

塑性域の広がりを考慮した曲線格子桁の崩壊解析

COLLAPSE ANALYSIS OF HORIZONTALLY CURVED GRILLAGE GIRDERS
CONSIDERING SPREAD OF PLASTICITY

平沢秀之*, 林川俊郎**, 佐藤浩一***, 植木広行****

Hideyuki HIRASAWA, Toshiro HAYASHIKAWA, Koichi SATO and Hiroyuki UEKI

*工修 北海道大学助手 大学院工学研究科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
 **工博 北海道大学助教授 大学院工学研究科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
 ***工博 北海道大学教授 大学院工学研究科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
 ****北海道大学大学院工学研究科土木工学専攻修士課程 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

This presented study analyzes elasto-plastic behavior of horizontally curved grillage girders with thin-walled I-shaped cross sections. Stresses occurred in this thin-walled cross sections of curved grillage girder are very complicated because warping torsion as well as bending moment and pure torsion acts on the cross sections. For the analysis of overall structure of curved grillage girder, plastic hinge method which neglects effects of spread of plasticity was generally used and several yield criteria were given in the past studies. In this analysis, the plastic hinge method is modified and improved to take account of distribution of stress and spread of plasticity without finite element meshes. Moreover, interaction curves of elasto-plastic state are obtained newly for the I-shaped cross section girders. By some experimental results, it is confirmed that the spread of plasticity is valid in the presented analysis. From this analytical method, the plastic collapse behavior and spreading condition of plasticity are obtained by several numerical examples of curved grillage girders.

Key Words : curved grillage girder, spread of plasticity, elasto-plastic analysis

1. まえがき

複数本の主桁を横桁で結合した曲線格子桁橋は、箱形断面曲線橋と比較して製作、架設が容易となり、経済性も高いため、支間長が比較的短く且つ曲率半径が大きい場合には、よく採用される形式である。その構成要素として一般的に用いられる薄肉 I 形断面部材にはせん断力、曲げモーメントに加えてねじりモーメント、そりモーメントが同時に作用するため、その応力分布状態は極めて複雑となる。特に、箱形断面桁の場合にはしばしば無視されることの多いそり変形、及びそれに起因するそり応力については I 形断面桁では省略することができず、従って一つの部材としての強度、また曲線桁構造全体としての耐荷力を正確に把握することは容易ではない。

曲線桁の耐荷力に関する研究には、横桁間の一部材あるいは垂直補剛材間の1パネルに着目した横倒れ座屈、又は曲げ及びせん断座屈に関するもの、構造系全体を対象とした塑性崩壊挙動に関するもの、の2つに大きく分類することができる。前者に属するものとしては腹板の曲げ耐荷力を扱った Culver ら¹⁾²⁾、中井ら³⁾⁴⁾の研究、腹板を円筒パネルでモデル化し、許容幅厚比を提示した三上ら⁵⁾の研究、また曲線 I 桁の横倒れ座屈を扱った中井ら⁶⁾の研究、

更にフランジの局部座屈に関する Culver ら⁷⁾、藤井ら⁸⁾の研究等比較的多く見受けられる。しかし後者に属する研究論文は少なく、米沢ら⁹⁾による塑性ヒンジ法を用いた曲線格子桁の崩壊機構と崩壊荷重を求めた研究や、今井ら¹⁰⁾による断面極限状態における応力分布から I 形断面の降伏関数を誘導し、横構を有する曲線格子桁に適用した研究、林川¹¹⁾による曲線格子桁の塑性崩壊荷重の算定と種々の降伏関数の比較検討を行った研究等がある。

曲線格子桁の構造系全体を扱った研究は、上記の文献 9), 10), 11)に見られるように、多くの場合全塑性モーメントと塑性ヒンジの概念に基づく塑性ヒンジ法を基本としている。この方法は塑性ヒンジが材軸上の1点に集中して起こるという仮定に従っているため、解析方法としては簡便で扱いやすいが、一方塑性域が部材内に徐々に広がって行くことが考慮されず、塑性ヒンジが発生するまで部材の剛性が変化しないという欠点を有する。また塑性域の広がりを無視することにより、モーメントの再分配が行われないため、断面力と実際とは異なる結果となる可能性がある。一方部材内部の塑性域の広がりを考慮するために、断面分割法による弾塑性解析の適用¹²⁾やすべての構造部材を有限要素に分割し、詳細な FEM 解析を

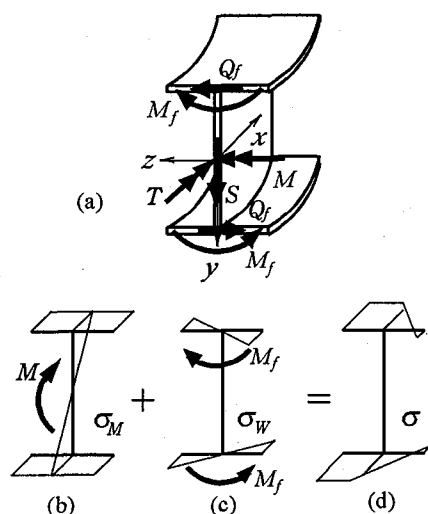


図-1 垂直応力 σ_M と σ_W

適用する等が考えられるが、主桁、横桁本数が増加すれば困難になるものと思われる。

そこで本研究では、曲線格子桁に関してこれらの解析法の中間的な方法として、塑性ヒンジ法の簡便さを維持しながら且つ塑性域の広がりをも考慮できる手法を提示し、弾塑性崩壊挙動を調べようとするものである。そのためにまず、断面が全塑性状態になる即ち塑性ヒンジが発生する以前の断面内の応力分布状態を種々仮定することから出発し、更に降伏関数の内側に弾塑性状態の領域を設け、応力分布と関連づけている。塑性域の広がりに伴う材料非線形の影響は、断面の剛性の低下として考慮し、構造全体の計算は、主桁、横桁にはそれぞれ曲線要素及び直線要素の剛性方程式を適用し、変位法により行っている。

2. 応力分布と塑性域の広がり

薄肉 I 形断面を有する曲線格子桁に鉛直荷重が作用すると、部材断面にはせん断力 S 、曲げモーメント M 、ねじりモーメント T 、そりモーメント W が生じる(図-1(a))。ねじりモーメント、そりモーメントに関しては次の関係式が成立する。

$$T = T_1 + T_2 \quad (1)$$

$$T_1 = GJ_T \frac{d\theta}{dx}, \quad T_2 = \frac{dW}{dx} \quad (2a,b)$$

$$W = hM_f, \quad Q_f = \frac{dM_f}{dx} \quad (3a,b)$$

ここで、 T_1 、 T_2 、 GJ_T 、 θ はそれぞれ純ねじりモーメント、2次ねじりモーメント、純ねじり剛性、ねじり角を表し、 h 、 M_f 、 Q_f はそれぞれ上下フランジ板厚の中心間隔、フランジ面内の曲げモーメント、せん断力である。図-1(b)は曲げモーメント M に起因して生じるフランジ、ウェブにおける垂直応力 σ_M の分布を表し、図-1(c)はフランジ面内曲げモーメント M_f に起因して生じるフランジにおけるそり応力 σ_W の分布を表している。

