

曲がりかつねじれた薄肉積層板の振動解析

FREE VIBRATION ANALYSIS FOR THIN LAMINATED COMPOSITE CURVED AND TWISTED PLATES

築地恒夫*, 胡 夏夏**, 山下 務***

Tsuneo TSUIJI, Xiaxia HU, Tsutomu YAMASHITA

*工博 長崎大学教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

**工修 長崎大学大学院生 海洋生産科学研究科 (〒852 長崎市文教町1-14)

***長崎大学技官 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

A numerical method for analysing free vibrations of thin laminated composite curved and twisted plates is presented in this paper. The variational principle of free vibration for plates is formulated and an analytical method based on Rayleigh-Ritz proceduer is proposed using algebraic polynomials as assumed displacement functions. The covergence of frequency parameter is studed and variations of material stiffness in the direction of plate length are shown. Effects of fiber orientation, sequence of laminate and twisted angle on the frequency parameters and modes of vibration are investigated.

Key Words: free vibration, thin curved and twisted plate, laminated composite, Rayleigh-Ritz method

1. まえがき

複合材積層板は比強度が高く、疲労強度に優れ、成形性が高いことから多くの構造部材として使用されている。一方、送風機など軸流回転機翼の中には、翼軸方向にねじれしかも曲がっている複雑な構造をしているものがある。このような翼の振動解析は一般に有限要素法によって行われているが、高速回転をする翼の設計にはより高精度な解析結果が必要である。そこで高精度振動解析法開発の第一歩として、翼を曲がりかつねじれた薄肉の積層板にモデル化し、振動解析の基礎となる仮想仕事の原理を提案するとともに、Rayleigh-Ritz法による解析結果を示す。

提案した解析法は薄肉殻理論に基づいて導いた曲がりかつねじれた板の正確な変位・ひずみ関係を使用した仮想仕事の原理を用いているため¹⁾、適切な変位関数を仮定することによって高精度の解が得られることが期待で

きるとともに、曲率、ねじれ率の大きな積層板にも適用できる利点がある。

先ず、先に提案した曲がりかつねじれた薄肉板の自由振動に関する仮想仕事の原理¹⁾を積層材に拡張し、積層理論に基づいたRayleigh-Ritz法^{3), 4)}による積層板の振動解析法を提案する。次に、曲板の振動数パラメータ及び振動モードに及ぼす複合材繊維の配向角、積層順序の影響を明らかにする。

2. 解析法

図-1 に曲がりかつねじれた積層薄板を示す。断面図心を通り板長さ方向に x 軸、断面内板幅方向に y 軸、厚さ方向に z 軸を定める。板幅を b 、 x 軸上の長さを l 、厚さを t とし、 x 軸は曲率半径 R で曲がり、板は x 軸まわりにねじれ率 k でねじれているものとする。したがって、長さ l の円弧中心角は $\bar{R} = l/R$ 、

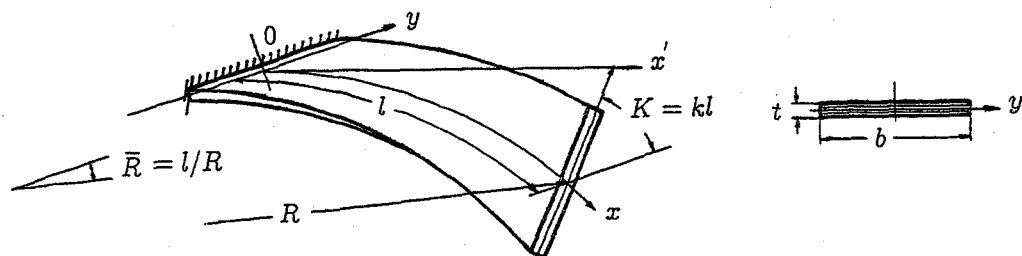


図-1 曲がりかつねじれた薄肉積層板

板先端のねじれ角は $K = kl$ である。また、ラミナを積層する際の基準軸として点 O において x 軸の接線方向に x' 軸を設ける。

複合材ラミナの応力・ひずみ関係は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 Q_{ij} ($i, j=1, 2, 6$) は変換縮約剛性係数²⁾で、付録Aにラミナの積層方法及び繊維の配向角を示す。曲がりかつねじれた薄板のひずみ・変位関係は次のようである¹⁾。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = ZGU \frac{1}{1 - pz/l} \quad \dots\dots(2)$$

