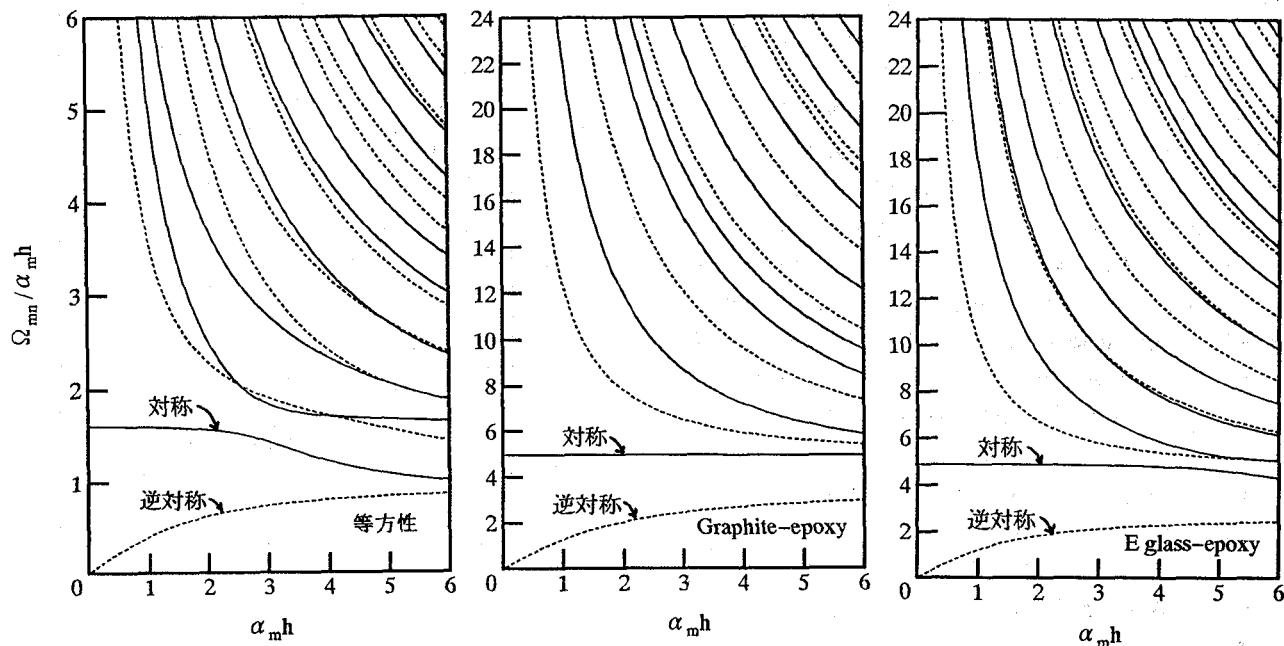


図-3 固有値分布

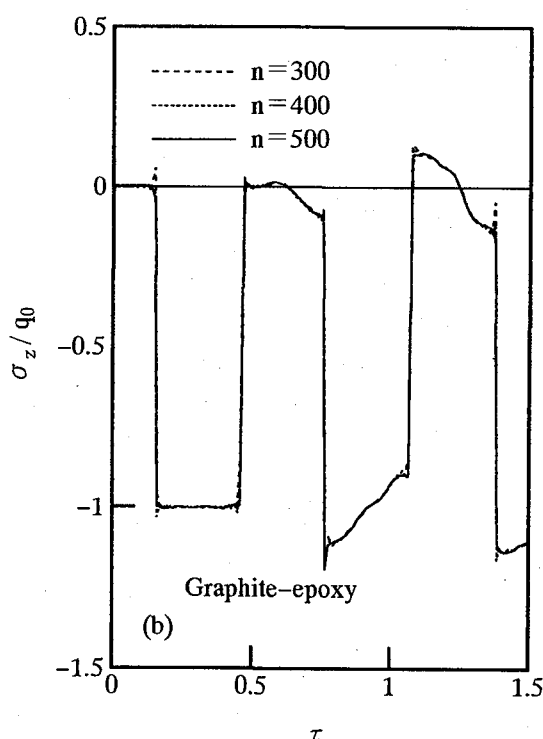
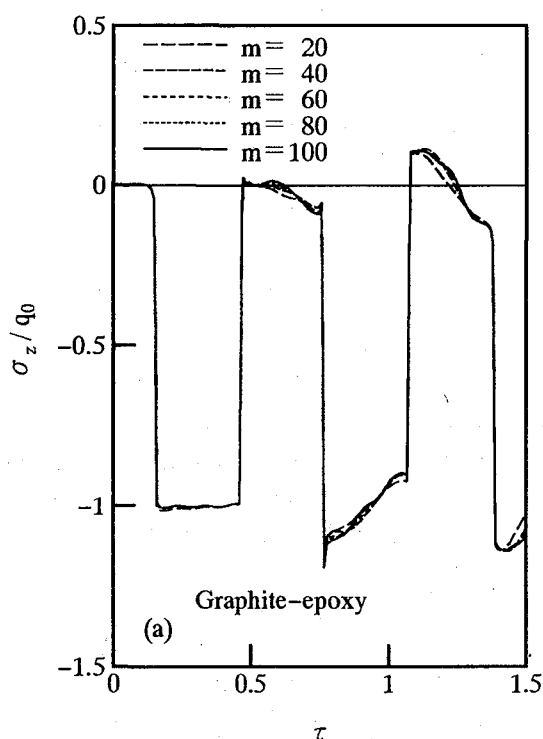