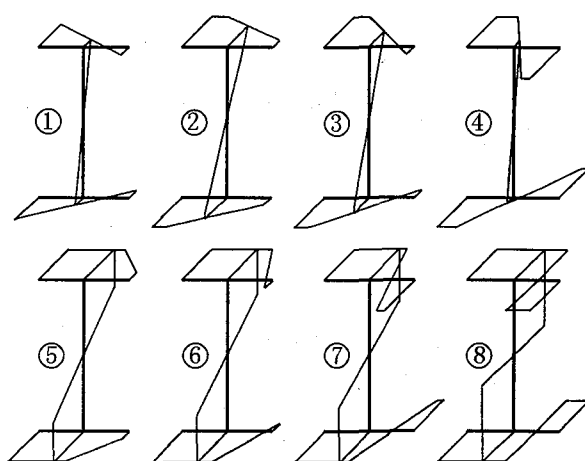


図-2 応力分布の分類

2.1 フランジの応力分布

図-1(d)のようにフランジには σ_M と σ_W が合成された垂直応力 σ が生じている。材料は降伏応力を σ_y とする完全弾塑性体と仮定すると、断面内において常に $|\sigma| \leq \sigma_y$ でなければならない。この σ は σ_M 、 σ_W の大小によりいろいろな分布を呈するが、モーメントの向きを図-1(a)の矢印の向きに固定し、更に $|\sigma| \leq \sigma_y$ の条件を考慮すると、結局応力分布は図-2の8通りに分類することができる。図-2①～⑧は以下になる。

- ①：弾性域
- ②：フランジの左右縁での σ の符号が等しく、且つ左縁が降伏している。
- ③：フランジの左右縁での σ の符号が異なり、且つ左縁が降伏している。
- ④：フランジの左右縁での σ の符号が異なり、且つ両縁が降伏している。
- ⑤：②でフランジ中央部においても降伏している。
- ⑥：③でフランジ中央部においても降伏している。
- ⑦：④でフランジ中央部においても降伏している。
- ⑧：全塑性状態。

これらの分類は以下に示す塑性域の広がりを出すパラメータを用いることにより明確に示すことができる。今、図-3(a)のようにある部材の塑性域が斜線のようなとし、この部材のある断面における応力分布が図-3(b)のようになっているとする。これは図-2⑦に対応している。図-3(b)中の δ 、 η はフランジ中央部から幅方向の長さに関する無次元パラメータで、それぞれ $\sigma = \sigma_y$ 、 $\sigma = 0$ となる位置を表している。この δ 、 η を用いると、図-2②～⑧は以下の条件を満たす領域に対応している。

$$\textcircled{2}: -\frac{1}{2} \leq \delta \leq 0, \quad \eta \geq \frac{1}{2} \quad (4a,b)$$

$$\textcircled{3}: -\frac{1}{2} \leq \delta \leq 0, \quad \frac{1}{4} + \frac{\delta}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2} \quad (5a,b)$$

$$\textcircled{4}: -\frac{1}{2} \leq \delta \leq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{4} + \frac{\delta}{2} \quad (6a,b)$$

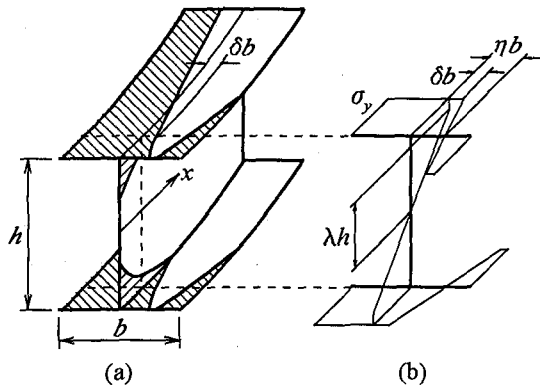


図-3 塑性域の広がりを表すパラメータ

$$\textcircled{5}: 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}, \quad \eta \geq \frac{1}{2} \quad (7a, b)$$

$$\textcircled{6}: 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} + \frac{\delta}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2} \quad (8a, b)$$

$$\textcircled{7}: 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}, \quad \delta \leq \eta \leq \frac{1}{4} + \frac{\delta}{2} \quad (9a, b)$$

$$\textcircled{8}: 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}, \quad \eta = \delta \quad (10a, b)$$

2.2 ウェブの応力分布

図-2においてウェブでは①～④のとき弾性，⑤～⑦のとき上下端から塑性域が広がっており，⑧では全断面塑性である。ウェブの場合中立軸に関して上下対称な応力分布となるため，図-3(b)のように一つの塑性域の広がりを表すパラメータ(=λ)を導入する。ここでλはフランジとウェブのひずみの適合性を考えると，δ及びηを用いて表すことが可能である。今，フランジに生じている曲げモーメント M_f によるフランジ面内変形における曲率を κ_f とおくと，フランジのひずみ分布は図-4(a)の点線のようにになる。図中の ε_f は降伏ひずみ， ε_y はフランジ中央部におけるひずみである。一方ウェブの面内変形における曲率を κ_w とおくと，ひずみ分布は図-4(b)の点線のようにになる。図中の ε_w はウェブ上下縁におけるひずみである。図-4のσとεは同じスケールで描かれている。図-4に示した記号を用いれば，ひずみに関して以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= \kappa_f \eta b, & \varepsilon_y &= \kappa_f (\eta - \delta) b, \\ \varepsilon_w &= \kappa_w \frac{1}{2} h, & \varepsilon_y &= \kappa_w \lambda h \end{aligned} \quad (11a-d)$$

ここでフランジ中央部におけるひずみとウェブ上下縁におけるひずみは等しくなければならないから，

$$\varepsilon_w = \varepsilon_f \quad (12)$$

が成り立つ。式(11)，(12)からλを求めると次式となる。

$$\lambda = \frac{\eta - \delta}{2\eta} \quad (13)$$

なおウェブ，フランジに生じるせん断応力分布については，付録Aに記述した。

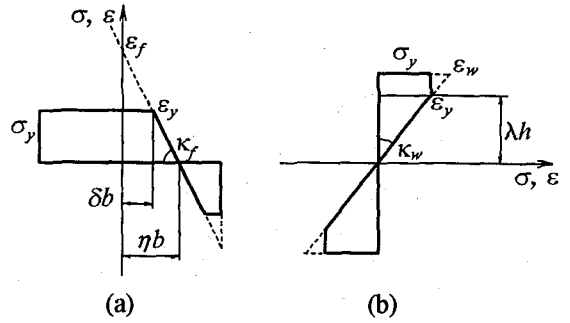


図-4 ひずみの適合性

3. 塑性域の広がり を考慮した解析と確認試験

3.1 相関曲線

曲線桁の塑性崩壊に関する初期の研究では，塑性ヒンジ発生 の判定に用いる降伏条件として，曲げモーメント M とねじりモーメント T から成る降伏関数が主として用いられてきた^{9),13),14)}。箱形断面を有する曲線桁においては断面力として M ， T が支配的であるため，これらの降伏関数は妥当であるが，I形断面を有する曲線桁の場合には，そりねじりの影響が無視できないため，崩壊荷重を正しく算定することができない。そりねじりの影響を考慮した降伏関数を扱った研究としては，Kollbrunnerら¹⁵⁾によって誘導された曲げモーメントとそりモーメントの2変数を用いた研究，林川¹⁶⁾による曲げモーメント，そりモーメント及び純ねじりモーメントの3変数を用いた研究，今井ら^{10),10)}による3変数を用いて更にそり拘束の解放も扱えるようにした研究がある。

本研究ではこれらの降伏関数から得られる相関曲線の内側に弾塑性状態の領域を新たに設けることにより，降伏関数のみによって塑性化の現象を表す塑性ヒンジ法の欠点を除去しようとするものである。しかしながら3つの変数を用いた相関曲線(相関曲面)の内部領域を扱おうとすると非常に困難となるため，ここでは2.で考慮した垂直応力 σ_M ， σ_w から得られる曲げモーメント M とそりモーメント W の2つの変数を使用することとする。純ねじりモーメントの影響は開断面の場合には小さいと考えられ¹⁷⁾，実際I形断面を有する曲線格子桁の実験結果¹¹⁾からも純ねじりモーメントによるせん断応力度の値は非常に小さいと言えるため，省略が可能であると思われる。