ここで、

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & z/l & z^2/l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z/l & z^2/l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z/l & z^2/l^2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(3)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{K\bar{R}_s f Y}{g} & 0 & 0 & \frac{r}{g} \\ -p & \frac{K}{\sqrt{g}} & -2\frac{K^3\bar{R}_s^2 f Y^3}{g^2\sqrt{g}} - Kq & -\frac{K}{g\sqrt{g}} & 0 & -2\frac{K^2\bar{R}_s f Y}{g^2\sqrt{g}} \\ 0 & -\frac{Kp}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & -\frac{K^2}{g^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{K}{\sqrt{g}} & 0 & \frac{K}{g\sqrt{g}} & -p & 0 \\ -\frac{K^2}{g^2} & \frac{Kp}{\sqrt{g}} & -\frac{K^3\bar{R}_s f Y}{g^3} & 0 & 0 & \frac{K^2 r}{g^3} \\ 0 & \sqrt{g} & 0 & \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{g} p & -4\frac{K^2\bar{R}_s f Y}{g^2} & 0 & 0 & 4\frac{Kr}{g^2} \\ -\frac{Kp}{g} & \sqrt{g} p^2 & -2\frac{K^2\bar{R}_s^2 f Y}{g^2\sqrt{g}} + \frac{K^2 q}{g} & 0 & \frac{Kp}{g} & -2\left(\frac{Kpr}{g^2} + \frac{K^3\bar{R}_s f Y}{g^3\sqrt{g}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ -\frac{1}{g} & 0 & 0 & \frac{K\bar{R}_s f Y}{g^2} & -\frac{r}{g} & -\frac{K^2}{g^2} \\ 0 & 0 & -\frac{K}{g\sqrt{g}} & \frac{Kr}{g^2\sqrt{g}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K^2}{g^2} \\ 0 & p & -\frac{K}{g\sqrt{g}} & \frac{Kr}{g^2\sqrt{g}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\frac{K}{g} \\ 0 & 0 & -2\frac{1}{\sqrt{g}} & 2\frac{r}{g\sqrt{g}} & 0 & 0 \\ -\frac{K}{g^2} & -\frac{K}{g} & \frac{p}{\sqrt{g}} & -\frac{pr}{g\sqrt{g}} - \frac{K^2\bar{R}_s f Y}{g^3} & -\frac{Kr}{g^2} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4)$$

$$U^T = \left(\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} U \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} V \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} W \right) \quad \dots\dots(5)$$

ただし、上式で u, v は板中央面内基本ベクトル方向の変位、 w は中央面に垂直方向変位、また、次のような無次元量が用いられている。

$$X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{l}, U = \frac{u}{l}, V = \frac{v}{l}, W = \frac{w}{l}, K = kl, \bar{R} = \frac{l}{R}, \bar{R}_s = \bar{R} \sin KX, \bar{R}_c = \bar{R} \cos KX, \\ f = 1 + \bar{R}_c Y, g = f^2 + K^2 Y^2, p = \frac{\bar{R}_s}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{K^2 Y^2}{g} \right), q = \frac{\bar{R}_c}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{K^2 Y^2}{g} \right), r = K^2 Y + \bar{R}_c f \quad \dots\dots(6)$$

曲がりかつねじれた薄板の自由振動に関する仮想仕事の原理は次式で与えられる¹⁾。

$$\iiint_{\Omega} \delta (\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{xy}) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \sqrt{g} (1 - pz/l) dx dy dz \\ - \iiint_{\Omega} \rho \omega^2 (gu \delta u + v \delta v + w \delta w) \sqrt{g} (1 - pz/l) dx dy dz = 0 \quad \dots\dots(7)$$

ただし、 γ は材料の密度、 ω は角振動数である。

式(7)に式(1)、(2)を代入し z で積分すると次式が得られる。

$$\iint_A \delta U^T G^T D G U \sqrt{g} dx dy - \iint_A \rho \omega^2 t (gu \delta u + v \delta v + w \delta w) \sqrt{g} dx dy = 0 \quad \dots\dots(8)$$

ただし、マトリックス D については付録B参照のこと。

式(8)に $l^2/E_1 t^3$ (E_1 は繊維1方向のヤング率) を乗じて以下のように無次元化する。

$$\iint_A \delta U^T G^T \bar{D} G U \sqrt{g} dX dY - \lambda^2 \iint_A (gU \delta U + V \delta V + W \delta W) \sqrt{g} dX dY = 0 \quad \dots\dots(9)$$

ここに、 $\bar{D} = D l^2/E_1 t^3$, また、 λ は振動数パラメータで次のように定義する。

$$\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2 l^4}{E_1 t^2} \quad \dots\dots(10)$$

振動解析には式(9)が用いられ、有限要素法による振動解析も可能であるが、本報告では積層薄板の振動解析に適用して有効性が確認されている^{3), 4)} Rayleigh-Ritz法を用いることとする。

まず、変位 U, V, W を $X=0$ 辺での固定条件、 $U=0, V=0, W=0, \partial W/\partial X=0$, を満たす X, Y のべき級数で次式のように仮定する。

$$U = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \alpha_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \alpha_{ij} u_{ij}, \\ V = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=0}^{N_q} b_{pq} X^p Y^q = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=0}^{N_q} b_{pq} v_{pq}, \\ W = \sum_{r=2}^{N_r} \sum_{s=0}^{N_s} c_{rs} X^r Y^s = \sum_{r=2}^{N_r} \sum_{s=0}^{N_s} c_{rs} w_{rs} \quad \dots\dots(11)$$