図-4 応力 σ_z ($x=l/2, z=0$) の収束状況 : (a) m 変化 ($n=1000$) ; (b) n 変化 ($m=100$)

図-5は、はり高方向の応力 σ_z のはり中央点 ($x=l/2, z=0$) での初期応答を示したものである。応答曲線が不連続的に変動している箇所や急激な変化を示している箇所は、荷重の荷重中央点 ($x=l/2, z=-h/2$), 荷重端部 [$x=(l \pm c)/2, z=-h/2$] で発生した応力波やそれに続くはりの上下辺からの反射波の波面が到達した応答を示している。等方性体の応力波(縦波, 横波)は速度面と波面が一致する球面波で、一般の内点を含め着目点での応答の種別や応答時刻は幾何学的波線理論によって容易に確定できる[7]。一方、異方性体の場合は、応力波の速度面と波面が一致しないので、任意の着目点での応答時刻などを特定することは等方性の場合に比べて困難である。ただし、いまの場合、異方軸 (z -軸) に沿って進行する縦波、横波速度は特定できて、それぞれ $(C_{33}/\rho)^{1/2}$, $(C_{44}/\rho)^{1/2}$ で与えられる[9]。したがって図中の不連続な応答や急変する応答の幾つかはこれらに対応していることが、応答時刻の検討により分かる。荷重中央点からの最初の応力波(縦波)の到達後に応答が始まり、その後下辺中央点 ($x=l/2, z=h/2$) からの反射縦波の到達により引張り応力がいずれの場合にも生じており、spalling 破壊に関連して興味深い。また作用荷重強度を越える圧縮応力も生じている。