一般に相関曲線は断面力を全塑性モーメント等で除して無次元化した変数を用い，この変数を座標軸とする平面内又は空間内に曲線又は曲面として表したものである。その誘導を本研究では図-2の応力分布に対して行い，相関曲線を得る。今，全塑性曲げモーメント，全塑性そりモーメントをそれぞれ M_0 ， W_0 とし，

$$m = \frac{M}{M_0}, \quad w = \frac{W}{W_0} \quad (14a, b)$$

とおく。図-2⑧の全塑性状態のときの m ， w を断面内の応力で積分し，図-3で表されるパラメータηを用いて計算すると次式のようにになる。

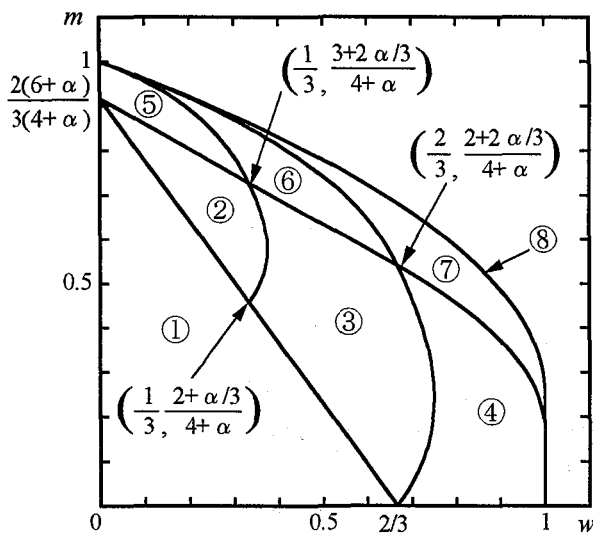


図-5 相関曲線

$$m = \frac{1}{M_0} \int_0^h \frac{1}{2} \sigma_M y dA = \frac{8\eta + \alpha}{4 + \alpha}$$

$$w = \frac{1}{W_0} \int_0^h \frac{1}{2} \sigma_W z dA_f = 1 - 4\eta^2 \quad (15a, b)$$

ここで、 A =断面積、 A_f =フランジの断面積、 α =ウェブの断面積とフランジの断面積の比である。式(15)から η を消去すると次式のようになる。

$$w = 1 - \frac{1}{16} \{ (4 + \alpha)m - \alpha \}^2 \quad \left(\frac{\alpha}{4 + \alpha} \leq m \leq 1 \right)$$

$$w = 1 \quad (0 \leq m \leq \frac{\alpha}{4 + \alpha}) \quad (16a, b)$$

ここで得られた式(16)は文献4)の式、また文献10)、16)で純ねじりモーメントを省略した式と一致する。図-2②、③の応力分布についても同様な方法で m 、 w を δ 、 η を含んだ式で求めると、

$$m = \frac{4}{4 + \alpha} \left[\left\{ 1 - \frac{(1/2 - \delta)^2}{2(\eta - \delta)} \right\} + \frac{\alpha\eta}{6(\eta - \delta)} \right]$$

$$w = \frac{2(1/2 - \delta)^2}{3(\eta - \delta)} (1 + \delta) \quad (17a, b)$$

となる。その他の応力分布についても結果のみ示すと以下のようになる。

$$\textcircled{4}: \quad m = \frac{4\eta}{4 + \alpha} \left\{ 2 + \frac{\alpha}{6(\eta - \delta)} \right\}$$

$$w = 1 - \frac{4}{3} \delta^2 + \frac{8}{3} \delta \eta - \frac{16}{3} \eta^2 \quad (18a, b)$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6}: \quad m = \frac{4}{4 + \alpha} \left[\left\{ 1 - \frac{(1/2 - \delta)^2}{2(\eta - \delta)} \right\} + \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{3} \right) \right]$$

$$w = \frac{2(1/2 - \delta)^2}{3(\eta - \delta)} (1 + \delta) \quad (19a, b)$$

$$\textcircled{7}: \quad m = \frac{4}{4 + \alpha} \left\{ 2\eta + \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{3} \right) \right\}$$

$$w = 1 - \frac{4}{3} \delta^2 + \frac{8}{3} \delta \eta - \frac{16}{3} \eta^2 \quad (20a, b)$$

式(17)~(20)は m 、 w に関する δ 、 η を媒介変数とする関数である。これらの式から m - w 相関曲線を描くと、図-5のようになる。図-5の①~⑧は図-2の①~⑧に対応している。①は全断面弾性の領域、②~⑦は弾塑性状態の領域を表している。領域と領域の境界は、式(17)~(20)において δ 、 η に関する条件を代入することにより得られる。例えば②と⑤、③と⑥、④と⑦の境界では、 $\delta = 0$ を満たしている。また、②と③、⑤と⑥の境界では、 $\eta = 1/2$ 、③と④、⑥と⑦の境界では、 $\eta = 1/4 + \delta/2$ なる条件を満たしている。

3.2 部材要素の剛性方程式

(1) 曲線要素

本研究では複数の主桁及び横桁の骨組部材から成る格子桁構造を扱うため、曲線要素と直線要素を併用した剛性マトリックス法により解析を行う。曲線要素に関しては渡辺¹⁸⁾によりそりねじりを考慮した薄肉断面部材に関する剛性マトリックスが誘導されている。ここでは塑性域の広がりを考慮するため若干の工夫を行っており、以下にその概要を示す。

図-6(a)のような2軸対称 I 形断面を有する曲線桁を考え、部材軸方向に剛性が変化しているものとする。 n 個に分割された1つの要素内⑥では剛性は一定であるとし、両端部 k 、 $k+1$ ではせん断力 S 、曲げモーメント M 、ねじりモーメント T 、そりモーメント W が作用しているとする(図-6(b))。この⑥の節点間に中間荷重が存在しない場合、せん断中心軸の変形で表した弾性方程式は次のようになる¹⁸⁾。

$$(EI + \frac{EC_W}{R_s^2}) \frac{d^4 v}{d\phi^4} - GJ_T \frac{d^2 v}{d\phi^2} - \frac{EC_W}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \theta}{d\phi^4} + (GJ_T + EI) \frac{d^2 R_s \theta}{d\phi^2} = 0$$

$$-\frac{EC_W}{R_s^2} \frac{d^4 v}{d\phi^4} + (GJ_T + EI) \frac{d^2 v}{d\phi^2} + \frac{EC_W}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \theta}{d\phi^4} - GJ_T \frac{d^2 R_s \theta}{d\phi^2} + EIR_s \theta = 0 \quad (21a, b)$$

ここで v 、 θ はそれぞれ垂直変位、ねじり角、 EI 、 GJ_T 、 EC_W はそれぞれ要素⑥の曲げ剛性、ねじり剛性、そりねじり剛性、 R_s は曲率半径である。式(21)はせん断中心と重心が一致している場合の微分方程式である。厳密には曲率の影響でこれらは一致しないが、そのずれは微小であり、実用的な精度ではずれによる影響は無視できる¹⁹⁾。この連立微分方程式から v を消去すると、式(22)のような同次方程式と式(23)が得られる。

$$\frac{d^6 \theta}{d\phi^6} + (2 - \mu^2) \frac{d^4 \theta}{d\phi^4} + (1 - 2\mu^2) \frac{d^2 \theta}{d\phi^2} - \mu^2 \theta = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d^2 v}{d\phi^2} = - \frac{R_s}{1 + \mu^2 + \mu^2 \gamma} \left\{ \frac{d^4 \theta}{d\phi^4} + (1 - \mu^2) \frac{d^2 \theta}{d\phi^2} + (1 + \mu^2 \gamma) \theta \right\} \quad (23)$$