ここに、 $\alpha_{ij}, b_{pq}, c_{rs}$ は未知係数である。

仮定変位を式(9)に代入し、Gauss-Legendreの数値積分法(12点)によって板全体の積分を行うと、未知係数に関する次の同次連立方程式が導かれる。

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda^2 B_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} - \lambda^2 B_{22} & A_{23} \\ \text{Sym.} & & A_{33} - \lambda^2 B_{33} \end{pmatrix} \mathbf{a} = 0 \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{a}$ は未知係数からなるベクトルである。なお、マトリックス A_{ij}, B_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) の要素計算式は付録Cに示す。

式(11)から曲がりかつねじれた薄肉積層板の振動数パラメータ λ 及び振動ベクトル $\mathbf{a}$ が固有値問題の解として求められ、振動モードが計算される。なお、振動数パラメータの計算には Householder-QR法を用いる。

3. 解析結果

本報告で対象とする積層板は、幅と長さの比 $b/l = 0.5$, 幅と厚さの比 $b/t = 20$, 長さ l の中心角 $\alpha = 60^\circ$, 板先端の初期ねじれ角 $K=0^\circ \sim 60^\circ$, E ガラス/エポキシ ($E_1=60.7$ GPa, $E_2=24.8$ GPa, $G_{12}=12.0$ GPa, $\nu_{12}=0.23$) の各層等厚対称三層 ($\theta/-\theta/\theta$), ($-\theta/\theta/-\theta$) (θ は繊維配向角) である。

3.1 曲げ剛性

本報告で取り扱う積層板は付録Aで示すように板の長さ方向(x 軸方向)に各剛性の大きさが変化する。曲げ剛性 ($\bar{D}_{ij} = D_{ij}/E_1$ ($i, j=1, 2, 6$)) の変化を $\bar{R}=60^\circ$, $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ($\theta/-\theta/\theta$) の積層板について示したのが図-2である。各剛性とも繊維の配向角の大きさによって様々に変化するが、特に剛性 $\bar{D}_{11}, \bar{D}_{22}$ が大きく変化することがわかる。また、カ

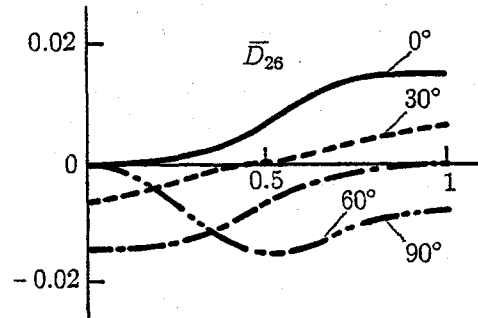
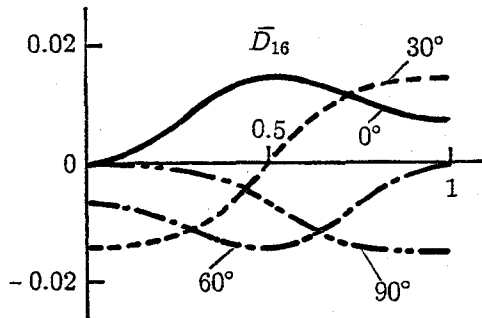
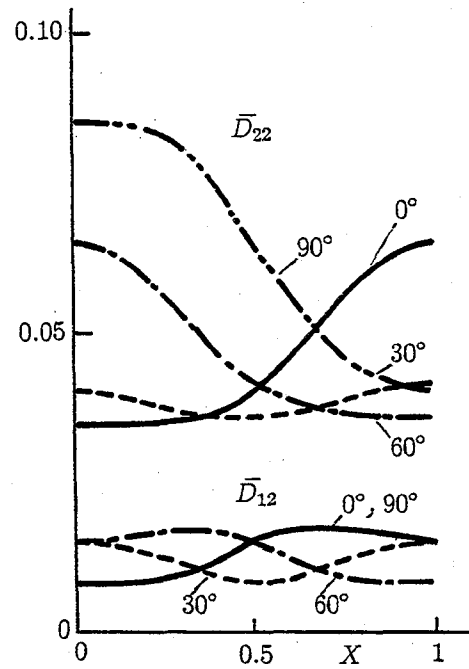
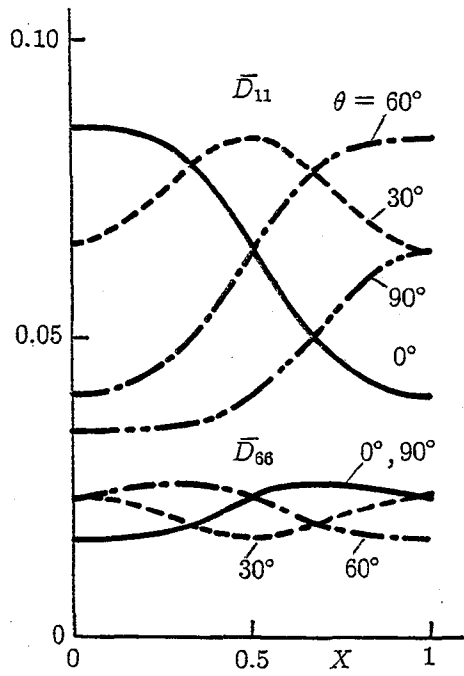