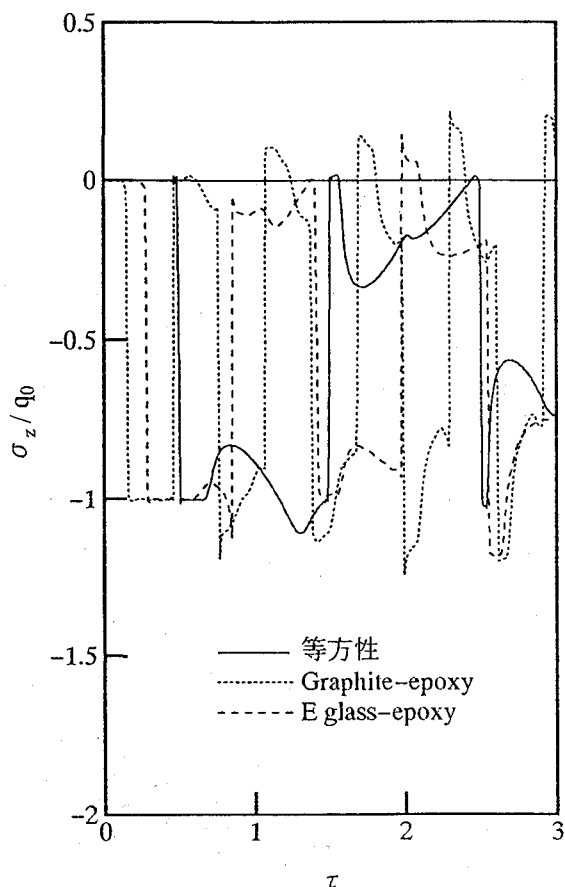


図-5 応力 σ_z ($x=l/2, z=0$) の初期応答

次に、はり上下辺の中央点 ($x=l/2, z=\pm h/2$) での応力 σ_x の初期 ($0 < \tau < 10$) および長期 ($0 < \tau < 120$) の応答曲線を図-6に示している。無次元基本周期は、軟鋼, Graphite/epoxy, E glass/epoxy に対して $T=63.8, 58.4, 59.3$ であり、軟鋼の場合が他に比べて