ここで,

$$\mu^2 = \frac{GJ_T}{EC_W} R_s^2, \quad \gamma = \frac{EI}{GJ_T} \quad (24a,b)$$

である。

式(22), (23)から θ, v に関する一般解を求めると, 積分定数を $C_1 \sim C_8$ として次式のように表される。

$$\begin{aligned} \theta &= C_1 \sinh \mu \phi + C_2 \cosh \mu \phi + C_3 \cos \phi \\ &\quad + C_4 \phi \cos \phi + C_5 \sin \phi + C_6 \phi \sin \phi \\ v &= -R_s \left\{ \frac{C_1}{\mu^2} \sinh \mu \phi + \frac{C_2}{\mu^2} \cosh \mu \phi - C_3 \cos \phi - C_4 (\phi \cos \phi \right. \\ &\quad \left. - \zeta \sin \phi) - C_5 \sin \phi - C_6 (\phi \sin \phi + \zeta \cos \phi) \right\} + C_7 \phi + C_8 \end{aligned} \quad (25a,b)$$

ここで

$$\zeta = \frac{2\mu^2 \gamma}{1 + \mu^2 + \mu^2 \gamma} \quad (26)$$

である。式(25)の積分定数を図-6(b)の節点 k に関する境界条件を用いて表すと次式のようにになる。

$$\{C\} = [A] \{y_k\} \quad (27)$$

ここで,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{R\mu}{1+\mu^2} & \frac{R^2}{GJ_T} \frac{\mu}{(1+\mu^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{GJ_T} \frac{\mu^2}{\zeta(1+\mu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R^2}{GJ_T} \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \left(\frac{1}{1+\mu^2} + \frac{1}{\zeta} \right) & 0 & \frac{R^3}{GJ_T} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{R}{1+\mu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{GJ_T} \frac{\mu^3}{(1+\mu^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{EC_W} \frac{1}{1+\mu^2} & 0 \\ 1 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{EC_W} \frac{1}{1+\mu^2} & 0 \\ 0 & \frac{R}{EI} \frac{\zeta}{\zeta-2} \frac{1}{(1+\mu^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{GJ_T} \frac{\mu^2}{\zeta(1+\mu^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{EI} \frac{\zeta}{\zeta-2} \frac{1}{(1+\mu^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{GJ_T} \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \left(\frac{\mu^2}{1+\mu^2} - \frac{1}{\zeta} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R}{EI} \frac{1}{\zeta-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R^2}{EI} \frac{\zeta}{\zeta-2} \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R^3}{EC_W} \frac{1}{\mu^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{C\} = \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_7 \ C_8\}^T$$

$$\{y_k\} = \{v_k \ v'_k \ \theta_k \ \theta'_k \ S_k \ M_k \ T_k \ W_k\}^T \quad (28a,b,c)$$

であり, $v_k, v'_k, \theta_k, \theta'_k$ はそれぞれ節点 k におけるたわみ, たわみ角, ねじり角, ねじり率である。

式(25)に $\phi = \beta$ を代入して節点 $k+1$ における変位を求め, 更に断面力を算出して積分定数 $\{C\}$ との関係式を求めると次式のようにになる。

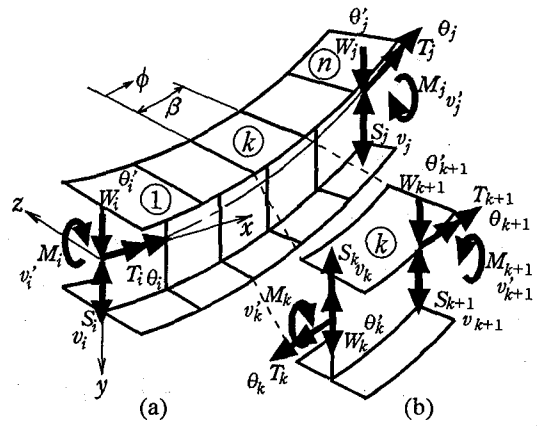


図-6 曲線部材要素

$$\{y_{k+1}\} = [B] \{C\} \quad (29)$$

ここで,

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{R}{\mu^2} sh & -\frac{R}{\mu^2} ch & R \cos \beta & R(\beta \cos \beta - \zeta \sin \beta) \\ -\frac{1}{\mu} ch & -\frac{1}{\mu} sh & -\sin \beta & \cos \beta - \beta \sin \beta - \zeta \cos \beta \\ \frac{sh}{\mu} & \frac{ch}{\mu} & \cos \beta & \beta \cos \beta \\ \frac{1}{R} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) ch & \frac{1}{R} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) sh & 0 & \frac{\zeta}{R} \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EI}{R} (\zeta - 2) \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R} \zeta \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \cos \beta \\ -\frac{EC_W}{R^2} (1 + \mu^2) sh & -\frac{EC_W}{R^2} (1 + \mu^2) ch & 0 & \frac{EC_W}{R^2} \zeta \sin \beta \\ R \sin \beta & R(\beta \sin \beta + \zeta \cos \beta) & \beta & 1 \\ \cos \beta & \sin \beta + \beta \cos \beta - \zeta \sin \beta & \frac{1}{R} & 0 \\ \sin \beta & \beta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta}{R} \sin \beta & -\frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R^3} & 0 \\ 0 & \frac{EI}{R} (\zeta - 2) \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GJ_T}{R} \zeta \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \sin \beta & -\frac{GJ_T}{R^2} & 0 \\ 0 & -\frac{EC_W}{R^2} \zeta \cos \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{y_{k+1}\} = \{v_{k+1} \ v'_{k+1} \ \theta_{k+1} \ \theta'_{k+1} \ S_{k+1} \ M_{k+1} \ T_{k+1} \ W_{k+1}\}^T \quad (30a,b)$$

である。また, $ch = \cosh \mu \beta, sh = \sinh \mu \beta$ とおいた。

式(29)に式(27)を代入すると次式となる。

$$\{y_{k+1}\} = [D_k] \{y_k\} \quad (31)$$

但し, $[D_k] = [B][A]$ である。式(31)は⑥に関する方程式であるが, ①~⑩についても成立するのでこれらを組み合わせると図-6(a)の左端 i と右端 j に関して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \{y_j\} &= [D_n][D_{n-1}] \cdots [D_2][D_1] \{y_i\} \\ &= [D] \{y_i\} \end{aligned} \quad (32)$$

次に $\{y_i\}, \{y_j\}$ の要素を節点力と節点変位に分離して並べ

替え, $\{X\}$, $\{u\}$ とおくと次式のように変形することができる。

$$\{X\}=[K]\{u\} \tag{33}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{S_i \ M_i \ T_i \ W_i \ S_j \ M_j \ T_j \ W_j\}^T \\ \{u\} &= \{v_i \ v'_i \ \theta_i \ \theta'_i \ v_j \ v'_j \ \theta_j \ \theta'_j\}^T \end{aligned} \tag{34a,b}$$

である。また $[K]$ は, $[D]$ を $\{X\}$, $\{u\}$ に対応させて並べ替え, 符号を図-6(a)の矢印の向きを正となるように修正したものである。

(2) 直線要素

節点間に中間荷重が存在しないときの直線要素に関する弾性方程式は, 曲げ及びねじり変形に対してそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 v}{dx^4} &= 0 \\ EC_w \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GJ_T \frac{d^2 \theta}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \tag{35a,b}$$