図-2 板長さ方向の曲げ剛性の変化 ($\bar{R}=60^\circ$, $(\theta/-\theta/\theta)$)

カップリング曲げ剛性 $\bar{D}_{16}$, $\bar{D}_{26}$ が無視できない大きさであることもわかる。

3.2 振動数パラメータの収束状況

$\bar{R}=60^\circ$, $K=60^\circ$, $(60^\circ/-60^\circ/60^\circ)$ の積層板に対して、仮定変位の項数を増加し振動パラメータ λ の収束状況を調べた。結果を表-1に示す。表中の数字 $n-n-n$ は変位 U, V, W の近似項数を示す。なお、具体的な項の取り方については付録D参照のこと。

U, V, W とともに55項で近似すれば10次まで収束した λ が得られる。したがって、以後の解析には全て55項近似の変位関数を用いることにする。

3.3 既存の解析結果との比較

著者らの調べた範囲では、曲がりかつねじれた積層板の振動解析について発表された論文は見当たらない。ただ、Qatuら³⁾が偏平殻理論に基づいた Rayleigh-Ritz法によって、初期ねじれのみを有し $b/l=1$, $b/t=20$ の積層板 $(\theta/-\theta/\theta)$ の振動解析を行っている。

そこで、 $\theta=45^\circ$ 積層板の振動数パラメータをQatuらの結果と本解析法によって得られた値とを比較して表-2に示す。

表-1 λ の収束状況

($\bar{R}=60^\circ$, $K=60^\circ$, $(60^\circ/-60^\circ/60^\circ)$)

No.	36-36-36	45-45-45	55-55-55
1	0.9446	0.9438	0.9433
2	3.850	3.848	3.848
3	5.740	5.736	5.734
4	11.74	11.73	11.73
5	13.87	13.85	13.84
6	22.48	22.39	22.37
7	25.06	24.84	24.79
8	28.07	27.96	27.93
9	30.41	30.26	30.20
10	33.91	33.77	33.72

初期ねじれのない積層板 ($K=0^\circ$) の λ は両解析結果はよく一致しているが、初期ねじれ角が大きくなるに従って両者の差が拡大している。これはQatuらの解析が偏平殻理論に基づいているため、初期ねじれ角が大き

表-2 既存の解との比較 ($b/l=1, b/t=20, \bar{R}=0^\circ, (45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$)

$K(^{\circ})$	0		15		30		45	
No.	Qatu ²⁾	Present	Qatu ²⁾	Present	Qatu ²⁾	Present	Qatu ²⁾	Present
1	0.7618	0.7621	0.7564	0.7631	0.7260	0.7567	0.6557	0.7417
2	2.0955	2.0957	2.5495	2.5036	3.6985	3.3470	3.8204	3.6365
3	4.7195	4.7198	4.6257	4.5711	4.3555	4.1917	5.5699	4.2833
4	6.0353	6.0358	6.1345	6.1019	6.4141	6.2289	7.0344	6.3532
5	7.5965	7.5964	7.8521	7.7678	8.8137	8.2820	10.635	8.9274
6	10.452	10.460	10.768	10.659	11.570	11.014	12.274	11.100
7	12.359	12.360	12.658	12.571	13.333	12.832	14.340	12.740
8	13.628	13.623	13.681	13.548	14.152	13.659	15.242	14.178
9	14.645	14.641	14.738	14.645	15.153	14.680	16.881	14.893
10	16.953	16.943	17.095	16.935	17.606	16.907	18.822	16.867

なるにつれて誤差が大きくなるためと考えられる。

3.4 曲がりかつねじれた薄肉積層板の振動数パラメータ及び振動モード

$\bar{R}=60^\circ$, $(\theta/-\theta/\theta)$ の積層板について, 板先端の初期ねじれ角 $K=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, 繊維配向角 $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ の場合の振動数パラメータ入を表-3に示す。

曲がりかつねじれた積層板の振動は, 3.1節に示し

たように剛性が x 軸方向に変化し, またカップリング剛性 $\bar{A}_{16}, \bar{A}_{26}, \bar{D}_{16}, \bar{D}_{26}$ が零とならず, さらに曲率及びねじれ率の存在によって, 変位 U, V, W が連成して生じる非常に複雑な連成振動となる。したがって, 振動数パラメータも繊維配向角によって複雑に変化するが $\lambda-\theta$ 曲線は一般に交わらない。例外として, 初期ねじれの無い板 ($K=0^\circ$) では面内振動と面外振動が