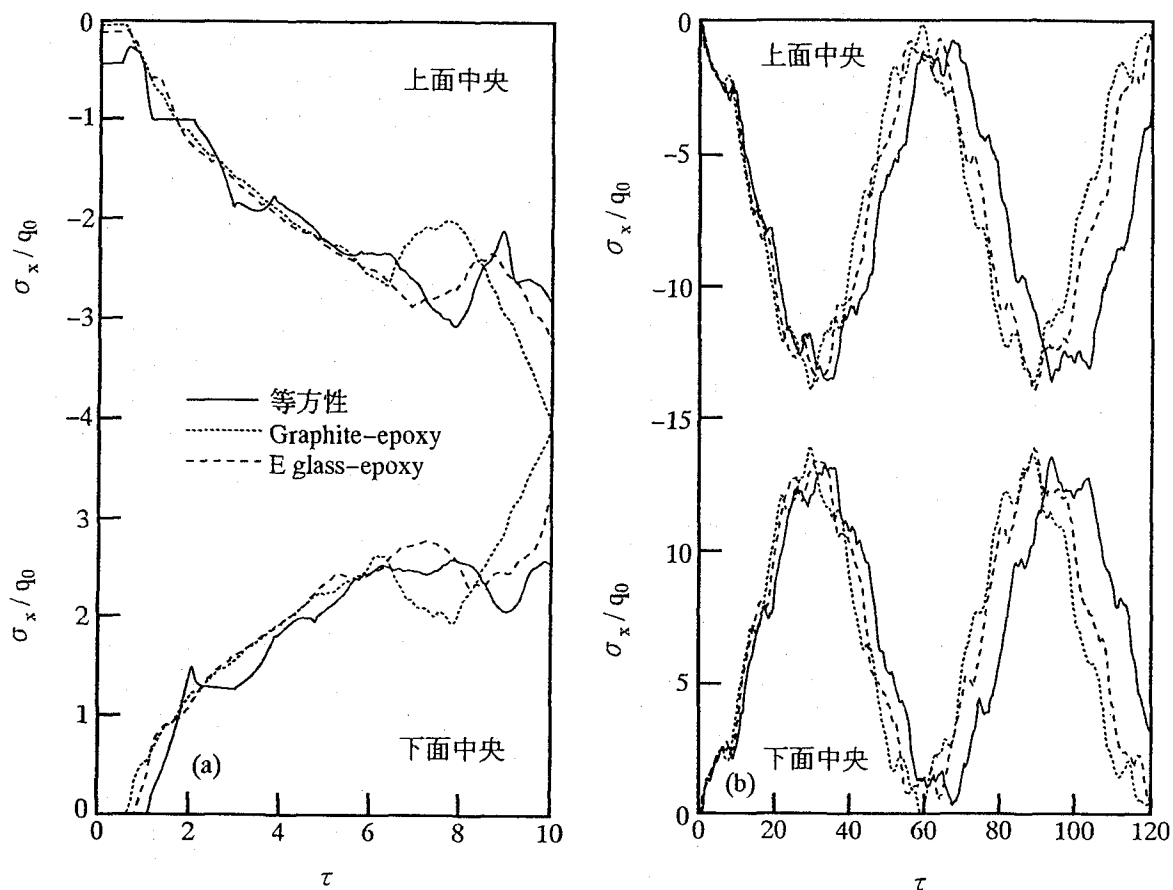


図-6 応力 σ_x ($x=l/2, z=h/2$) の (a)初期応答; (b)長期応答

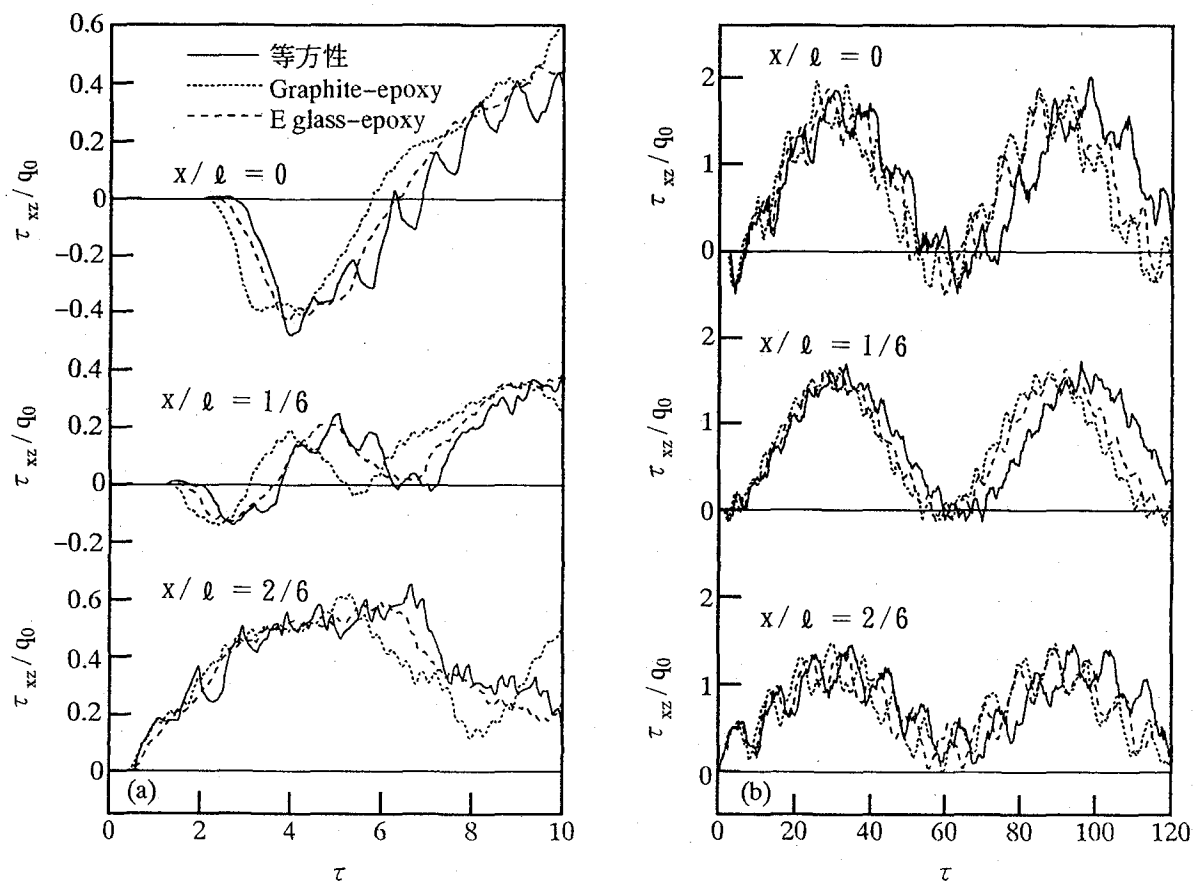


図-7 $z=0$ 断面上のせん断応力 τ_{xz} の (a)初期応答; (b)長期応答

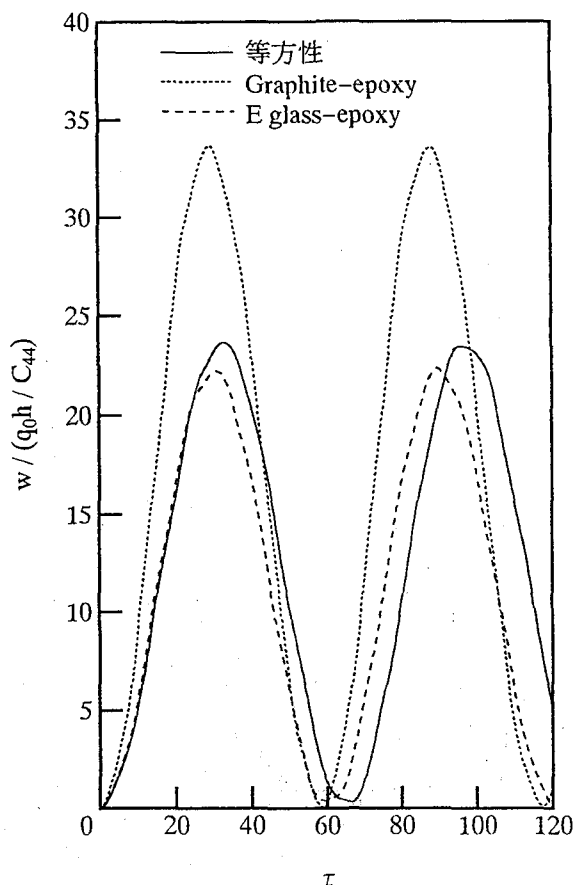


図-8 変位 w ($x = l/2, z = 0$) の長期応答

やや長い。まず、図-6aの初期応答を検討すると、はり上辺中央では、衝撃荷重が作用した瞬時に応答値を持っている。これは、作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応力 $\sigma_z = -q_0$ によるスパン (x) 方向のひずみが拘束されるために応力 σ_x が生じるからである。一方、下辺中央点では載荷中央点からの応力波の到達と共に応答が始る。興味深いことは等方性の場合、上辺中央では応答開始後すぐに表面波の影響が現れているが、epoxy材料ではこれがほとんど見られない。また下辺中央でも同様の現象が見られる。図-6bの長期応答を見ると、最大応答値はそれ程変わらないが、基本周期に応じて右へシフトした曲線となっている。静的解に対する応答倍率はいずれの場合もおおよそ2倍程度である。

図-7には、 $z=0$ 断面でのせん断応力 τ_{rz} の初期および長期応答曲線を示している。着目点は $x/l=0$ (支点)、 $1/6$ 、 $2/6$ の3点とした。各着目点ともに応答は応力波の到達と共に始まり、支点に近いほど応答開始後しばらくは圧縮応力となっているが、 $x/l=2/6$ では引張り応力が引き続いている。各ケースとも基本周期

による応答曲線の違いはあるが、各着目点での最大応答値はそれほど変わらない。

最後に、はり中央点での変位 w の長期応答曲線を図-8に示した。

6. おわりに

本研究は衝撃荷重を受ける横等方性平面はりの応答に及ぼす異方性の影響を検討するため、固有関数展開法により解析を行った。横等方性を示す複合材料 Graphite/epoxy, E glass/epoxy を対象に、時間に関してステップ状で空間には部分等分布荷重が作用した場合の数値計算結果を行い、等方性(軟鋼)との応答の違いを示した。