これ以降の定式化は曲線要素の場合と全く同様であるので, ここでは省略する。

3.3 確認試験

本解析法の妥当性特に塑性域の広がり が正しく再現できるかを確認するために, H形鋼による室内模型実験を行った。図-7に示すようなガーベル支持された直線桁の中央に鉛直荷重とねじり荷重を作用させ, 断面内に曲げモーメントとそりモーメントが一定の比率で同時に働く

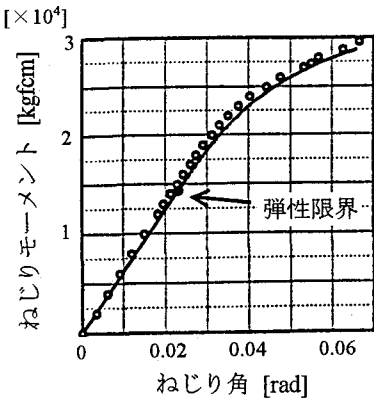


図-8 荷重変位曲線

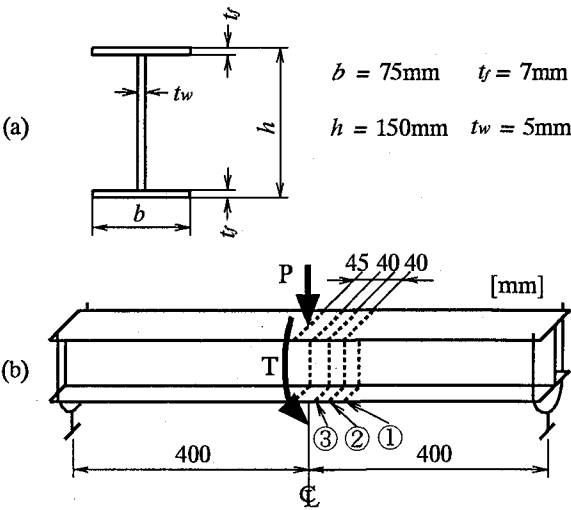


図-7 室内模型実験

ようにしている。また供試体の断面諸元は表-1の通りである。測定はスパン中央におけるねじり角及び図-7(b)に示す載荷点付近の3つの断面①, ②, ③での応力をそれぞれ変位計, ストレインゲージにより行った。実験に先立ち, テストピースによる材料試験を行い, 降伏応力 $\sigma_y = 3216[\text{kgf/cm}^2]$, ヤング率 $E = 2.01 \times 10^6[\text{kgf/cm}^2]$ を得た。

表-1 実験供試体の断面諸元

断面2次モーメント	I	$0.707803 \times 10^3 \text{ cm}^4$
純ねじり定数	J_T	$0.316601 \times 10^1 \text{ cm}^4$
そりねじり定数	C_w	$0.251619 \times 10^4 \text{ cm}^6$
全塑性曲げモーメント	M_0	$0.327445 \times 10^6 \text{ kgfcm}$
全塑性そりモーメント	W_0	$0.452702 \times 10^6 \text{ kgfcm}^2$

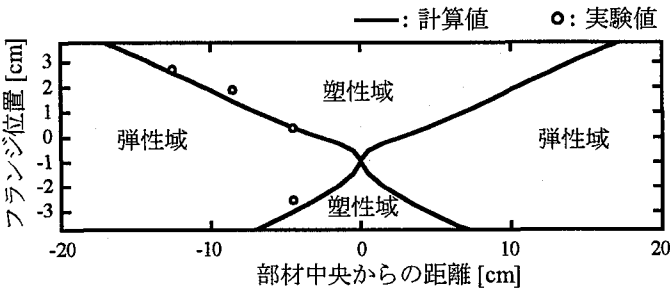


図-9 塑性域の広がり

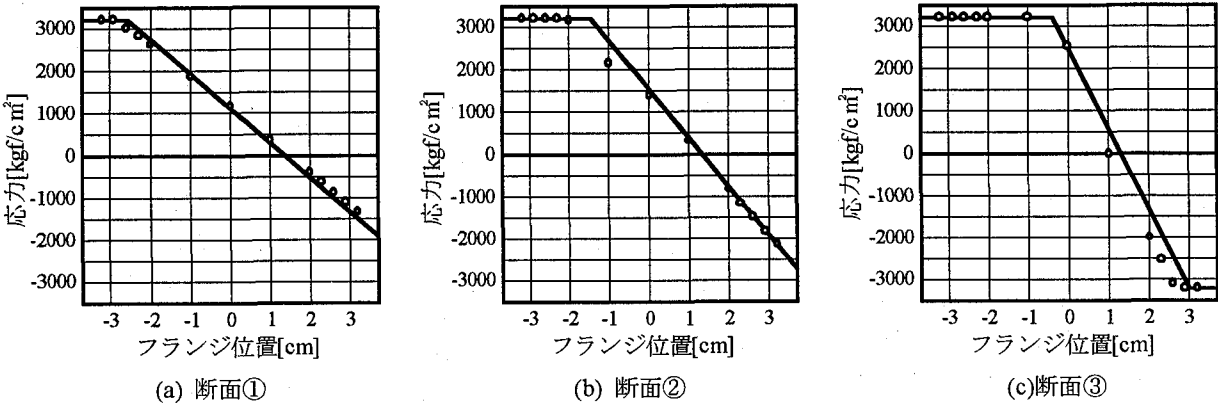


図-10 フランジに生じる垂直応力の分布

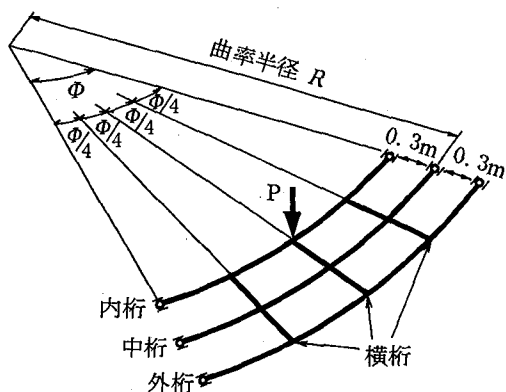


図-11 曲線格子桁モデル

図-8は荷重を0から徐々に増加させたときの、スパン中央におけるねじりモーメントとねじり角の関係を表したものである。丸印は実験値、実線は計算値を表し、両者は大体良い一致を示している。鉛直荷重と鉛直変位の関係についても同様に実験値と計算値はほぼ一致することを確認している。図-9は桁を支間方向に見た崩壊直前におけるフランジの塑性域を表したものである。図-10は供試体が塑性崩壊する直前の①、②、③の各断面(図-7参照)におけるフランジの応力分布を表したものである。応力は曲げ応力とそり応力が合成されたものとして実験値(丸印)と計算値(実線)の比較がなされている。これらより本解析方法が実験結果をよく再現できることが確認できた。

4. 曲線格子桁の数値計算例

数値計算に用いる曲線格子桁モデルは、図-11に示すように主桁3本、横桁3本から成る骨組構造とし、その形状寸法は表-2の通り、中心角と曲率半径の異なるTYPE A, Bの2種類とした。荷重は内桁中央点に1点集中載荷とし、支点における境界条件はたわみ及びねじり角を拘束とし、たわみ角及びそりを自由とした。主桁と横桁はH形鋼(100×50×5×7)を用い、表-3のような断面諸元となっている。以下に本解析法による塑性域の広がりを考慮した計算結果と塑性ヒンジ法による計算結果を示し、考察を加える。