表-3 曲がりかつねじれた薄肉積層板の振動数パラメータ
($b/l=0.5, b/t=20, \bar{R}=60^\circ, (\theta/-\theta/\theta)$)

$K(^{\circ})$	$\theta(^{\circ})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.9937	3.421	6.244	10.86	15.35	15.63	20.92	22.95	26.57	32.61
	15	1.051	3.328	6.424	11.28	15.57	15.80	20.30	23.28	26.69	32.44
	30	1.000	3.407	5.969	11.93	14.93	15.17	19.32	24.88	26.39	30.39
	45	0.8808	3.588	5.232	12.57	13.54	13.76	18.99	25.04	26.22	28.78
	60	0.7761	3.618	4.658	12.10	12.91	12.56	19.31	22.85	25.32	30.26
	75	0.7175	3.391	4.413	11.05	12.76	11.87	20.09	21.16	24.37	31.48
	90	0.6914	3.144	4.342	10.33	12.44	11.60	19.62	21.67	23.94	31.67
30	0	1.012	4.103	6.116	11.70	13.89	21.37	22.17	24.03	27.76	33.79
	15	1.057	4.216	6.119	12.00	14.43	21.35	22.10	24.25	27.84	33.49
	30	1.008	4.308	5.714	12.22	14.19	20.32	21.72	25.46	27.36	31.39
	45	0.8955	4.290	5.092	12.01	13.34	18.58	21.54	25.46	26.44	30.00
	60	0.7886	4.046	4.633	11.33	12.50	17.21	21.65	23.28	25.63	30.96
	75	0.7231	3.675	4.417	10.66	11.67	16.41	21.15	22.53	24.74	31.87
	90	0.6962	3.424	4.324	10.19	11.08	16.03	19.99	22.98	24.81	32.08
60	0	1.029	3.892	6.469	11.78	14.87	23.39	25.67	27.51	31.54	36.36
	15	1.065	4.191	6.182	12.65	14.70	24.32	25.84	27.69	31.20	36.59
	30	1.014	4.252	5.848	13.23	13.94	24.16	26.37	27.56	30.30	34.43
	45	0.9061	3.971	5.534	12.53	13.50	22.66	26.16	26.83	29.10	32.48
	60	0.7985	3.557	5.248	11.29	13.16	20.87	24.30	26.69	27.80	32.47
	75	0.7302	3.209	5.047	10.28	12.61	19.60	22.43	26.47	27.19	32.80
	90	0.7021	2.999	4.981	9.605	12.18	18.95	21.16	25.97	27.96	32.97

表-4 曲がりかつねじれた薄肉積層板振動数パラメータ
 $(b/l=0.5, b/t=20, \bar{R}=60^\circ, (-\theta/\theta/-\theta))$

$K(^{\circ})$	$\theta(^{\circ})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.9937	3.421	6.244	10.86	15.35	15.63	20.92	22.95	26.57	32.61
	15	0.8933	3.520	5.644	10.64	14.49	15.37	20.49	24.44	25.76	32.19
	30	0.8041	3.486	5.028	10.45	13.42	14.60	19.98	24.43	26.11	31.88
	45	0.7399	3.328	4.598	10.22	12.58	13.33	19.49	23.17	26.92	31.36
	60	0.7029	3.146	4.391	9.999	12.20	12.33	19.10	22.42	26.37	30.81
	75	0.6888	3.058	4.334	9.973	11.78	12.22	19.07	22.15	24.94	30.87
	90	0.6914	3.144	4.342	10.33	11.60	12.44	19.62	21.67	23.94	31.67
30	0	1.012	4.103	6.116	11.70	13.89	21.37	22.17	24.03	27.76	33.79
	15	0.9155	3.982	5.854	11.34	13.31	20.83	21.32	25.66	27.09	33.28
	30	0.8190	3.807	5.454	10.88	12.69	19.46	20.65	25.72	27.44	32.69
	45	0.7479	3.612	4.973	10.43	11.94	17.83	19.98	24.31	28.31	30.00
	60	0.7078	3.448	4.582	10.09	11.31	16.68	19.50	23.36	27.83	31.88
	75	0.6930	3.362	4.371	9.989	10.99	16.13	19.42	23.02	26.33	31.24
	90	0.6962	3.424	4.324	10.19	11.08	16.03	19.99	22.98	24.81	31.26
60	0	1.029	3.892	6.469	11.78	14.87	23.39	25.67	27.51	31.54	36.36
	15	0.9358	3.570	6.629	10.94	14.87	22.10	25.21	28.78	31.49	35.16
	30	0.8351	3.298	6.489	10.25	14.54	20.87	24.18	29.79	30.97	33.95
	45	0.7580	3.093	6.032	9.721	13.75	19.56	22.72	28.21	31.36	32.79
	60	0.7145	2.965	5.520	9.399	12.86	19.18	21.48	26.80	30.91	32.06
	75	0.6987	2.928	5.146	9.330	12.26	18.87	20.88	26.10	29.50	32.05
	90	0.7021	2.999	4.981	9.605	12.18	18.95	21.16	25.97	27.96	32.97