参考文献

1. Chang, C. and Sun, C. T.: Acoustic Emissions and Transient Elastic Waves in an Orthotropic Laminate Plate, Composites Science and Technology, Vol. 33, pp. 213-236, 1988.
2. Weaver, R. L., Sachse, W. and Kim, K.-Y.: Transient Elastic Waves in a Transversely Isotropic Plate, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 337-346, 1996.
3. たとえば、小林治俊、園田恵一郎、鹿島光洋：単純支持された鋼・コンクリート合成梁の弾性衝撃応答解析、構造工学論文集、土木学会、Vol. 38A, pp. 1489-1492, 1992.
4. 小林治俊、米田幸司、石丸和宏、園田恵一郎：異方性円板の弾性衝撃応答解析、構造工学論文集、土木学会、Vol. 42A, pp. 1287-1293, 1996.
5. Hu Hai-chang: On the Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic Body, Acta Scientia Sinica, Vol. 2, pp. 145-151, 1953.
6. Lekhnitskii, S. G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow, 1981.
7. 小林治俊、奥田東吾、園田恵一郎：衝撃を受ける単純支持はりの応力波伝播解析、構造工学論文集、土木学会、Vol. 38A, pp. 1505-1514, 1992.
8. Tsai, S. W.: Composites Design-1986, Think Composites, Ohio, 1986.
9. Hearmon, R. F. S.: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press, Chapter 6, 1961.

(1997年9月26日受付)