4.1 荷重変位関係

図-12はTYPE Aの曲線格子桁の荷重変位関係を表したものである。変位は内桁、中桁、外桁のそれぞれの中央点における鉛直変位である。実線は本解析法による計算結果であり、●, ▲, △印は塑性ヒンジ法による結果で、塑性ヒンジが発生した時点でプロットしたものである。本解析法によると塑性域の広がりによる剛性低下の影響が現れ、同じ荷重に対して塑性ヒンジ法により得られる変位よりも大きい値が得られている。最終的な崩壊荷重は、塑性ヒンジ法では4.98[tf]、本解析法では4.80[tf]である。ここで崩壊とは剛性マトリックス[K]が不定となった

表-2 曲線格子桁の形状寸法

	TYPE A	TYPE B
中心角 ϕ	13.0°	7.0°
曲率半径 R	10.0m	18.5m

表-3 曲線格子桁の断面諸元

断面2次モーメント : I	$0.190539 \times 10^3 \text{ cm}^4$
純ねじり定数 : J_T	$0.145130 \times 10^1 \text{ cm}^4$
そりねじり定数 : C_w	$0.324141 \times 10^3 \text{ cm}^6$
全塑性曲げモーメント : M_0	$0.159690 \times 10^6 \text{ kgfcm}$
全塑性そりモーメント : W_0	$0.147960 \times 10^6 \text{ kgfcm}^2$

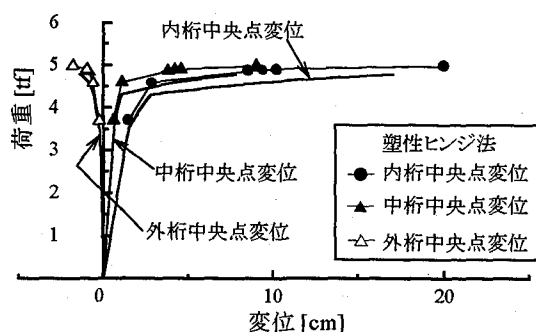


図-12 荷重変位関係 (TYPE A)

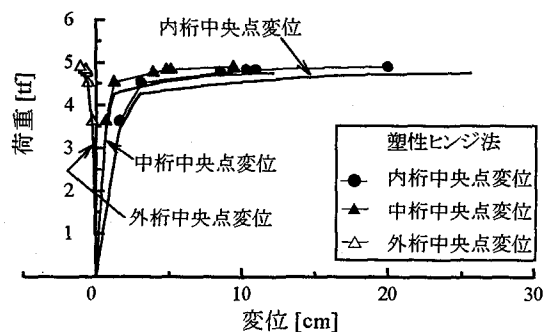
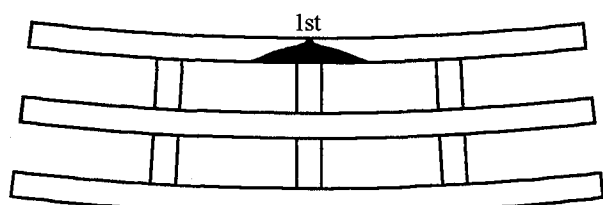


図-13 荷重変位関係 (TYPE B)

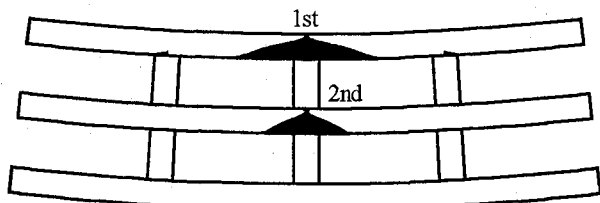
とき、あるいは変形が極端に大きくなったときとしている。図-13はTYPE Bの荷重変位関係である。TYPE Bの場合は塑性ヒンジ法、本解析法でそれぞれ 4.90[tf]、4.77[tf]で塑性崩壊した。

4.2 塑性域の広がり と 相関曲線

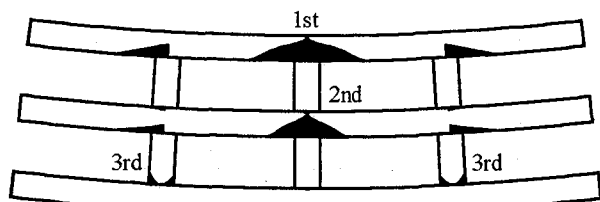
図-14はTYPE Aについて、断面が全塑性状態となる度毎のフランジの塑性域の進展状況を表したものである。初期段階では載荷点に続いて中桁中央で全塑性となり、その近傍でも塑性域が広がっている。3段階目では外桁と連結する横桁の2箇所と同時に全塑性となる。続いて中桁(4th)、横桁(5th)が全塑性となるが、このとき内桁の載荷点から離れた箇所においても塑性域の進展が見られ、外桁中央付近にも僅かに塑性域が現れている。最後に6番目の全塑性状態となる断面が現れ、曲線格子桁は崩壊する。図-15はTYPE Bの終局崩壊時における塑性域の広がり



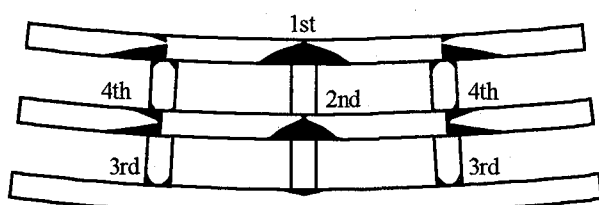
(a) 第1段階



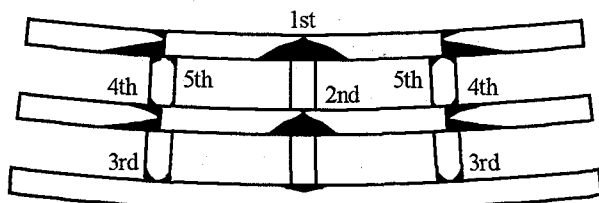
(b) 第2段階



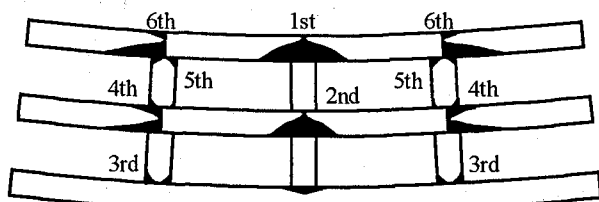
(c) 第3段階



(d) 第4段階



(e) 第5段階



(f) 第6段階

図-14 塑性域の進展状況 (TYPE A)

を表したものである。このモデルでは、最終的全断面塑性化(6th)はTYPE Aと異なり、外桁中央部に生じていることがわかる。

図-16, 17はそれぞれTYPE A, Bを塑性ヒンジ法によって解析し、塑性ヒンジ発生箇所と順序を表したものである。TYPE Aの図-14(f)と図-16を比較すると、3番目までの全塑性化は同じ位置で起こっているが、4番目以降は発生箇所が異なっている。これは図-14(f)では塑性域の広がりを考慮しているため曲げモーメントやそりモーメント等の各部材への伝達に変化し、その結果図-16の塑性ヒンジ発生箇所とは異なる状況となったと思われる。TYPE Bの図-15と図-17を比較すると、4番目の全塑性化が図-15では横桁で発生しているのに対し、図-17では内桁で発生している。しかし図-15の内桁に着目すると、図-17の4thの塑性ヒンジ発生箇所に相当するところではかなり塑性化が広がっており、ほとんど全塑性に近いことが分かる。