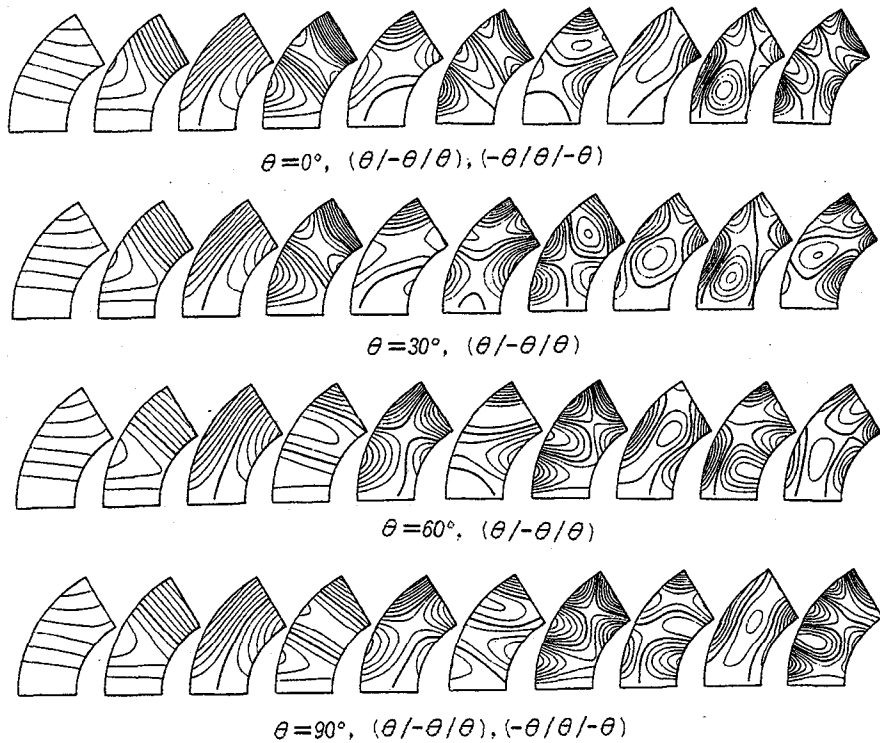


図-3a 曲がりかつねじれた薄肉積層板振動モード
 $(b/l=0.5, b/t=20, K=60^\circ, \bar{R}=60^\circ, (\theta/-\theta/\theta))$

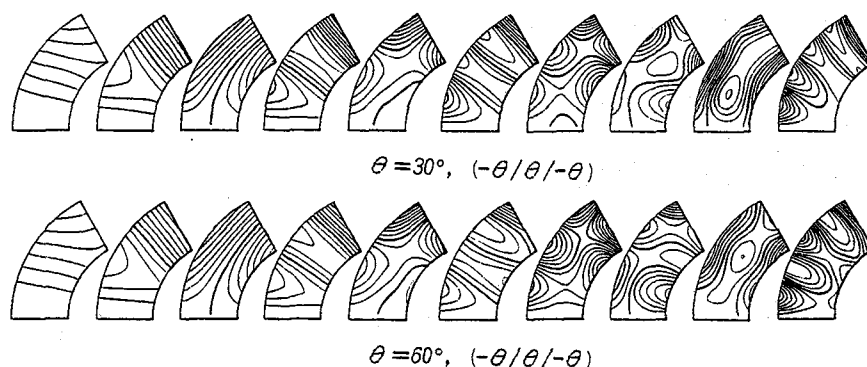


図-3b 曲がりかつねじれた薄肉積層板振動モード
($b/l=0.5, b/t=20, K=60^\circ, \bar{R}=60^\circ, (-\theta/\theta/-\theta)$)

互いに独立して生じるため（本報告で採用して積層ではカップリング剛性 $\bar{B}_{ij}=0$ ($i, j=1, 2, 6$) である），5次の面外振動と6次の面内振動の $\lambda-\theta$ 曲線は交差する。

図-2から $\bar{R}=60^\circ$ の板では $\theta=30^\circ$ の場合，曲げ剛性 $\bar{D}_{11}$ は x 軸方向の変化が少なくしかも比較的大きな値であることがわかる。このことから，板の長さ方向曲げ振動（1，2，4，6次振動，図-3の振動モード参照）では $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ 間に入の最大値が存在する。

表-4は積層の順序を $(-\theta/\theta/-\theta)$ とした積層板の振動数パラメータである。 $\theta=0^\circ, 90^\circ$ の場合は積層順序を変えても剛性は変わらないので λ は表-3と同じである。しかし，その他の配向角の板では積層に順序を変えることによって振動数パラメータ λ が大きく変化する振動があることがわかる。

図-3a, bは $\bar{R}=60^\circ, K=60^\circ$ の積層板の振動モードで，配向角 θ 及び積層順序が振動モードに及ぼす影響を示した図である。同図中太線はノードライン ($W=0$)，細線は変位 W の等高線を表す。6次振動までは振動モードへの配向角及び積層順序の影響は小さい。高次振動になると $\lambda-\theta$ 曲線は交わらないが振動モードの順序入れ替わる場合がある。例えば， $(\theta/-\theta/\theta)$ の板の $\theta=60^\circ$ の8次と $\theta=90^\circ$ の9次がその例である。

4. おわりに

本研究で得られた結果は次のようである。

- (1) 曲がりかつねじれた薄肉積層板の自由振動に関する仮想仕事の原理を定式化して示した。
- (2) 座標変数のべき級数で仮定した変位関数を用い，Rayleigh-Ritz法による振動解析法を提案した。
- (3) 本研究で取り扱った積層方法では，各剛性は板長さ方向に変化し，またカップリング曲げ剛性も比較的大きな値を持つ。
- (4) $\bar{R}=60^\circ$ の板に対して初期ねじれ角，繊維配向角及び積層順序の違いによる振動数パラメータの変化を示した。板長さ方向の曲げ振動では $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ に振動数

パラメータの最大値がある。また，振動数パラメータへは積層順序によって大きく変化する。

(5) $\bar{R}=60^\circ, K=60^\circ$ の板の振動モードは，6次振動まで繊維配向角，積層順序の影響は少ない。

参考文献

- 1) 築地恒夫，高木啓太，末岡禎佑：曲がりかつねじれた薄板の自由振動（基礎理論），日本機械学会論文集（C編），60-580，pp. 4079-4084，1994。
- 2) 日本複合材料学会編：複合材料ハンドブック，1989。
- 3) Qatu, S.M. and Leissa, W.A.: Vibration Studies for Laminated Composite Twisted Cantilever Plates, Int. J. Mech. Sci., Vol. 33, pp. 927-940, 1991。
- 4) 築地恒夫，修行稔，山下務：ねじれた片持ち複合積層薄板の自由振動解析，日本機械学会論文集（C編），62-602，pp. 3901-3907，1996。

付録

A. 図-4に示すように x' 軸を基準軸として積層する。したがって，繊維配向角 θ は繊維1方向から反時計回りに x' 軸までの角度である。しかし，式(1)の関係は x 軸の接線方向（近似的）を表しているの，実際の

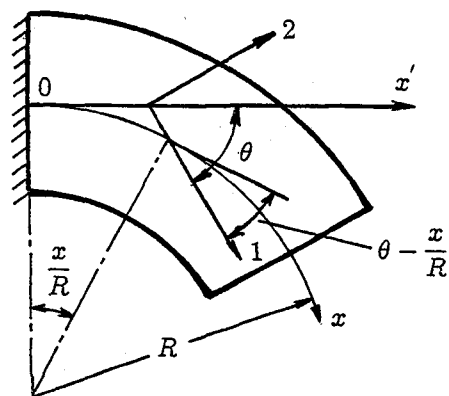


図-4 繊維配向角

繊維配向角は $\theta = x/R$ となる。この配向角を用い変換 縮約剛性係数 $\bar{Q}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 6$) を計算する²⁾。

B. 式(8)のマトリックスD は次のようである。

$$D = \int_{-t/2}^{t/2} Z^T Q Z \frac{1}{1 - p z/l} dz = \int_{-t/2}^{t/2} Z^T Q Z \left(1 + p \frac{z}{l}\right) dz$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{p B_{11}}{l} & \frac{B_{11}}{l} + \frac{p D_{11}}{l^2} & \frac{D_{11}}{l^2} & A_{12} + \frac{p B_{12}}{l} & \frac{B_{12}}{l} + \frac{p D_{12}}{l^2} & \frac{D_{12}}{l^2} & A_{16} + \frac{p B_{16}}{l} & \frac{B_{16}}{l} + \frac{p D_{16}}{l^2} & \frac{D_{16}}{l^2} \\ & \frac{D_{11}}{l^2} & 0 & \frac{B_{12}}{l} + \frac{p D_{12}}{l^2} & \frac{D_{12}}{l^2} & 0 & \frac{B_{16}}{l} + \frac{p D_{16}}{l^2} & \frac{D_{16}}{l^2} & 0 \\ & 0 & \frac{D_{12}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{D_{16}}{l^2} & 0 & 0 \\ & & & A_{22} + \frac{p B_{22}}{l} & \frac{B_{22}}{l} + \frac{p D_{22}}{l^2} & \frac{D_{22}}{l^2} & A_{26} + \frac{p B_{26}}{l} & \frac{B_{26}}{l} + \frac{p D_{26}}{l^2} & \frac{D_{26}}{l^2} \\ & & & & \frac{D_{22}}{l^2} & 0 & \frac{B_{26}}{l} + \frac{p D_{26}}{l^2} & \frac{D_{26}}{l^2} & 0 \\ & & & & & 0 & \frac{D_{26}}{l^2} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & A_{66} + \frac{p B_{66}}{l} & \frac{B_{66}}{l} + \frac{p D_{66}}{l^2} & \frac{D_{66}}{l^2} \\ & & & & & & & \frac{D_{66}}{l^2} & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