図-18, 19はそれぞれ図-14(f), 図-16の全塑性化する断面における (w, m) を相関曲線上にプロットしたものである。図-18の●印(1st)に着目すると、0からスタートした後、①と②の領域の境界線上に達して初期降伏となり、 w, m が増加しながら②, ⑤, ⑥の領域を経て、やがて⑧上に達して全塑性状態となることが分かる。ここで●が初期降伏した段階では、他の2nd~6thの断面箇所では①の領域内にあり、まだ弾性範囲内である。図-18の●, △印は図-14(f)よりそれぞれ内桁、中桁の中央点である

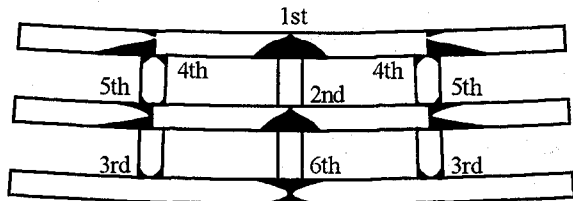


図-15 崩壊時の塑性域 (TYPE B)

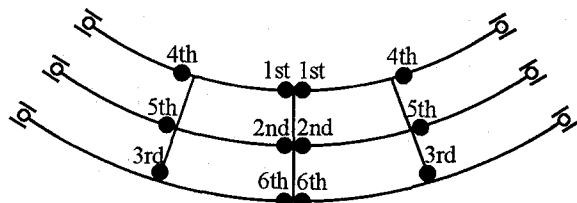


図-16 塑性ヒンジ法による塑性ヒンジ発生箇所 (TYPE A)

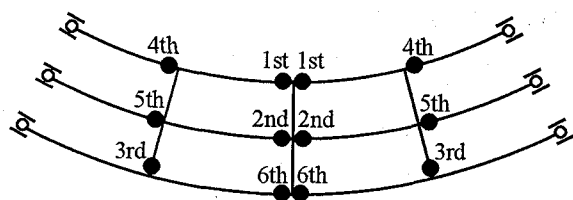


図-17 塑性ヒンジ法による塑性ヒンジ発生箇所 (TYPE B)

が、これらは曲げモーメントが大きな割合を占めることが分かる。▽印は曲げモーメント、そりモーメントの影響が共に大きく、□, ■, ▲印はそりモーメントが支配

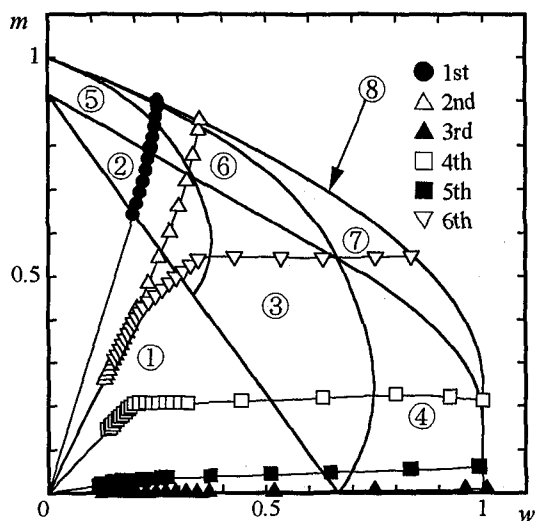


図-18 相関曲線 (TYPE A, 塑性域の広がり考慮)

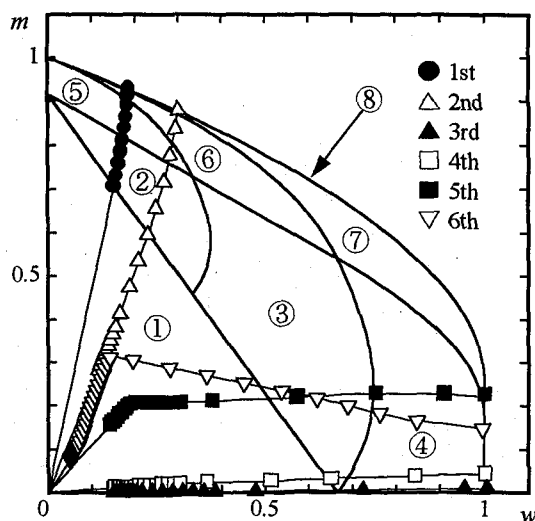


図-20 相関曲線 (TYPE B, 塑性域の広がり考慮)

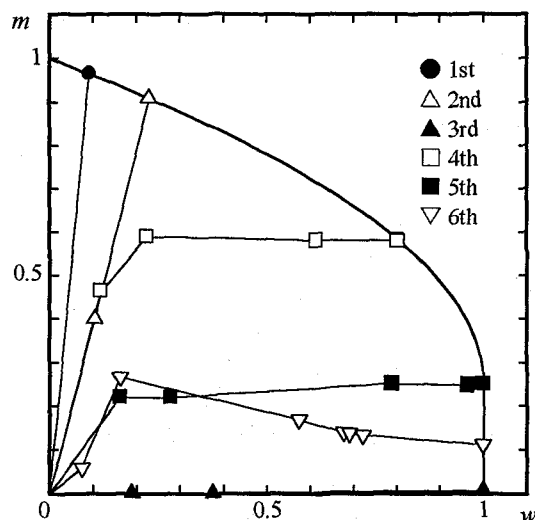


図-19 相関曲線 (TYPE A, 塑性ヒンジ法)

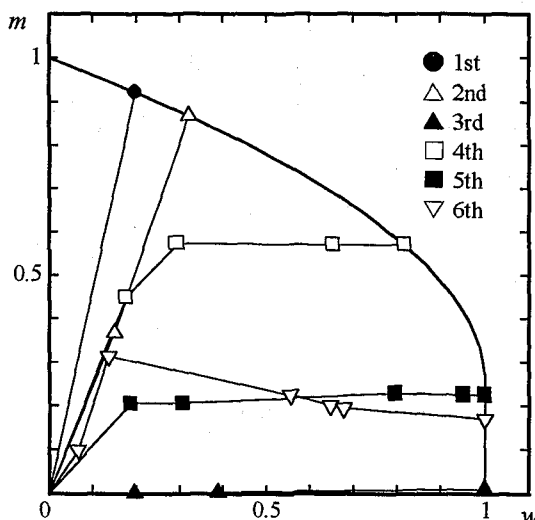


図-21 相関曲線 (TYPE B, 塑性ヒンジ法)

的であると言える。特に■, ▲印は横桁であるが、ほとんどそりモーメントのみで全塑性化していることが分かる。図-19は塑性ヒンジ法による計算結果であるため、内部領域は全て弾性域で、相関曲線上に達したときのみ全塑性となる。図-18と比較すると、同じ断面の位置に着目した場合(例えば図-18の▽は図-19の□に相当)、 w , m の割合は大体同じであると言える。

図-20, 21はTYPE Bのモデルに関する相関曲線上の w , m 関係である。この2つの結果に関しても傾向としてはTYPE Aとほぼ同じである。これら図-18~図-21より、横桁の塑性化はそりモーメントの影響が支配的であり、載荷点における主桁の塑性化は曲げモーメントの影響が支配的であることが分かる。また載荷点以外の主桁の塑性化は、曲げモーメントとそりモーメントが連成して生じていることが理解できる。

5. あとがき

本研究では曲げモーメントとそりモーメントの影響による塑性域の広がりを考慮した曲線格子の剛性方程式を誘

導し、I形断面を有する曲線格子桁の塑性崩壊解析を行った。塑性域の広がりはパラメータ δ , η , λ を導入することにより表すことができ、これらのパラメータと断面に生じる種々の応力分布を関連づけ、更に m と w の相関曲線を導いた。これらのパラメータは断面力と直接結びつけられているため、FEMに見られるような微小要素における応力レベルまで解析を進めることなく塑性域を求めることが可能である。