.....(14)

ただし、薄板を対象にしているので z の三次以上の項は無視した。また、 A_{ij} は N 層積層板の面内剛性、 B_{ij} はカップリング剛性、 D_{ij} は曲げ剛性²⁾である。

C. K_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) マトリックス及び変位成分からなるベクトル u_{ij} , v_{pq} , w_{rs} をそれぞれ次のように定義する。

$$G^T \bar{D} G = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{Sym.} & & K_{33} \end{pmatrix},$$

$$u_{ij}^T = \left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial X} \quad \frac{\partial u_{ij}}{\partial Y} \quad u_{ij} \right),$$

$$v_{pq}^T = \left(\frac{\partial v_{pq}}{\partial X} \quad \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} \quad v_{pq} \right),$$

$$w_{rs}^T = \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \quad \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \quad \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} \right. \\ \left. \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} \quad \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \quad w_{rs} \right) \quad \text{.....(15)}$$

式(15)を用いると式(12)の各マトリックスの要素計算が次のように表される。

A_{11} の要素:

$$A_{im} = \iint_A u_{ij}^T K_{11} u_{ij} \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} i, I=1, \sim, N_i \\ j, J=0, \sim, N_j \end{matrix} \right)$$

A_{12} の要素:

$$A_{im} = \iint_A u_{ij}^T K_{12} v_{pq} \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} I=1, \sim, N_i, J=0, \sim, N_j \\ p=1, \sim, N_p, q=0, \sim, N_q \end{matrix} \right)$$

A_{13} の要素:

$$A_{im} = \iint_A u_{ij}^T K_{13} w_{rs} \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} I=1, \sim, N_i, J=0, \sim, N_j \\ r=2, \sim, N_r, s=0, \sim, N_s \end{matrix} \right)$$

A_{22} の要素:

$$A_{im} = \iint_A v_{pq}^T K_{22} v_{pq} \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} p, P=1, \sim, N_p \\ q, Q=0, \sim, N_q \end{matrix} \right)$$

A_{23} の要素:

$$A_{im} = \iint_A v_{pq}^T K_{23} w_{rs} \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} P=1, \sim, N_p, Q=0, \sim, N_q \\ r=2, \sim, N_r, s=0, \sim, N_s \end{matrix} \right)$$

A_{33} の要素:

$$A_{im} = \iint_A w_{rs}^T K_{33} w_{rs} \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} r, R=2, \sim, N_r \\ s, S=0, \sim, N_s \end{matrix} \right)$$

B_{11} の要素:

$$B_{im} = \iint_A u_{ij} u_{ij} g \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} i, I=1, \sim, N_i \\ j, J=0, \sim, N_j \end{matrix} \right)$$

B_{22} の要素:

$$B_{im} = \iint_A v_{pq} v_{pq} g \sqrt{g} dX dY \\ \left(\begin{matrix} p, P=1, \sim, N_p \\ q, Q=0, \sim, N_q \end{matrix} \right)$$

B₃₃ の要素 :

$$B_{im} = \iint_A w_{rs} w_{rs} \sqrt{g} dX dY \quad \left(\begin{matrix} r, R=2, \sim, N_r \\ s, S=0, \sim, N_s \end{matrix} \right) \quad \dots\dots (16)$$

D. 変位関数の近似項及び項数は表-5 のとおりである。ただし、表中の数字 i, j は X 及び Y のべき数, すなわち $X^i Y^j$ を表す。

表-5 変位関数の項数

U, V

1,0	
2,0 2,1	
3,0 3,1 3,2	
4,0 4,1 4,2 4,3	
5,0 5,1 5,2 5,3 5,4	
6,0 6,1 6,2 6,3 6,4 6,5	
7,0 7,1 7,2 7,3 7,4 7,5 7,6	項数
8,0 8,1 8,2 8,3 8,4 8,5 8,6 8,7	36
9,0 9,1 9,2 9,3 9,4 9,5 9,6 9,7 9,8	45
10,0 10,1 10,2 10,3 10,4 10,5 10,6 10,7 10,8 10,9	55

W

2,0	
3,0 3,1	
4,0 4,1 4,2	
5,0 5,1 5,2 5,3	
6,0 6,1 6,2 6,3 6,4	
7,0 7,1 7,2 7,3 7,4 7,5	
8,0 8,1 8,2 8,3 8,4 8,5 8,6	項数
9,0 9,1 9,2 9,3 9,4 9,5 9,6 9,7	36
10,0 10,1 10,2 10,3 10,4 10,5 10,6 10,7 10,8	45
11,0 11,1 11,2 11,3 11,4 11,5 11,6 11,7 11,8 11,9	55

(1997年9月26日受付)