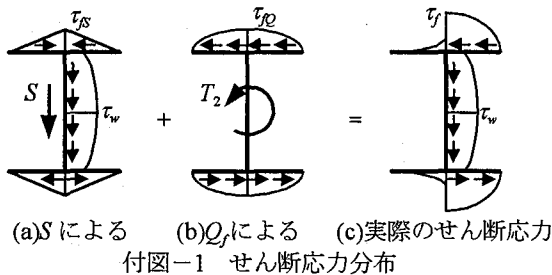
数値計算例としては、中心角と曲率半径の異なる2種類の曲線格子桁モデルを設定し、本解析法と塑性ヒンジ法による計算を行い、比較検討した。その結果、荷重変位関係では本解析法による方が変位は増大しており、断面の塑性化に伴う剛性の低下が見られ、また崩壊荷重は若干小さな値が得られた。塑性域の広がり方は、まず載荷点近傍から広がり始め、徐々に他の主桁、横桁へと進展し、終局状態までの全過程を追跡することができた。各部材の全塑性化について見ると、主桁は曲げモーメントが支配的であるか、あるいは曲げモーメントとそりモーメントが連成している傾向が見られた。また横桁はそり

モーメントが支配的であることが確認できた。

本解析法は、残留応力を考慮しない理想的な応力分布状態を仮定しており、また材料は完全弾塑性体を扱った。今後の課題としてはこのような点を改善することが考えられ、より精度の高い曲線格子桁の塑性崩壊解析を行うことが出来るものと思われる。

付録A：I形断面に生じるせん断力

せん断力は本文図-1(a)のように曲げ変形による S と、そり変形による Q_f が作用している。このため図-1, 2で示した垂直応力の他にせん断応力が分布している。これを図示すると付図-1の通りである。付図-1(a), (b)は S , T_2 が矢印の向きに働いたときのせん断応力分布を表しており、付図-1(c)は実際の応力分布を示している。



これらのせん断応力は次式により計算することができる。

$$\tau_s = \frac{Sbh}{4I}, \quad \tau_w = \frac{Sbh}{2I} \left\{ \frac{t_f}{t_w} + \frac{(h-t_f)^2}{4bh} \right\},$$

$$\tau_{T2} = \frac{hb^2}{16C_w} T_2, \quad \tau_f = \tau_s + \tau_{T2} \quad (A1-4)$$

ここで、 b, h, t_f, t_w はそれぞれフランジ幅、上下フランジ板厚の中心間隔、フランジ厚、ウェブ厚であり、 I, C_w はそれぞれ断面2次モーメント、そりねじり定数である。一例として表-2, TYPE Aのモデルの断面を用い、内桁スパン中央断面におけるせん断応力度を、上式を用いて計算すると、 $\tau_s = 61[\text{kgf/cm}^2]$, $\tau_w = 219[\text{kgf/cm}^2]$, $\tau_{T2} = 134[\text{kgf/cm}^2]$, $\tau_f = 195[\text{kgf/cm}^2]$ が得られる。

付録B：せん断応力の影響について

本研究では部材の降伏判定に垂直応力 σ のみを考慮し、せん断応力 τ は省略されているが、ここでは τ の影響について考察を加える。部材断面に σ と τ が同時に作用しているとき von Misesの定理を用いれば一軸応力 $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ ($=\sigma_c$) に換算することができる。付録Aにおける τ_f が生じている位置での垂直応力 σ を求めると、 $\sigma = 2505[\text{kgf/cm}^2]$ でありこれより $\sigma_c = \sqrt{2505^2 + 3 \cdot 195^2} = 2528[\text{kgf/cm}^2]$ を得る。よって σ と σ_c の差は僅かであり(0.9%), τ の影響は非常に小さいことが分かる。これは他の断面についても同様なことが言え、本文図-1(d)で示した曲げ応力とそり応力の合成応力が支配的であり、せん断応力が卓越して顕著な影響が見られることはないものと思われる。

参考文献

- 1) Culver, C.G., Dym, C.L. and Brogan, D.K. : Bending Behavior of Cylindrical Web Panels, Proc. of ASCE, ST10, Vol. 98, pp.2291-2308, 1972.
- 2) Culver, C.G., Dym, C.L. and Uddin, T. : Web Slenderness Requirements for Curved Girders, Proc. of ASCE, ST3, Vol. 99, pp.417-430, 1973.
- 3) 中井 博, 北田俊行, 大南亮一, 川井 正 : 曲げを受ける曲線桁橋腹板の解析と設計に関する一研究, 土木学会論文集, No.368/I-5, pp.235-244, 1986.
- 4) 中井 博, 北田俊行, 大南亮一 : 曲線桁橋腹板の曲げ強度に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.340, pp.19-28, 1983.
- 5) 三上市蔵, 古西和夫, 米沢 博 : 曲げを受ける円筒腹板パネルの非線形挙動, 土木学会論文集, No.299, pp.23-34, 1980.
- 6) Nakai, H. and Kotoguchi, H. : A Study on Lateral Buckling Strength and Design Aid for Horizontally Curved I-Girder Bridges, Proc. of JSCE, No.339, pp.195-205, 1983.
- 7) Culver, C.G. and Nasir, G. : Inelastic Flange Buckling of Curved Plate Girders, Proc. of ASCE, ST4, Vol. 97, pp.1239-1256, 1971.
- 8) 藤井 堅, 大村 裕 : 曲線 I 形桁におけるフランジの局部座屈と幅厚比制限, 土木学会論文集, No.386/I-8, pp.339-346, 1987.
- 9) 米沢 博, 三上市蔵 : 曲線格子桁の極限解析について, 土木学会論文集, No.132, pp.18-26, 1966.
- 10) 今井富士夫, 太田俊昭, 大塚久哲 : 横構を有する並列曲線 I 桁橋の崩壊挙動に関する研究, 構造工学論文集, Vol. 32A, pp. 411-419, 1986.
- 11) 林川俊郎 : 曲線格子桁の塑性崩壊荷重の計算法と実験, 構造工学論文集, Vol. 39A, pp. 1121-1134, 1993.
- 12) 長谷部薫, 薄木征三 : 曲線格子桁の弾塑性解析と実験, 土木学会第41回年次学術講演会講演概要集第1部, pp.97-98, 1986.
- 13) Badawy, H. E. I. and Jordaan, I. J. : Plastic Analysis of Curved Beams under Point Loads, Proc. of ASCE, ST7, Vol. 103, pp.1429-1445, 1977.
- 14) Yoo, C. H. and Heins, C. P. : Plastic Collapse of Horizontally Curved Bridge Girders, Proc. of ASCE, ST4, Vol. 98, pp.899-914, 1972.
- 15) Kollbrunner, C. F. and Hajdin, N. : Dünnwändige Stäbe, Band 2, Springer-Verlag, 1975.
- 16) 今井富士夫, 太田俊昭 : 曲線 I 形部材の降伏関数に関する考察, 土木学会論文集, No.380/I-7, pp. 349-354, 1987.
- 17) Daddazio, R. P., Bieniek, M. P. and DiMaggio, F. L. : Yield Surface for Thin Bars with Warping Restraint, Proc. of ASCE, EM, Vol.109, No.2, pp.450-465, 1983.
- 18) 渡辺 昇, 稼農知徳, 藤井裕司 : 曲げねじれ剛性をもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析, 土木学会論文集, No.218, pp.1-8, 1973.
- 19) 薄木征三 : フーリエ級数による連続曲線桁の解析, 土木学会北海道支部研究発表会論文集, 第24号, pp.65-73, 1968.

(1997年9月26日受付)